УДК 517.51

©2006 р. Кукульняк Д. І.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ПРИКЛАД БІЄКТИВНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ, ЯКЕ МАЄ НЕВИМІРНИЙ ГРАФІК

Наведено приклад бієктивного відображення $b\colon [0,1] \to [0,1]$, графік якого є невимірним за Лебеґом.

An example of the bijective mapping $b : [0,1] \to [0,1]$ which has Lebesgue unmeasurable graph is constructed.

Нехай $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x,y)$. Будемо називати функцію f нарізно інтегровною за Ріманом, якщо для кожного $x \in [a,b]$ функція f^x інтегровна за Ріманом на $[c,d]$ і для кожного $y \in [c,d]$ функція f_y інтегровна за Ріманом на $[a,b]$. У [1] було наведено приклад нарізно інтегровної за Ріманом функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка за сукупністю змінних не є вимірною за Лебеґом. Цей результат легко отримати використовуючи множину S з $\mathbb{R}^2$, яка не має плоскої міри Лебеґа і з кожною прямою перетинається не більше ніж у двох точках, що побудована В. Серпінським у [2] (див. також [3, с. 181-183]). Також, вказана множина перетинається з будь-якою множиною додатної міри, і цей перетин є невимірною множиною, яка перетинається з кожною прямою не більше ніж у двох точках. Якщо розглянути характеристичну функцію перетину S з $[0,1]^2$ отримаємо потрібний приклад.

На початку, при розв'язанні задачі побудови вказаного вище прикладу, виникла задача побудувати бієктивне відображення $b\colon [0,1] \to [0,1]$, яке б мало невимірний за Лебеґом графік у $\mathbb{R}^2$. Зрозуміло, що маючи таку бієкцію легко отримуємо і приклад нарізно інтегровної за Ріманом функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка за сукупністю змінних не є вимірною за Лебеґом. Для цього досить розглянути характеристичну функцію χ графіка такої бієкції. Ця функція дає потрібний приклад, оскільки згідно з критерієм Лебеґа інтегровності за Ріманом розрізи χ_y, χ^x інтегровні за Ріманом.

В цій роботі ми побудуємо таке бієктивне відображення $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, графік якого $\operatorname{gr} b = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = b(x)\}$ є невимірною за Лебеґом множиною в $\mathbb{R}^2$. Побудова здійснюється за допомогою дещо зміненого, методу побудови множини Серпінського [2].

Наведемо спочатку деякі твердження з теорії множин.

Твердження 1. Система $\mathcal{E}$ всіх замкнених множин додатної плоскої міри має потужність континуума $\mathfrak{c}$.

Доведення. Замкнені множини та їх відкриті доповнення знаходяться у взаємно однозначній відповідності. Але кожна відкрита множина є об'єднанням зліченної кількості кругів з раціональними радіусами, центри яких мають раціональні координати. Тому, потужність $\mathcal{E}$ не перевищує $\mathfrak{c}$. З іншого боку, замкнені круги з центрами у початку координат утворюють множину потужності $\mathfrak{c}$, тому потужність $\mathcal{E}$ не менша за $\mathfrak{c}$.

Твердження 2. ([4, с. 356]) Якщо ψ — це перше порядкове число, що відповідає потужності $\mathfrak{c}$, то множина $\{\alpha : \alpha < \psi\}$ має потужність $\mathfrak{c}$ і для кожного $\beta < \gamma$ $|[0,\beta)| < \mathfrak{c}$.

Твердження 3. Якщо А — множина додатної лінійної міри, то її потужність дорівнює $\mathfrak{c}$.

Доведення. Згідно з теоремою Кантора-Бендіксона [4, с. 56] кожну незліченну замкнену множину можна подати як об'єднання деякої зліченної множини та деякої не порожньої досконалої множини. Кожна досконала множина має потужність $\mathfrak{c}$ [4, с. 51]. Оскільки кожна множина додатної лінійної міри містить деяку замкнену множину додатної міри, то вона теж має потужність $\mathfrak{c}$.

Далі під λ будемо розуміти лінійну, а під μ — плоску міру Лебеґа. Згідно з твердженням 1 потужність множини $\mathcal{E}$ всіх замкнених множин додатної плоскої міри дорівнює $\mathfrak{c}$. Тому існує бієкція $\alpha \longmapsto F_\alpha$ множини $\{\alpha : \alpha < \psi\}$ на $\mathcal{E}$. Нехай $\mathcal{F}$ сукупність всіх функції f, таких, що $\operatorname{dom} f = [0, \beta)$, де $\beta \le \psi$, зі значеннями в $\mathbb{R}^2$, що задовольняють умовам:

1) $f(\alpha) \in F_\alpha$ для всіх α з $\operatorname{dom} f$;

2) для будь-яких різних α_1, α_2 з $\operatorname{dom} f$, якщо $f(\alpha_1) = (x_1, y_1)$ і $f(\alpha_2) = (x_2, y_2)$, то $x_1 \ne x_2, y_1 \ne y_2, x_1 \ne y_2, x_2 \ne y_1$.

