УДК 519.1

©2007 р. Р.А.Заторський

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

ПАРАФУНКЦІЇ І КОМБІНАТОРНІ ТОТОЖНОСТІ

Розглядаються застосування парафункцій трикутних матриць до генерування та класифікації комбінаторних тотожностей.

The applications of the parafunctions of the triangle matrix to generation and classification of combinatorial identities are considered.

1. Комбінаторні тотожності з'являються в багатьох галузях математики, тому їм присвячено чимало праць видатних математиків минулого та сучасності. Значну частину комбінаторних тотожностей проаналізовано в монографії Ріордана [1]. В ній автор із сумом сповіщає "Стара мрія навести порядок в цьому хаосі (комбінаторних тотожностей), здається, приречена на невдачу."Після появи цієї монографії з'явилося чимало нових комбінаторних тотожностей, проте методи їх уніфікації і надалі відсутні.

В цій статті проілюстровано застосування апарату парафункцій трикутних матриць (див. [2], [3]) до генерування нових комбінаторних тотожностей. Метод дозволяє здійснити деякі підходи до систематизації комбінаторних тотожностей.

Головним інструментом, при цьому, виявляється наступна

Теорема 1. *Нехай*

$$ddet\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = D(n),$$

$$pper\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} = P(n),$$

тоді справедливі рекурентні співвідношення

$$D(n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{n+s} D(s-1) \prod_{k=s}^{n} a_{nk}, \qquad (1)$$

$$P(n) = \sum_{s=1}^{n} P(s-1) \prod_{k=s}^{n} a_{nk}, \qquad (2)$$

тут $ddet\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *і* $pper\,(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ *— відповідно парадетермінант та параперманент трикутної матриці [2], причому ми вважаємо, що*

$$D(0) = P(0) = 1.$$

Доведення цієї теореми одразу випливає із розкладу парадетермінанта та параперманента трикутної матриці $(a_{ij})_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$ за елементами останнього рядка.

Таким чином, кожній, заданій аналітично, трикутній матриці n–го порядку, значення парадетермінанта та параперманента яких відомі, відповідає пара комбінаторних тотожностей (1), (2). При цьому окремим класам трикутних матриць відповідають певні класи комбінаторних тотожностей і з'являється можливість, принаймні частково їх систематизувати.

2. Наведемо теорему, яка дає зручний і ефективний алгоритм обчислення парафункцій трикутних матриць. З її допомогою порядок парафункції трикутної матриці понижується на одиницю. Ідея доведення цієї теореми дещо нагадує метод Гауса для обчислення детермінантів квадратних матриць.

Теорема 2. *Для довільної трикутної матриці справедливі рівності:*

$$\left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= -\left\langle \begin{matrix} (a_{21}-a_{11})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{31}-a_{11})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ (a_{n1}-a_{11})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_{n-1}, \qquad (3)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{21}+a_{11})\cdot a_{22} & & & \\ (a_{31}+a_{11})\cdot a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \dots & \ddots & \\ (a_{n1}+a_{11})\cdot a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n-1}. \qquad (4)$$

Розглянемо теорему 2 більш детально. Згідно з рівностями (3), (4) парафункції трикутної матриці $n-$го порядку замінюється парфункцією трикутної матриці $(n-1)-$го порядку, елементи якої знаходяться в два етапи:

1. Знаходимо значення виразу: $(a_{i1}-a_{11})\cdot a_{i2},\ i=2,3,\dots,n.$ — у випадку обчислення парадетермінанта і виразу $(a_{i1}+a_{11})\cdot a_{i2},\ i=2,3,\dots,n$ — у випадку обчислення значення параперманента.

Виносимо найбільший спільний дільник (якщо такий існує) за знак парадетермінанта.

Замінюємо в отриманому виразі i на $i+1$. Отриманий вираз дорівнює значенню елементів $a_{i1}^{(1)},\ i=1,2,\dots,n-1$ першого стовпчика матриці $(n-1)-$го порядку.

2. Знаходимо решту елементів нової матриці. З цією метою замінюємо елементи $a_{ij},\ i,j=3,4,\dots,n$ на елементи $a_{ij}^{(1)}=a_{i+1,j+1},\ i,j=2,3,\dots,n-1$.

Приклад 1. Знайдемо значення парадетермінанта

$$ddet\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right),$$

користуючись рівністю (3).

Перша ітерація.

1. Знаходимо значення виразу

$$(a_{i1}-a_{11})\cdot a_{i2}=\left(\frac{ai+b+c}{i}-(a+b+c)\right)\times$$

$$\times\frac{ai+2b+c}{i-1}=-(b+c)\cdot\frac{ai+2b+c}{i},$$

тут $i=2,3,\dots,n$.

