УДК 517.51

©2007 р. Карлова О.О., Маслюченко О.В.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Досліджується питання про зв'язки між першим берівським і першим лебеґівським класами для відображень, які набувають значень у прямій Зорґенфрея.

The relations between the Baire-one mappings and the Lebesgue-one mappings with values in Sorgenfrey line are investigated.

1. Нехай X і Y – топологічні простори. Ми будемо позначати символом $B_1(X,Y)$ сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій, а через $H_1(X,Y)$ – сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Лебеґа, тобто таких, для яких прообраз $f^{-1}(G)$ довільної відкритої в просторі Y множини G подається у вигляді зліченного об'єднання замкнених в X множин.

Згідно з теоремою Лебеґа-Гаусдорфа [1, с. 402] рівність $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ має місце, коли X – метричний простір, а $Y = \mathbb{R}$. Ця теорема узагальнювалась багатьма математиками: С. Ролевичем, Р. Ганселлом, К. Роджерсом, М. Фосґерау, Л. Веселим та іншими. Слід зазначити, що в їх результатах простір значень Y є метризовним. Тому природно виникає питання, чи залишається твердження теореми Лебеґа-Гаусдорфа вірним для відображень, які набувають значень у неметризовних просторах. У цій статті ми досліджуємо це питання для функцій, які діють у пряму Зорґенфрея.

2. Нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ як множина збігається з числовою прямою, але околом точки x в $\mathbb{L}$ вважається будь-яка підмножина $\mathbb{L}$, яка містить деякий проміжок $[x, x+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$. Добре відомо, що простір $\mathbb{L}$ неметризовний.

Непорожній тихоновський простір X називається сильно нульвимірним [2, с. 529], якщо в довільне скінченне функціонально відкрите покриття $(U_i)_{i=1}^k$ цього простору можна вписати скінченне відкрите покриття $(V_i)_{j=1}^m$, таке, що $V_i \cap V_j = \emptyset$ при $i \neq j$.

Теорема 1. *Нехай X – сильно нульвимірний досконалий простір і $f : X \to \mathbb{L}$ – функція першого класу Лебеґа, така, що $|f(X)| \leq \aleph_0$. Тоді $f \in B_1(X,\mathbb{L})$.*

Доведення. Оскільки множина $f(X)$ не більш, ніж зліченна, то підпростір $Y = f(X)$ простору $\mathbb{L}$ задовольняє другу аксіому зліченності. Крім того, простір Y регулярний, як підпростір регулярного простору $\mathbb{L}$. Згідно з [2, с. 387], простір Y метризовний. Зрозуміло, що Y також сепарабельний простір. Таким чином, згідно з [3], $f \in B_1(X,Y)$, а, значить, $f \in B_1(X,\mathbb{L})$.

Ми будемо казати, що послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ рівномірно збігається до функції f в $\mathbb{L}$, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_o, що виконується нерівність

$$0 \leq f_n(x) - f(x) < \varepsilon$$

для всіх $n \geq n_o$ і всіх $x \in X$.

Теорема 2. *Нехай X – топологічний простір і $f \in H_1(X,\mathbb{L})$. Тоді f є рівномірною границею послідовності функцій $f_n \in H_1(X,\mathbb{L})$, причому $|f_n(X)| \leq \aleph_o$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Для $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ розглянемо множини

$$V_{kn} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right).$$

Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{Z}$ множина V_{kn} відкрито-замкнена в $\mathbb{L}$ і $f \in H_1(X, \mathbb{L})$, то множина $A_{kn} = f^{-1}(V_{kn})$ двостороння в X. Зауважимо, що $X = \bigsqcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} A_{kn}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $f_n(x) = \frac{k+1}{n}$, якщо $x \in A_{kn}$. Зрозуміло, що $f_n \in H_1(X, \mathbb{L})$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Покажемо, що $f_n \rightrightarrows f$ в $\mathbb{L}$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$. Існує таке ціле число k, що $x \in A_{kn}$. Тоді $f_n(x) = \frac{k+1}{n}$, а $f(x) \in [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$. Звідси $0 \leq f_n(x) - f(x) < \frac{1}{n}$. Таким чином, послідовність f_n рівномірно збігається до функції f в $\mathbb{L}$.