Зрозуміло, що множина $\mathcal{F}$ не порожня.

На $\mathcal{F}$, введемо відношення часткового порядку $\preccurlyeq$, вважаючи, що $f_1 \preccurlyeq f_2$, якщо f_2 є продовженням f_1. У так впорядкованій множині $\mathcal{F}$ кожний ланцюжок (така підмножина $\mathcal{F}$ в якій кожні два елемента порівняні між собою) обмежений зверху. Справді, нехай $(f_s)_{s\in S}$ ланцюжок в $\mathcal{F}$ і $\operatorname{dom} f_s = [0, \beta_s)$. Нехай $[0, \beta) = \bigcup_{s\in S}[1, \beta_s)$. Це об'єднання справді має вигляд $[0, \beta)$ $\beta = \sup\limits_{s\in S} \beta_s$, оскільки кожні два порядкових числа порівнянні (див. напр. [4, с. 356-357]). На $[0, \beta)$ визначимо функцію $f\colon [0, \beta) \to \mathbb{R}^2$ таким чином: для $\alpha \in [0, \beta)$ покладемо $f(\alpha) = f_s(\alpha)$, якщо $\alpha \in [0, \beta_s)$. Функція f задовольняє умови 1) та 2), оскільки їм задовольняють всі f_s. Тому $f \in \mathcal{F}$. Крім того $f_s \preccurlyeq f$ для всіх $s \in S$. Таким чином, множина $\mathcal{F}$ індуктивно впорядкована. Отже, за лемою Цорна [5, с. 129] у множині $\mathcal{F}$ існує максимальний елемент g. Перевіримо, що $\operatorname{dom} g = [0, \psi)$. Нехай $\operatorname{dom} g = [0, \beta)$. Припустимо, що $\beta < \psi$. Розглянемо множину F_β. Оскільки $\mu(F_\beta) > 0$, то $|F_\beta| = \mathfrak{c}$, згідно з твердженням 3. Позначимо $R_g = g([0, \beta))$. За побудовою $|R_g| = |[0, \beta)| < \mathfrak{c}$. Для точки $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, позначимо

$$\mathcal{L}(p) = \{\{x\} \times \mathbb{R}, \{y\} \times \mathbb{R}, \mathbb{R} \times \{x\}, \mathbb{R} \times \{y\}\}.$$

Нехай

$$\mathcal{L} = \bigcup_{p\in R(g)} \mathcal{L}(p) \text{ і } L = \bigcup \mathcal{L}.$$

Маємо, що

$$|\mathcal{L}| \le \sum_{p\in R_g} |\mathcal{L}(p)| \le 4|R(g)| < \mathfrak{c}.$$

Нехай

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \lambda(F_\beta^x) > 0\},$$

де $F_\beta^x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in F_\beta\}$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\int\limits_A \lambda(F_\beta^x)dx = \mu(F_\beta) > 0.$$

Тому $\lambda(A) > 0$, отже, $|A| = \mathfrak{c}$. Крім того $|F_\beta^x| = \mathfrak{c}$ для кожного $x \in A$. Тому існує елемент $x_0 \in A$, такий, що пряма $l^{x_0} = \{x_0\} \times \mathbb{R}$ не належить до $\mathcal{L}$. Але $\lambda(F_\beta^{x_0}) > 0$ і $|F_\beta^{x_0}| = \mathfrak{c}$. Тому існує точка $y_0 \in F_\beta^{x_0}$ така, що $l_{y_0} = \mathbb{R} \times \{y_0\}$ не належить до $\mathcal{L}$. Отже, точка (x_0, y_0) не належить до множини L, оскільки прямі $\{x_0\} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \{y_0\}$ не входять до сукупності прямих $\mathcal{L}$.

Продовжимо тепер g так, щоб продовження g^* було визначене на $[0, \beta + 1)$. Покладемо $g^*(\alpha) = g(\alpha)$, $\alpha < \beta$ і $g^*(\beta) = (x_0, y_0)$. Оскільки $\beta + 1$ це перше порядкове число, яке йде за β (див. напр. [4, с. 358]), то $\operatorname{dom} g^* = [0, \beta + 1)$ і g^* задовольняє умови 1) і 2). Справді, якщо брати дві точки з R_g, то умови 1) і 2) для них виконуються. Також для точки $(x, y) \in R_g$, $x \ne x_0$ і $y \ne y_0$, згідно з вибором (x_0, y_0), і $x \ne y_0$, $y \ne x_0$ згідно з побудовою множини $\mathcal{L}$. Отже умови 1) і 2) виконуються для функції g^*. Оскільки, $g \prec g^*$, то g не є максимальним елементом для множини $\mathcal{F}$, що дає суперечність. Тому $\beta = \psi$.

