УДК 517.98

©2007 р. В.В.Городецький[1], Я.М.Дрінь[2]

[1]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
[2]Чернівецький торговельно-економічний інститут КНТЕУ

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

У просторі узагальнених функцій типу розподілів встановлюється коректна розв'язність двоточкової задачі для параболічного псевдодиференціального рівняння.

The correct solvability of two-pointed problem for the parabolic pseudodifferential equation established in the space of generalized functions of distribution types.

Теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), яка в сучасній формі була створена в середині сімдесятих років XX століття, є предметом багатьох досліджень. Їх число значно збільшилося після того, як виявилося, що ПДО тісно пов'язані з важливими задачами аналізу і сучасної математичної фізики. Так, наприклад, ПДО особливо важливі в теорії еліптичних крайових задач (при дослідженні індексу задачі, при зведенні задачі на межу області і т.п.), в мікролокальному аналізі. На даний час досить повно розвинена теорія ПДО і псевдодиференціальних рівнянь (ПДР), яка викладена в ряді всесвітньо відомих монографій (див., наприклад, [1, 2]).

Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія ПДР з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Так, побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами і, зокрема, ПДО присвячена значна література, в якій використовуються або стохастичні диференціальні рівняння, або теорія півгруп операторів.

Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язанна також із сучасною теорією фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається (див. [3 – 5]). У книзі [3] охоплені майже всі галузі фізики, де зустрічаються фрактальні структури – від квантової теорії поля і статистичної механіки до теорії турбулентності та хаосу в динамічних системах. Задача Коші для еволюційних рівнянь дробового порядку, якими описується дифузія в фрактальному середовищі, вивчалася А.Н.Кочубеєм у праці [6] (див. також цитовані там праці Р.Р.Нігматуліна, М.М.Джрбашяна та А.Б.Нерсесяна).

Дослідження лінійних параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованим за однорідним символом, не залежним від просторових змінних, було розпочате С.Д.Ейдельманом та Я.М.Дрінем в [7]. Для такого рівняння фундаментальний розв'язок задачі Коші знаходиться за допомогою перетворення Фур'є. Маючи зображення розв'язку задачі Коші у вигляді інтеграла Пуассона, в [7] на псевдодиференціальний випадок поширюється ряд теорем про стабілізацію розв'язків задачі Коші (зокрема, знайдено необхідні й достатні умови поточкової та рівномірної стабілізації). М.В.Федорюком [8] знайдена точна асимптотика фундаментального розв'язку при $|x| \to \infty$, яка виявилася вже не експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь, а степеневою. Для рівнянь більш загального вигляду Я.М.Дрінь [9] одержав шаудерові оцінки та дослідив коректність задачі Коші у класах гельдерових функцій. В.В.Городецьким та В.А.Літовченком [10] встановлено коректну розв'язність задачі Коші для ППДР з початковими умовами з просторів узагальнених функцій скінченного або нескінченного порядків.

Для побудови фундаментального розв'язку (ФР) задачі Коші для ППДР із змінним символом природно використати класичний метод Леві. Перші результати в цьому напрямку одержані в [10], де побудовано параметрикс – ФР задачі Коші для рівняння із "замороженими" символами – і доведена розв'язність відповідного інтегрального рівняння. Важливу роль у подальшому розвитку цієї теорії відіграли праці А.Н.Кочубея [6, 11, 12], в яких він уперше звернув увагу на те, що ПДО з негладкими символами можуть трактуватися як гіперсингулярні інтегральні оператори (ГСІО). Це дало можливість при дослідженні задачі Коші для таких рівнянь використати добре розвинену теорію ГСІО [13]. На цьому шляху А.Н.Кочубею вдалося побудувати і вивчити ФР задачі Коші, довести теореми про розв'язність задачі Коші в класах функцій з деяким степеневим зростанням при $|x| \to \infty$, вказати на зв'язки одержаних результатів з теорією випадкових процесів. У той же час слід зазначити, що теорія псевдодиференціальних крайових задач із негладкими символами майже не розвинена. У цьому напрямку відзначимо працю [14], в якій знайдено формулу та оцінки ядра Пуассона однієї крайової задачі в півпросторі по змінним $x_1, \dots, x_n$, в рівняння і крайову умову якої входять оператор диференціювання по нормальній змінній x_n та ПДО по дотичних змінних $x_1, \dots, x_{n-1}$. У даній роботі досліджується задача Діріхле для ПДР з ПДО, побудованим за негладким однорідним символом, не залежним від просторових змінних, та крайовою умовою, яка визначається узагальненою функцією скінченного порядку.