Виносимо спільний множник $-(b+c)$, за знак парадетермінанта.

Елементи першого стовпчика нової матриці $(n-1)-$го порядку дорівнюють

$$a_{i1}^{(1)}=\frac{ai+a+2b+c}{i+1},\ i=1,2,...,n-1.$$

2.

$$a_{ij}^{(1)}=a_{i+1,j+1}=\frac{a(i+1)+b(j+1)+c}{(i+1)-(j+1)+1}=$$

$$=\frac{ai+bj+a+b+c}{i-j+1},$$

де $i,j=2,3,\dots,n-1$.

Друга ітерація.

1. Знаходимо значення виразу:

$$(a_{i1}^{(1)}-a_{11}^{(1)})\cdot a_{i2}^{(1)}=\left(\frac{ai+a+2b+c}{i+1}-\right.$$

$$\left.-\frac{2a+2b+c}{2}\right)\cdot\frac{ai+a+3b+c}{i-1}=$$

$$-\frac{2b+c}{2}\cdot\frac{ai+a+3b+c}{i+1},\ i=2,3,\dots,n-1.$$

Виносимо спільний множник $-\frac{2b+c}{2}$.

Елементи першого стовпчика матриці $(n-2)-$го порядку дорівнюють

$$a_{i1}^{(2)}=\frac{ai+2a+3b+c}{i+2},\ i=1,2,...,n-1.$$

2.

$$a_{ij}^{(2)}=\frac{ai+bj+2a+2b+c}{i-j+1},\ i=2,3,\dots,n-2.$$

Продовжуючи процес обчислень, прийдемо до висновку, що парадетермінант заданої трикутної матриці дорівнює

$$ddet\left(\frac{ai+bj+c}{i-j+1}\right)=\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c). \qquad (5)$$

Позначимо парадетермінант (5) через $D(n)$ і розкладемо його за елементами останнього рядка

$$D(n)=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}D(s-1)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-(k-1)},$$

тут ми вважаємо, що $D(0)=1$ і $\prod_{i=p}^{q}(\cdot)=1$ при $g<p$. Тому остання тотожність, з врахуванням цих зауважень, матиме вигляд

$$D(n)=(-1)^{n-1}\prod_{k=1}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}+\sum_{s=2}^{n}(-1)^{n-s}\times$$

$$\times D(s-1)\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}.$$

Позаяк

$$D(s-1)=\frac{(s-1)a+(s-1)b+c}{(s-1)!}\prod_{i=1}^{s-2}(ib+c),$$

то, згідно з рівністю (1), ми отримаємо наступну комбінаторну тотожність

$$\frac{na+nb+c}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(ib+c)=(-1)^{n-1}\times \tag{6}$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}+$$

$$+\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{(s-1)a+(s-1)b+c}{(s-1)!}\prod_{i=1}^{s-2}(ib+c)\times$$

$$\times\prod_{k=s}^{n}\frac{na+kb+c}{n-k+1}.$$

При $a=1$, $b=-1$, $c=m$, і $a=-1$, $b=1$, $c=m$, рівність (5) матиме вигляд

$$ddet\left(\frac{1}{i-j+1}\cdot\frac{m^{\overline{i-j+1}}}{m^{\overline{i-j}}}\right)_{1\le j\le i\le n}=$$

$$=ddet\left(\frac{i-j+m}{i-j+1}\right)_{1\le j\le i\le n}=\frac{m^{\underline{n}}}{n!}, \tag{7}$$

$$ddet\left(\frac{1}{i-j+1}\cdot\frac{m^{\underline{i-j+1}}}{m^{\underline{i-j}}}\right)_{1\le j\le i\le n}=$$

$$=ddet\left(\frac{-i+j+m}{i-j+1}\right)_{1\le j\le i\le n}=\frac{m^{\overline{n}}}{n!}. \tag{8}$$

а тотожність (6) — відповідно вигляд

$$\frac{m^{\underline{n}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{m^{\underline{s-1}}}{(s-1)!}\cdot\frac{m^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}, \tag{9}$$

$$\frac{m^{\overline{n}}}{n!}=\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{m^{\overline{s-1}}}{(s-1)!}\cdot\frac{m^{\underline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}. \tag{10}$$

При $a=0$, $b=1$, $c=0$ рівності (5), (6) отримають відповідно вигляд

$$ddet\left(\frac{j}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=1, \tag{11}$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{s^{\overline{n-s+1}}}{(n-s+1)!}=1. \tag{12}$$