Множина R_g задовольняє такі умови:

а) Множина R_g — невимірна за Лебеґом. Справді, якщо припустити, що R_g вимірна, то і її доповнення R_g^c теж буде вимірним. Оскільки R_g^c не містить жодної замкненої множини додатної плоскої міри (адже g задовольняє 1)), то вона має міру нуль, бо кожна множина додатної плоскої міри містить в собі деяку замкнену множину додатної плоскої міри. З іншого боку, кожна вертикальна пряма перетинає множину R_g не більше ніж в одній точці, тому вона теж має міру нуль, згідно з теоремою Фубіні. Виходить, що у випадку вимірності R_g площина $\mathbb{R}^2$ має міру нуль. Ця суперечність доводить невимірність множини R_g.

б) Для будь-яких точок $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$ з R_g $x_1 \neq x_2$, $x \neq y_2$, $x_2 \neq y_1$ і $y_2 \neq y_1$.

Позначимо через R_g^* образ множини R_g при відображенні : $(x, y) \longmapsto (y, x)$. Покладемо $E^* = R_g \cup R_g^*$. Множина E^* невимірна так само, як і R_g, бо перетинається з будь-якою як горизонтальною так і вертикальною прямою не більше ніж в одній точці. Справді, якщо

$$|(\{t\} \times \mathbb{R}) \cap E^*| > 1,$$

то існують y_1 і y_2, такі, що $y_1 \neq y_2$, $(t, y_1) \in R_g$ і $(t, y_2) \in R_g^*$. Але тоді $(y_2, t) \in R_g$ і в такому випадку R_g не задовольняє умову 2). Отже, $y_1 = y_2$. Аналогічно і для горизонтальної прямої.

Позначимо $E = E^* \cap [0, 1]^2$. Цей перетин не порожній, оскільки множина E^* перетинається с кожною замкненою множиною додатної плоскої міри, зокрема і з $[0, 1]^2$. Множина E невимірна, бо якщо припускати її вимірність, то знову згідно з теоремою Фубіні отримаємо, що міра $[0, 1]^2$ рівна 0, в той час як $\mu([0, 1]^2) = 1$. Визначимо тепер відображення, яке і буде шуканою бієкцією відрізка $[0, 1]$ на себе. Для $x \in [0, 1]$ покладемо $b(x) = E^x = \{y : (x, y) \in E\}$, якщо $E^x \neq \varnothing$, і $b(x) = x$ в іншому випадку. Зрозуміло, що $b(x) \in [0, 1]$ для кожного $x \in [0, 1]$.

Розглянемо множину $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \mid (x, y) \in E\}$. Нехай x_1 і x_2 — дві різні точки з відрізка $[0, 1]$. Якщо x_1 і x_2 взяті з множини A, то $y_1 = b(x_2) \neq b(x_1) = y_2$, адже у випадку $y_1 = y_2 = y_0$ множина E перетиналася б з горизонтальною прямою $\mathbb{R} \times \{y_0\}$ принаймні у двох точках (x_1, y_1) і (x_2, y_2), що неможливо. Якщо $x_1, x_2 \notin A$, то $b(x_1) = x_1 \neq x_2 = b(x_2)$. Нехай одна з точок, скажімо, x_1, не входить у множину A, а інша входить. Припустимо, що $y_2 = b(x_2) = b(x_1) = x_1$. Оскільки $(x_2, y_2) \in E$, то і $(x_1, x_2) = (y_2, x_2) \in E$, а значить, $x_1 \in B$, що неможливо. Таким чином, і в цьому випадку $b(x_1) \neq b(x_2)$. Отже, b — ін'єктивне відображення.

Відображення b сюр'єктивне. Справді, нехай $y_0 \in [0, 1]$. Припустимо, що $(\mathbb{R} \times \{y_0\}) \cap E \neq \varnothing$. Тоді існує точка $x_0 \in [0, 1]$, така, що $(x_0, y_0) \in E$, для якої за побудовою будемо мати, що $b(x_0) = y_0$. Якщо ж $(\mathbb{R} \times \{y_0\}) \cap E = \varnothing$ то і $(\{y_0\} \times \mathbb{R}) \cap E = \varnothing$, адже множина E симетрична відносно прямої $y = x$. В такому разі $b(y_0) = y_0$.

Отже, відображення $b \colon [0, 1] \to [0, 1]$ є бієктивним. Графік b — це множина $E \cup \{(x, x) | x \in [0, 1] \setminus A\}$. Оскільки плоска міра множини $\{(x, x) | x \in [0, 1] \setminus A\}$ дорівнює нулю, то з того, що множина E невимірна, негайно випливає, що графік функції b є невимірним. Таким чином ми довели.

Твердження 4. Існує бієктивне відображення $b \colon [0, 1] \to [0, 1]$, графік якого у $\mathbb{R}^2$ невимірний за Лебеґом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кукульняк Д. І., Маслюченко В. К. *Нарізно інтегровні за Ріманом функції* // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Вип. 288. Математика. — Чернівці: Рута, 2006. — С. 74–76.

2. *Sierpinski W.* Sur un problème concernant les ensembles mesurable surficiellement // Fund. Math. — 1920. — **1**. — P. 112–115.

3. Гелбаум Б. Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967. — 252 с.

4. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.:Наука, 1974. — 480 с.

5. *Маслюченко В. К.* Елементи теорії множин. — Чернівці: Рута, 2002. — 132 с.