Наслідок 1. *Нехай X – сильно нульвимірний простір і $f \in H_1(X, \mathbb{L})$. Тоді f є рівномірною границею послідовності функцій $f_n \in B_1(X, \mathbb{L})$, причому $|f_n(X)| \leq \aleph_0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.*

Зауважимо, що рівномірна границя послідовності функцій першого класу Лебеґа зі значеннями в прямій Зорґенфрея, взагалі кажучи, не є першого класу Лебеґа, як показує наступний приклад.

Приклад 1. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}$ покладемо

$$f_n(x) = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & x = r_k,\ 1 \leq k < n, \\ \frac{1}{n}, & x \notin \{r_1, \dots, r_{n-1}\}. \end{cases}$$

Тоді $f_n \in H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$ і послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається в $\mathbb{L}$ до функції f, але $f \notin H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$.

Покажемо спочатку, що $f_n \in H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$. Розглянемо довільну відкриту в $\mathbb{L}$ множину G і $n \in \mathbb{N}$. Якщо $\frac{1}{n} \in G$, то множина $\mathbb{L} \setminus f_n^{-1}(G)$ скінчена, отже, є типу G_δ в $\mathbb{L}$. Тому $f_n^{-1}(G)$ є F_σ-множиною в $\mathbb{L}$. Якщо ж $\frac{1}{n} \notin G$, то множина $f_n^{-1}(G)$ скінченна і тому є F_σ-множиною в $\mathbb{L}$.

Розглянемо функцію $f : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & x = r_n, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

і доведемо, що $f_n \rightrightarrows f$ в $\mathbb{L}$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і виберемо $n_0 \in \mathbb{N}$ так, щоб $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$. Для точок $x \notin \mathbb{Q}$ маємо, що $f(x) = 0$ і $f_n(x) = \frac{1}{n}$ для всіх n. Тоді

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n} < \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

для всіх $n \geq n_0$.

Нехай тепер $x \in \mathbb{Q}$ і $n \geq n_0$.

Якщо $x = r_k$, $1 \leq k < n$, то $f(x) = -\frac{1}{k}$, $f_n(x) = -\frac{1}{k}$ і $f_n(x) - f(x) = 0$.

Якщо $x = r_n$, то $f(x) = -\frac{1}{n}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ і

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Якщо ж $x = r_k$, $k > n$, то $f(x) = -\frac{1}{k}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}$ і

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{k} <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Зауважимо, що $f \notin H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$, адже для довільного $\delta > 0$ множина $f^{-1}([0, \delta)) = \mathbb{L} \setminus \mathbb{Q}$ не є типу F_σ в $\mathbb{L}$.

Теорема 3. *Нехай X – сильно нульвимірний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ неперервна. Тоді f є рівномірною границею в $\mathbb{L}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{L}$, таких, що $|f_n(X)| \leq \aleph_0$. Якщо функція f обмежена, то $|f_n(X)| < \aleph_0$.*

Доведення. Розглянемо для кожного $n \in \mathbb{N}$ не більш, ніж зліченне покриття $\mathcal{W}_n$ множини $f(X)$ відкритими інтервалами довжиною менше $\frac{1}{2^n}$. Зауважимо, що у загальному випадку таке покриття можна вибрати локально скінченним, а якщо функція f обмежена, то таке покриття можна вибрати скінченним. Функція $f : X \to \mathbb{R}$ неперервна, а всі множини з $\mathcal{W}_n$ функціонально відкриті, тому для кожного n множина $f^{-1}(W)$ функціонально відкрита в X для будь-якої множини $W \in \mathcal{W}_n$.

