УДК 512.4

©2007 р. **Я.В. Лавренюк**

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

СПРЯЖЕНІСТЬ В ГРУПІ ЛОКАЛЬНИХ ІЗОМЕТРІЙ ГРАНИЦІ ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННОГО КОРЕНЕВОГО ДЕРЕВА

В роботі встановлено критерій спряженості елементів в групі локальних ізометрій границі кореневого дерева LIsom∂T. Також встановлено, що група LIsom∂T є амбівалентною для кореневого однорідного дерева.

We established criterion of conjugacy in the full local isometry group of the rooted tree boundary LIsom∂T. We also showed that the group LIsom∂T is ambivalent in the case of homogeneous rooted tree.

Спочатку дамо визначення локальної ізометрії. Нехай (X, d) – метричний простір. Бієкція $\alpha : X \to X$ називається *локальною ізометрією*, якщо для кожного $x \in X$ існує окіл цієї точки U_x, такий що для всіх $x_1, x_2 \in U_x$ виконується:

$$d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2).$$

Бієкція $\alpha : X \to X$ називається *однорідною локальною ізометрією*, якщо існує $\delta > 0$, таке що

$$d(x_1^\alpha, x_2^\alpha) = d(x_1, x_2),$$

для всіх $x_1, x_2 \in X_1$, таких що $d(x_1, x_2) < \delta$. Легко помітити, що для компактного простору кожна локальна ізометрія буде однорідною. Зрозуміло, що множина всіх локальних ізометрій метричного простору (X, d) утворює групу. Ми будемо її позначати $\mathrm{LIsom}(X, d)$.

Тепер перейдемо до понять і визначень, пов'язаних з кореневими деревами і групами, що діють на них.

Нехай (T, v_0) локально скінченне кореневе дерево з коренем v_0. Для довільних вершин u, v дерева T $(u, v \in V(T))$ *відстанню* $d(u, v)$ між u та v є довжина найкоротшого шляху, що з'єднує їх. Для (T, v_0) і невід'ємного цілого $n \geq 0$ *рівнем* n (сферою радіусу n) називається множина

$$V_n(T) = \{v \in V(T) : d(v_0, v) = n\}.$$

Кореневе дерево T називається однорідним, якщо всі вершини з усіх рівнів дерева T мають однакову валентність і лише корінь – на 1 меншу.

Вершина v дерева T *лежить під* вершини w, якщо шлях, що з'єднує вершину v з коренем, містить вершину w (позначатимемо це $v \prec w$). Ми позначатимемо T_v повне піддерево дерева T, що складається з усіх вершин, що лежать нижче від v з коренем v.

Надалі ми будемо розглядати тільки такі кореневі дерева, в яких для довільної вершини, множина вершин, що лежать нижче за неї, непорожня. Це рівносильно тому, що корінь дерева має ненульову валентність, а решта вершин – валентність не меншу ніж 2.

Кінець кореневого дерева – це нескінченний шлях без повторень з початком в корені. Ми позначатимемо ∂T множину всіх кінців (границю) дерева T.

Зафіксуємо $\bar{\lambda} = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нескінченну строго спадну послідовність додатних чисел, що збігається до 0. Ми можемо ввести природну ультраметрику на ∂T, поклавши $\rho_{\bar{\lambda}}(x_1, x_2) = \lambda_n$, де n – довжина найбільшої спільної частини кінців x_1 і x_2. Цей компактний ультраметричний простір позначатимемо $(\partial T, \bar{\lambda})$, чи просто ∂T. В роботі [1] доведено, що для довільних ультраметричних просторів $(\partial T, \bar{\lambda})$ та $(\partial T, \bar{\mu})$ їхні групи локальних ізометрій ізоморфні.

Бієкція $f : V(T) \longrightarrow V(T)$ є *(кореневою) ізометрією (автоморфізмом)*, якщо

$v_0^f = v_0$ і для довільних суміжних вершин v_1, v_2 образи v_1^f, v_2^f суміжні. Множину всіх ізометрій кореневого дерева T позначатимемо $\mathrm{Isom}T$. Група всіх автоморфізмів $\mathrm{Aut}T$ збігається з групою $\mathrm{Isom}T$.

Очевидно, що кожна ізометрія T індукує ізометрію метричного простору ∂T. Тому є природне занурення групи ізометрій $\mathrm{Isom}T$ кореневого дерева T в групу гомеоморфізмів $\mathrm{Homeo}\partial T$ границі цього дерева. Більше того $\mathrm{Isom}T = \mathrm{Isom}\partial T$.