При $a=0$, $b=0$, $c=1$, матимемо

$$ddet\left(\frac{1}{i-j+1}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\frac{1}{n!}, \tag{13}$$

$$\sum_{s=1}^{n}(-1)^{n+s}\frac{1}{(s-1)!(n-s+1)!}=\frac{1}{n!}. \tag{14}$$

При $a=-1$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$, дістанемо відповідні рівності

$$ddet\left(\frac{2j-2i+1}{2i-2j+2}\right)_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}=\frac{(2n-1)!!}{2n!2^{n-1}}, \tag{15}$$

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{(2s-3)!!(2(n-s)-1)!!}{(s-1)!(n-s+1)!}=\frac{(2n-1)!!}{n!}. \tag{16}$$

В останніх двох рівностях ми вважаємо, що $(-1)!!=1$.

Таким чином парадетермінанти (7), (8), (11), (13), (15), генерують відповідно комбінаторні тотожності (9), (10), (12), (14), (16), причому ці комбінаторні тотожності належать до одного класу.

3. Проілюструємо ще один спосіб генерування комбінаторних тотожностей, який базується на наступній теоремі.

Теорема 3. *Якщо* $X(z)=(A(z))^p$, *тут*

$$A(z)=1+\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i,$$

а p – деяке дійсне число, то

$$x_n=(-1)^n\left\langle\frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j}\times\right. \tag{17}$$

$$\times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \Big\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} =$$

$$= \Bigg[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot p-(j-1)}{(i-j)\cdot p-j} \times$$

$$\times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \Bigg]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n}$$

Доведення. Рівність парадетермінанта і параперманента в рівностях (17), як і в попередньому прикладі, доводиться винесенням із кожного стовпчика парадетермінанта за його межі спільного множника, що дорівнює (-1) і застосуванням теореми про зв'язок параперманента і парадетермінанта [2]. Розкладемо параперманент із рівності (17) за елементами останнього рядка. При цьому отримаємо відому рекурентну рівність для знаходження коефіцієнтів ряду, що є степенем формального степеневого ряду з ненульовим вільним членом (див. [5, стор. 580]):

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i\cdot(p+1)-n}{n} \cdot a_i x_{n-i},\ x_0 = 1,$$

$$n = 1, 2, \ldots .$$

Твердження 1. *Справедлива тотожність*

$$(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots)^n = 1+$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i} \frac{n^{\underline{\lambda_1+\ldots+\lambda_i}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} \cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_i^{\lambda_i}\Bigg)\times \tag{18}$$

$$\times z^i,$$

тут n – натуральне число.

Доведення. Для кращої очності доведення, розглянемо n послідовностей коефіцієнтів формального степеневого ряду $A(z)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1i} & \ldots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2i} & \ldots \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3i} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \ldots & a_{n-1,i} & \ldots \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{ni} & \ldots
\end{array} \tag{19}$$

в яких перший індекс умовний і позначає номер одного із n ідентичних рядів $A(z)$, а другий індекс позначає степінь z, коефіцієнтом якого він є.

Щоб знайти коефіцієнт x_i степеня z^i, необхідно знайти суму всіх добутків

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \tag{20}$$

коефіцієнтів таблиці (19), для яких сума елементів мультимножини

$$\{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \tag{21}$$

дорівнює i, тобто виконується рівність

$$j_1 + j_2 + \ldots + j_n = i. \tag{22}$$

Якщо мультимножину (21) записати в канонічному вигляді

$$\{0^{\lambda_0}, 1^{\lambda_1}, 2^{\lambda_2}, \ldots, i^{\lambda_i}\}, \tag{23}$$

то елементи її первинної специфікації задовольняють рівняння

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i. \tag{24}$$

Зафіксуємо мультимножину (23) і знайдемо число всіх мультимножин (21) з канонічним виглядом (23). Оскільки число ненульових елементів мультимножини (21) дорівнює $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i$, то існує

$$\binom{n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i} = \frac{n^{\underline{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)!}$$

таких мультимножин. Якщо в останніх враховувати ще й порядок елементів, то всього добутків виду (20) з умовою (22) є

$$\frac{n^{\underline{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)!} \cdot \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i)!}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} =$$

$$= \frac{n^{\underline{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}.$$

Отже, існує

$$\frac{n^{\underline{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!}$$

добутків $a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_i^{\lambda_i}$ і коефіцієнт x_i, з врахуванням умови (24), дорівнює

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i} \frac{n^{\underline{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} \cdot a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot a_i^{\lambda_i}.$$

Твердження 2. *Справедливі комбінаторні тотожності:*

$$(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = \tag{25}$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} \frac{n^{\underline{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

тут n – натуральне число.