Оскільки простір X сильно нульвимірний, то згідно з [2, с. 587] для кожного n у покриття $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(W) : W \in \mathcal{W}_n\}$ простору X можна вписати локально скінченне диз'юнктне покриття $\mathcal{U}_n$ відкрито-замкненими множинами.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $x \in X$ існує $U \in \mathcal{U}_n$, таке, що $x \in U$. Крім того, існує таке $W \in \mathcal{W}_n$, що $U \subseteq f^{-1}(W)$. Зауважимо, що $f(U) \subseteq W = (a,b)$, де $b - a < \frac{1}{2^n}$. Покладемо $f_n(x) = b$. Зрозуміло, що функція $f_n : X \to \mathbb{L}$ неперервна.

Нехай $n \in \mathbb{N}$. Для $x \in X$ знайдемо $U \in \mathcal{U}_n$ і $W \in \mathcal{W}_n$, такі, що $x \in U \subseteq f^{-1}(W)$. Тоді $f_n(x) = b$, де

$$f(U) \subseteq (a,b), \quad \text{і} \quad b - a < \frac{1}{2^n}.$$

Тому

$$0 \le f_n(x) - f(x) < \frac{1}{2^n}.$$

Отже, f_n рівномірно збігається до f в $\mathbb{L}$.

Наслідок 2. *Нехай X – сильно нульвимірний простір і функція $f : X \to \mathbb{L}$ така, що існує послідовність неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до f в $\mathbb{L}$. Тоді $f \in B_1(X, \mathbb{L})$.*

Доведення. Згідно з теоремою 3, для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує послідовність $(g_{nm})_{m=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_{nm} : X \to \mathbb{L}$, яка рівномірно збігається до функції f_n в $\mathbb{L}$. Для $n \in \mathbb{N}$ покладемо $\varphi_n(x) = g_{nn}(x)$ для кожного $x \in X$. Тоді функції $\varphi_n : X \to \mathbb{L}$ неперервні і $\varphi_n \to f$ поточково в $\mathbb{L}$.

Наслідок 3. *Нехай X – сильно нульвимірний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ напівнеперервна зверху. Тоді $f \in B_1(X, \mathbb{L})$.*

Доведення. Згідно з [4, с. 389] існує монотонно спадна послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до функції f в $\mathbb{R}$. Оскільки послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ спадна, то вона поточково збігається до функції f і в $\mathbb{L}$. Тоді з наслідку 6 випливає, що $f \in B_1(X, \mathbb{L})$.

Систему підмножин $\mathcal{A}$ простору X ми називаємо сильно дискретною, якщо існує дискретна сім'я $(G_A : A \in \mathcal{A})$ відкритих підмножин простору X, така, що $\overline{A} \subseteq G_A$ для всіх $A \in \mathcal{A}$.

Твердження 1. *Нехай X – сильно нульвимірний простір і функція $f : X \to \mathbb{R}$ така, що множина $D(f)$ її точок розриву замкнена і сильно дискретна. Тоді $f \in B_1(X, \mathbb{L})$.*

Доведення. Нехай

$$D(f) = \{x_s : s \in S\}.$$

Оскільки простір X сильно нульвимірний, то для кожного $s \in S$ існує спадна послідовність $(U_{n,s})_{n=1}^{\infty}$ відкрито-замкнених в X множин, така, що

$$\{x_s\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{n,s}.$$

Оскільки множина $D(f)$ сильно дискретна, можна вважати, що сім'я $\{U_{1,s} : s \in S\}$ також дискретна в X.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin \bigcup\limits_{s \in S} U_{n,s}, \\ f(x_s), & x \in U_{n,s} \text{ для деякого } s \in S. \end{cases}$$

Оскільки множини $\bigcup\limits_{s \in S} U_{n,s}$ відкрито-замкнені в X для кожного n, то функції $f_n : X \to \mathbb{R}$ неперервні.

Нехай $x \in X \setminus D(f)$. Якщо $x \notin \bigcup\limits_{s \in S} U_{1,s}$, то $x \notin \bigcup\limits_{s \in S} U_{n,s}$ для всіх $n \ge 1$. Тоді $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \ge 1$.