1. Означення і топологічна структура простору Φ

Нехай γ – фіксоване число з множини $(1, +\infty) \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$, $\gamma_0 : n + [\gamma]$, $M(x) = 1 + \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\Phi := \Bigg\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \;\Bigg|\; \forall p \in \mathbb{Z}_+$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \Big\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| < \infty \Big\} \Bigg\}$$

(тут $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – мультиіндекс). Введемо в Φ зліченну систему норм за формулами

$$\|\varphi\|_p := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(x)^{\gamma_0 + k} \sum_{|\alpha| = k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right\},$$

$$\varphi \in \Phi, p \in \mathbb{Z}_+.$$

Очевидно, що

$$\|\varphi\|_0 \le \|\varphi\|_1 \le \|\varphi\|_2 \le \dots, \quad \varphi \in \Phi, \qquad (1)$$

тобто ці норми є попарно зрівняними.

Збіжність в просторі Φ визначається так: послідовність функцій $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ до функції $\varphi \in \Phi$ при $\nu \to \infty$, якщо

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ : \; \|\varphi_\nu - \varphi\|_p \to 0, \quad \nu \to \infty.$$

Зазначимо, що $D(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset \Phi$, причому ці вкладення є неперервними і щільними. Позначимо через Φ_p поповнення Φ за p-ою нормою. Φ_p – банахів простір, при цьому правильними є вкладення $\Phi_0 \supset \Phi_1 \supset \dots \supset \Phi_p \supset \dots$. Кожне вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервне (внаслідок (1)) і щільне (бо щільним є вкладення $D(\mathbb{R}^n)$ у кожний простір Φ_p, $p \in \mathbb{Z}_+$). В [15] доведено, що Φ – повний досконалий зліченно нормований простір, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є компактним.

Зазначимо, що збіжність послідовності $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Phi$ у просторі Φ до функції $\varphi \in \Phi$ можна охарактеризувати ще й так [15] : $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset \Phi$ збігається за топологією простору Φ до $\varphi \in \Phi$ тоді і тільки тоді, коли вона:

1) обмежена в Φ, тобто

$$\forall p \in \mathbb{Z}_+ \; \exists c = c(p) > 0 \; \forall \nu \ge 1 : \; \|\varphi_\nu\|_p \le c;$$

2) правильно збігається в Φ, а саме, для довільного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ послідовність $\{D_x^\alpha(\varphi_\nu - \varphi), \nu \geq 1\}$ збігається до нуля рівномірно на кожному компакті $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^n$.

Отже, топологічна структура простору Φ така: Φ – повний досконалий зліченно нормований простір з топологією проективної границі банахових просторів Φ_p: $\Phi = \lim\limits_{p\to\infty} \mathrm{pr}\,\Phi_p$, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$ неперервні, щільні і компактні. Послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \geq 1\} \subset \Phi$ збігається в Φ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умови 1), 2).

Простіші операції у просторі Φ

а) У просторі Φ визначена і неперервна операція зсуву аргументу

$$T_\xi : \varphi(x) \to \varphi(x+\xi), \quad \varphi \in \Phi, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

б) У просторі Φ визначена і неперервна операція диференціювання

$$D_x^\beta : \varphi \to D_x^\beta \varphi, \quad \varphi \in \Phi, \beta \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Оскільки Φ – досконалий простір, то на підставі загальних результатів теорії досконалих просторів [16] стверджуємо, що операція зсуву аргументу у просторі Φ не лише неперервна, але й нескінченно диференційовна, тобто граничні співвідношення вигляду

$$\frac{\varphi(x_1,\ldots,x_j+\Delta x_j,\ldots,x_n) - \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\Delta x_j} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}, \Delta x_j \to 0,$$

виконуються у розумінні збіжності в просторі Φ.

в) Символом $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ позначатимемо простір $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ з топологією, яка визначається сім'єю півнорм

$$p_{\mathbb{K},\alpha}(\varphi) = \max_{x\in\mathbb{K}} |D_x^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n),$$

де $\mathbb{K}$ – компакт в $\mathbb{R}^n$, а $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ – довільний мультиіндекс. Відомо [17], що $\mathcal{E}$ – повний зліченно нормований простір; при цьому Φ лежить щільно в $\mathcal{E}$, бо $D \equiv D(\mathbb{R}^n)$ лежить щільно в Φ та $\mathcal{E}$. Таким чином, правильними є неперервні і щільні вкладення: $D \subset S \subset \Phi \subset \mathcal{E}$, $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$.