Нехай G підгрупа групи ізометрій кореневого дерева T. Позначатимемо множину орбіт дії групи G на вершинах – $\bar{V} = V/G$ і множину орбіт дії групи G на ребрах – $\bar{E} = E/G$.

Орбітальний граф T/G визначимо таким чином. Вершинами цього графу будуть елементи множини $\bar{V}$, а ребрами – елементи множини $\bar{E}$. Дві вершини $\bar{u}$, $\bar{v}$ з T/G будуть з'єднані ребром $\bar{e}$ тоді і лише тоді, коли існують дві вершини $u \in \bar{u}$ та $v \in \bar{v}$, для яких ребро $\{u, v\}$ міститься в $\bar{e}$.

Нехай $g \in \mathrm{Isom}T$. Орбітальний граф циклічної групи породженої g ми будемо позначати T_g і називати його *орбітальним графом* ізометрії g. В роботі [2] доводиться, що орбітальний граф ізометрії кореневого дерева обов'язково буде кореневим деревом.

Орбітальним типом елемента g з $\mathrm{Isom}T$ називається орбітальне дерево T_g, з вершинами поміченими цілими додатніми числами, що дорівнюють потужностям відповідних орбіт.

Кажуть, що орбітальні типи T_1 і T_2 *еквівалентні*, якщо вони ізоморфні як вершинно-помічені кореневі дерева, тобто існує ізоморфізм кореневих дерев T_1 і T_2, який зберігає мітки в вершинах.

Критерій спряженості в групі ізометрій узагальнених берівських метрик було отримано в [3]. У вище згадуваній роботі [2] встановлено такий критерій спряженості ізометрій кореневого дерева в групі всіх ізометрій.

Теорема 1 ([2]). *Ізометрії кореневого дерева (T, v_0) спряжені в групі (T, v_0) тоді і лише тоді, коли їхні орбітальні типи еквівалентні.*

Для дерева T і натурального n розглянемо піддерево $T(n)$, що отримується з T викиданням всіх вершин з $V_1(T)$, $V_2(T)$, $\ldots$, $V_{n-1}(T)$ разом з інцидентними їм ребрами і з'єднанням кореня з кожною вершиною з $V_n(T)$. Матимемо, що $T(1) = T$, а також що всі такі дерева при різних n мають локально-ізометричні границі.

Тепер розглянемо множину

$$M = \{T(n),\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Оскільки ∂T є компактом, то кожна локальна ізометрія цього простору є однорідною, тобто довільний елемент $g \in \mathrm{LIsom}\partial T$ діє як ізометрія на $T(n)$, для всіх n більших за деяке n_g, що залежить від g. Тому орбітальний тип $g \in \mathrm{LIsom}\partial T$, як ізометрії з $\mathrm{Isom}T(n)$ визначено на всіх, крім скінченної кількості, елементах з M. І ми можемо назвати типом g множину орбітальних типів

$$M_g = \{T_g(n),\ n > n_g\}.$$

Казатимемо, що орбітальні типи T_g і T'_h елементів $g \in \mathrm{Isom}T$ та $h \in \mathrm{Isom}T'$ *апроксимативно еквівалентні*, якщо існують такі натуральні n_1 та n_2, що $T_g(n)$ та $T'_h(m)$ ізоморфні як вершинно-помічені кореневі дерева.

Нижче ми наведемо елементарні властивості апроксимативної евівалентності:

Лема 1. *1. З еквівалентності орбітальних типів випливає їх апроксимативна евівалентність*

2. Апроксимативна евівалентність є відношенням рівносильності, тобто є рефлексивним, симетричним і транзитивним відношенням.

3. Для довільного елемента g з $\mathrm{LIsom}\partial T$ орбітальні типи з M_g є попарно апроксимативно еквівалентними.

Попередня лема обгрунтовує наступне визначення:

Типи M_g та M_h називатимемо *еквівалентними*, якщо деякі (а значить і всі) елементи $T_g(k)$ та $T_h(m)$ є апроксимативно еквівалентними.