Нехай тепер $x \in \bigcup\limits_{s \in S} U_{1,s}$. Тоді існує таке $s_o \in S$, що $x \in U_{1,s_o}$. Оскільки послідовність $(U_{n,s_o})_{n=1}^{\infty}$ спадна, то існує таке $n_o \in \mathbb{N}$, що $x \notin U_{n,s_o}$ для всіх $n \ge n_o$. Тоді $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \ge n_o$. Таким чином, $f_n(x) \to f(x)$ поточково в $\mathbb{L}$.

Згідно з наслідком 2, функція $f : X \to \mathbb{L}$ належить до першого класу Бера.

Наведемо тепер приклад функції $f : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, яка належить до першого класу Лебеґа, але не належить до першого класу Бера.

Приклад 2. Нехай $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$. Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{n}, & x = r_n, \\ x, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тоді $f \in H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$, але $f \notin B_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$.

Спочатку встановимо, що $f \in H_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$. Достатньо довести, що прообраз довільного проміжку $[a, b) \subseteq \mathbb{L}$ є множиною типу F_σ в $\mathbb{L}$. Візьмемо довільний проміжок $[a, b)$ і позначимо $E = f^{-1}([a, b))$.

Нехай

$$A = (a, b) \setminus E \quad \text{і} \quad B = E \setminus (a, b).$$

Тоді $E = ((a, b) \setminus A) \sqcup B$. Легко бачити, що $B \subseteq \mathbb{Q} \cup \{a\}$. Тому множина B є типу F_σ в $\mathbb{L}$. Зауважимо, що $A \subseteq \mathbb{Q}$. Покладемо

$$N = \{n \in \mathbb{N} : r_n \in A\} = \{n_1, n_2 \dots\},$$

причому послідовність $(n_i)_{i=1}^\infty$ зростаюча. Нехай $r_{n_i} \in A$. Тоді $a < r_{n_i} < b$ і $f(r_{n_i}) \notin [a, b)$. Звідси випливає, що $a < r_{n_i} < a + \frac{1}{n_i}$. Отже,

$$r_{n_i} \to a + 0$$

при $i \to \infty$. Таким чином, множина $(a, b) \setminus A$ відкрита в $\mathbb{L}$, а значить, є типу F_σ. Тоді і множина E є типу F_σ в $\mathbb{L}$.

Доведемо тепер, що функція $f : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ не належить до першого класу Бера. Припустимо, що $f \in B_1(\mathbb{L}, \mathbb{L})$. Тоді існує послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ неперервних функцій $f_n : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$, така, що $f_n(x) \to f(x)$ поточково в $\mathbb{L}$. Для кожного n покладемо

$$A_n = \{x \in \mathbb{L} : \forall k \geq n \;\; f_k(x) \geq f(x)\}.$$

Легко бачити, що $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{L}$. Оскільки множина ірраціональних чисел $\mathbb{I} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap \mathbb{I})$ є множиною другої категорії в $\mathbb{L}$, то існує такий номер n, що множина $A_n \cap \mathbb{I}$ десь щільна в $\mathbb{I}$, а значить і в $\mathbb{L}$. Тоді існує інтервал $[a, b)$, такий, що

$$[a, b) \subseteq \overline{A_n \cap \mathbb{I}} = \overline{B}.$$

Нехай $x \in B$. Тоді $f_k(x) \geq f(x) = x$ для всіх $k \geq n$. Зауважимо, що множина

$$F = \{x \in \mathbb{L} : f_k(x) \geq x\}$$

замкнена в $\mathbb{L}$.

Оскільки $B = A_n \cap \mathbb{I} \subseteq F$, то $\overline{B} \subseteq F$. Отже, $[a, b) \subseteq F$. Оскільки $f_k(x) \geq x$ на $[a, b)$ для всіх $k \geq n$, то

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x) \geq x$$

на $[a, b)$, що приводить до суперечності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Куратовский К. Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
3. Карлова О.О. Відображення першого класу Бера, визначені на слабко ультранормальних просторах // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, 11-14 жовтня 2006 року. Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 58.
4. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.