Нехай функція $\psi \in \mathcal{E}$ задовольняє умову

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \ \exists c = c(\alpha) > 0 :$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \{M(x)^{-|\alpha|} \cdot |D_x^\alpha \psi(x)|\} \leq c_\alpha. \qquad (2)$$

Тоді (див. [15]) операція $\varphi \to \psi\varphi$, $\forall \varphi \in \Phi$, визначена і неперервна в Φ. Зазначимо також, що кожна функція $\psi \in \Phi$ задовольняє умову (2).

2. Простір узагальнених функцій Φ'

Символом Φ' позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на Φ зі слабкою збіжністю. Оскільки в основному просторі Φ введена топологія проективної границі банахових просторів Φ_p, причому вкладення $\Phi_{p+1} \subset \Phi_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні, щільні та компактні, то (див. [18])

$$\Phi' = (\lim_{p\to\infty} \mathrm{pr}\,\Phi_p)' = \lim_{p\to\infty} \mathrm{ind}\,\Phi'_p.$$

Отже, якщо $f \in \Phi'$, то $f \in \Phi'_p$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, тобто кожна узагальнена функція $f \in \Phi'$ має скінченний порядок. Іншими словами, f допускає продовження на Φ як лінійний неперервний функціонал із спряженого простору Φ'_p; при цьому правильною є нерівність

$$|<f,\varphi>| \leq c\|\varphi\|_p, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $c = \|f\|_p$ – норма функціоналу f у просторі Φ'_p. Зауважимо також, що $\Phi'_0 \subset \Phi'_1 \subset \cdots \subset \Phi'_p \subset \ldots$, причому кожне вкладення $\Phi'_p \subset \Phi'_{p+1}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, є неперервним і компактним. Звідси та зі слабкої повноти просторів Φ'_p, $p \in \mathbb{Z}_+$, дістаємо, що простір Φ' – повний.

Приклади узагальнених функцій з простору Φ'

1. Якщо φ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ – локально інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\exists c > 0 \ \exists s \in (0,\gamma) \ \forall x \in \mathbb{R}^n :$$

$$|f(x)| \leq c(1+\|x\|)^s, \qquad (3)$$

то вона визначає регулярний функціонал $F_f \in \Phi'$ за формулою

$$< F_f, \psi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\psi(x)dx, \quad \psi \in \Phi,$$

тобто простір Φ неперервно вкладається в Φ'. З леми дю Буа Раймона випливає, що кожна регулярна узагальнена функція з Φ' визначається однією (з точністю до значень на множині міри нуль) локально інтегровною в $\mathbb{R}^n$ функцією, яка задовольняє умову (3). Отже, між локально інтегровними на $\mathbb{R}^n$ функціями, які задовольняють умову (3), та регулярними узагальненими функціями з Φ' існує взаємно однозначна відповідність.

2. Якщо f – фінітна узагальнена функція з D', то вона єдиним способом продовжується на Φ як елемент Φ' за формулою

$$< f, \varphi >=< f, \eta\varphi >, \quad \varphi \in \Phi,$$

де $\eta \in D$, $\eta = 1$ в околі носія f; при цьому вказане продовження не залежить від функції η.

3. Якщо $f \in \Phi'$, то і кожна похідна $D_x^\alpha f \in \Phi'$; при цьому операція $f \to D_x^\alpha f$ лінійна і неперервна з Φ' у Φ'.

4. Якщо $f \in \Phi'$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, то $f(x+\xi) \in \Phi'$, причому операція $f(x) \to f(x+\xi)$ лінійна і неперервна з Φ' у Φ'.

5. Якщо $f \in \Phi'$, а функція $a \in \mathcal{E}$ задовольняє умову (2), то $af \in \Phi'$, а операція $f \to af$ є лінійною і неперервною з Φ' у Φ'.

В [15] наведено три достатні ознаки існування згортки в Φ'. Наведемо одну з них: якщо $f \in \Phi'$, $\varphi \in \Phi$, то згортка $f * \varphi$ існує і визначається за формулою

$$f * \varphi =< f, T_{-x}\check{\varphi}(\cdot) >, \check{\varphi}(\xi) = \varphi(-\xi), \varphi \in \Phi.$$

Зазначимо, що $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною функцією, яка володіє властивостями:

а) $\forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ $D_x^\beta(f * \varphi) = f * D_x^\beta \varphi$;

б) $\exists m \in \mathbb{Z}_+^n$: $|D_x^\beta(f * \varphi)| \leq c(1 + \|x\|)^{\gamma_0 + m + |\beta|} \|\varphi\|_{m+|\beta|}$.