Лема 2. *Якщо орбітальні типи $T_g(k)$ та $T_h(m)$ елементів $g, h \in \mathrm{LIsom}\partial T$ еквівалентні, то виконується одна з двох умов*

1. *$k = m$.*
2. *$|V_n(T)|$ є сталою для $n \geq \min\{k, m\}$.*

Доведення. Нехай $k \neq m$. Оскільки ізоморфізм $T_g(k)$ на $T_h(m)$ зберігає мітки в вершинах, то він зберігає і їхню суму. Але ця сума збігається з кількістю вершин на відповідному рівні дерева. Тому для довільного невід'ємного цілого i виконується рівність $V_{k+i}(T) = V_{m+i}$. І оскільки ми розглядаємо тільки ті дерева для яких кількість вершин на рівні є неспадною функцією (ця вимога є наслідком обмежень на валентності вершин), то $|V_n(T)|$ є сталою для $n \geq \min\{k, m\}$. □

Зауважимо, що в і в першому і в другому випадку $T_g(k)$ та $T_h(k)$ еквівалентні.

Твердження 1. *Нехай g та h елементи з $\mathrm{LIsom}\partial T$. Типи M_g та M_h будуть еквівалентними тоді і лише тоді, коли для деякого n орбітальні типи $T_g(n)$ та $T_h(n)$ є еквівалентними.*

Доведення. Якщо M_g та M_h еквівалентні, то для всіх $k > n_g$ і $m > n_h$ орбітальні типи $T_g(k)$ та $T_h(m)$ є апроксимативно еквівалентними. За означенням апроксимативної еквівалентності існують такі натуральні числа k_1 та m_1, що $T_g(k + k_1)$ та $T_h(m + m_1)$ є еквівалентними, тобто ізоморфні як вершинно-помічені кореневі дерева. За лемою 2 $T_g(k + k_1)$ та $T_h(k + k_1)$ є еквівалентними. Також зрозуміло, що $T_g(k+k_1) \in M_g$ та $T_h(k + k_1) \in M_h$, звідки й отримуємо потрібне твердження.

Навпаки. Нехай $T_g(n) \in M_g$ та $T_h(n) \in M_h$ – еквівалентні орбітальні типи. Тоді за лемою 1 орбітальні типи $T_g(n)$ та $T_h(n)$ є апроксимативно еквівалентними. А, отже, M_g та M_h еквівалентні. □

Теорема 2. *Елементи $\mathrm{LIsom}\partial T$ спряжені тоді і лише тоді коли їхні типи еквівалентні.*

Доведення. Нехай g та h елементи з $\mathrm{LIsom}\partial T$.

Існує таке n, що на на дереві $T(n)$ вони діють ізометріями. Це є правильним для всіх n більших за n_g та n_h.

Якщо g та h спряжені, то за теоремою 1 орбітальні дерева $T_g(n)$ і $T_h(n)$ еквівалентні. Тому за твердженням 1 типи M_g та M_h еквівалентні.

Нехай тепер типи M_g та M_h еквівалентні. Тоді за твердженням 1 орбітальні дерева $T_g(l)$ і $T_h(l)$ еквівалентні. Тому за теоремою 1 елементи g та h спряжені в $\mathrm{Isom}T(l)$. Оскільки ж кожна ізометрія $T(l)$ діє як локальна ізометрія на ∂T, то g та h спряжені в $\mathrm{LIsom}\partial T$. □

Теорема 3. *Для однорідного кореневого дерева T група $\mathrm{LIsom}\partial T$ є амбівалентною.*

Доведення. Нехай $g \in \mathrm{LIsom}\partial T$. Існує таке n, що і g, і g^{-1} діють як ізометрії на $T(n)$. Оскільки група ізометрій кореневого дерева є амбівалентною (див. [2]), то g і g^{-1} спряжені в групі $\mathrm{Isom}T(n)$. Оскільки ж кожна ізометрія $T(l)$ діє як локальна ізометрія на ∂T, то g та h спряжені в $\mathrm{LIsom}\partial T$. □

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Lavrenyuk Ya.* On Automorphisms of Local Isometry Groups of Compact Ultrametric Spaces// International Journal of Algebra and Computation.— 2005.— **15**, N5-6.— C.1013—1024.

2. *Gawron P., Nekrashevych V. and Sushchansky V.* Conjugation in tree automorphism groups// International Journal of Algebra and Computation.— 2001.—**11**, N5.— C.529—547.

3. *Безущак О.Е., Сущанский В.И.* Сопряженность в группах изометрий обобщенных бэровских метрик// Укр. мат. жур.— 1991.—**43**, N9.— C.1148—1155.