Доведення безпосередньо випливає із тотожностей (17), (18).

Примітка 1. Цікавим є, властивий методу генератрис, факт, що тотожність (25) залишається справедливою і при $n=-m$, $n=\frac{1}{m}$, $n=-\frac{1}{m}$. При цьому матимемо відповідні комбінаторні тотожності:

$$(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)\cdot m+(j-1)}{(i-j)\cdot m+j} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot m+(j-1)}{(i-j)\cdot m+j} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \frac{m^{\overline{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!}\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

$$(-1)^k \left\langle \frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{-(i-j)+j\cdot m} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{-(i-j)+j\cdot m} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \times$$

$$\times \frac{(m-1)(2m-1)\cdot\ldots\cdot((s-1)m-1)}{m^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \times a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

$$(-1)^k \left\langle \frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{(i-j)+j\cdot m} \times \frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right\rangle_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} = \left[(-1)^{\delta_{ij}} \times \frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot m}{(i-j)+j\cdot m}\cdot\frac{a_{i-j+1}}{a_{i-j}} \right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \times \frac{(m+1)(2m+1)\cdot\ldots\cdot((s-1)m+1)}{m^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} \times a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_k^{\lambda_k},$$

в яких $s=\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k$.

Твердження 3. *Справедлива тотожність*

$$(1+z+z^2+\ldots)^n = 1+\frac{n^{\overline{1}}}{1!}z+\frac{n^{\overline{2}}}{2!}z^2+\ldots+\frac{n^{\overline{i}}}{i!}z^i+\ldots, \tag{26}$$

тут n – натуральне число.

Доведення. При $n=1$ ця рівність очевидна. Нехай вона справедлива при $n=k$. Доведемо виконливість індукційного кроку.

$$(1+z+z^2+\ldots)\cdot\left(1+\frac{k^{\overline{1}}}{1!}z+\frac{k^{\overline{2}}}{2!}z^2+\ldots\right) =$$

$$1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{k^{\overline{1}}}{1!}+\frac{k^{\overline{2}}}{2!}+\ldots+\frac{k^{\overline{i}}}{i!}\right)\cdot z^i.$$

Але тотожність

$$\sum_{j=0}^{i} \frac{k^{\overline{j}}}{j!} = \frac{(k+1)^{\overline{i}}}{i!},$$

як відомо, справедлива.

Твердження 4. *Справедливі наступні тотожності*

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n-(j-1)}{(i-j)\cdot n-j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} \frac{n^{\underline{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}. \qquad (27)$$

Доведення. Це твердження одразу випливає із тотожності (25) при $a_1 = \ldots = a_k = 1$ і тотожності (26).

Примітка 2. Аналогічно до примітки 1, справедливі тотожності

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)\cdot n+(j-1)}{(i-j)\cdot n+j}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \frac{n^{\overline{\lambda_1+\ldots+\lambda_k}}}{\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} = (-1)^k \frac{n^{\underline{k}}}{k!},$$

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{-(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{-(i-j)+j\cdot n}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \times$$

$$\times \frac{(n-1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot((s-1)n-1)}{n^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(n+1)(2n+1)\cdot\ldots\cdot((k-1)n+1)}{n^k k!},$$

$$\left[(-1)^{\delta_{ij}} \frac{(i-j+1)+(j-1)\cdot n}{(i-j)+j\cdot n}\right]_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant k} =$$

$$= \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+k\lambda_k=k} (-1)^s \times$$

$$\times \frac{(n+1)(2n+1)\cdot\ldots\cdot((s-1)n+1)}{n^s\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(n-1)(2n-1)\cdot\ldots\cdot((k-1)n-1)}{n^k k!},$$

в яких $s = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества: пер. с англ. М.: Наука, 1982. – 255 с.
2. *Заторський Р.А.* Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. — 2002. — Т.17, №1. — С. 3 – 17.
3. *Заторський Р.А.* Паравизначники та параперманенти трикутних матриць// Доповіді НАН України. – 2002.– №8.– с. 21–25.
4. *Zatorsky R.* Paradeterminants and formal operations on series // 4th International Algebraic Conference in Ukraine, Lviv, 2003. – P. 242.
5. *Кнут Д.Е.* Искусство программирования для ЭВМ. Т.2. Получисленные алгоритмы. Перев. с англ. — М.: Мир, 1977. с.798