Нехай $f \in \Phi'$. Якщо $f * \varphi \in \Phi'$ для довільної функції $\varphi \in \Phi$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$, $\nu \to \infty$, у просторі Φ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ у просторі Φ, то функціонал f називається **згортувачем** у просторі Φ.

У п. 1 було відзначено, що Φ – досконалий простір з диференційовною операцією зсуву аргументу. Тоді, як випливає із загальної теорії просторів, топологічно спряжених до досконалих (див. [16]), кожний фінітний функціонал (тобто функціонал, носій якого – обмежена множина) є згортувачем у просторі Φ. Відзначимо, що фінітні узагальнені функції утворюють широкий клас; зокрема, кожна обмежена замкнена множина в $\mathbb{R}^n$ є носієм узагальненої функції з Φ' [15]. Якщо $f \in \Phi'$ – згортувач у просторі Φ, то функціонал $D^\alpha f$ – також згортувач у просторі Φ.

3. Абстрактні функції. Нехай X – лінійний топологічний простір або об'єднання таких просторів, Ω – деяка множина чисел. Функцію $\Omega \ni \nu \to \varphi_\nu \in X$ називають абстрактною функцією параметра ν у просторі X (див. [16]).

Границею абстрактної функції при $\nu \to \nu_0$ називається такий елемент $\varphi_0 \in X$, що для довільної послідовності $\{\nu_n, n \geq 1\}$, $\nu_n \to \nu_0$, $n \to \infty$, виконується граничне співвідношення $\varphi_{\nu_n} \to \varphi_{\nu_0}$, $n \to \infty$, у розумінні збіжності в просторі X.

Абстрактна функція називається диференційовною у точці $\nu_0 \in \Omega$, якщо в просторі X існує границя

$$\left.\frac{d\varphi_\nu}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi_{\nu_0+h} - \varphi_{\nu_0}}{h}.$$

Відзначимо деякі властивості числових функцій вигляду $< f_\nu, \varphi_\nu >$, де $\varphi_\nu \in X$, $f_\nu \in X'$. За X можна, зокрема, взяти простір Φ. Правильними є наступні твердження [16]:

1) якщо $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi_{\nu_0}$ при $\nu \to \nu_0$ у просторі X, $f_\nu \longrightarrow f_0$ при $\nu \to \infty$ у просторі X' (тобто слабко), то $< f_\nu, \varphi_\nu > \longrightarrow < f_0, \varphi_0 >$ при $\nu \to \nu_0$; 2) якщо абстрактна функція φ_ν диференційовна в точці $\nu \in \Omega$, функціонал $f_\nu \in X'$ – слабко диференційовна функція

параметра ν, то $< f_\nu, \varphi_\nu >$ – диференційовна функція, причому

$$\frac{d}{d\nu} < f_\nu, \varphi_\nu >= \left\langle \frac{df_\nu}{d\nu}, \varphi_\nu \right\rangle + \left\langle f_\nu, \frac{d\varphi_\nu}{d\nu} \right\rangle.$$

4. Задача Діріхле. Нехай функція-символ A: $\mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ – однорідна порядку γ функція (тобто $A(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma A(\sigma)$, $\lambda > 0$, γ – фіксоване число з множини $(1,+\infty) \setminus \{2,3,4,\dots\}$), яка нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ і задовольняє умову:

$$\forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_+ \ \exists c_\alpha > 0 : \ |D^\alpha_\sigma A(\sigma)| \le c_\alpha \|\sigma\|^{\gamma-|\alpha|},$$
$$\sigma \ne 0.$$

Із результатів, наведених в [19] випливає, що псевдодиференціальний оператор $A_\gamma = F^{-1}[A(\sigma)F]$ визначений і є неперервним у просторі Φ.

Розглянемо еволюційне рівняння з оператором A_γ вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A_\gamma u = 0, (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi. \quad (4)$$

Символом $G(t,T,x,\mu)$ позначимо фундаментальний розв'язок задачі Діріхле (ФРЗД) для рівняння (4).

У праці [20] встановлено, що G має вигляд:

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)-A(\sigma)t} \times$$
$$\times (\mu - e^{-A(\sigma)T})^{-1} d\sigma = \sum_{k=0}^\infty \mu^{-k-1} G_0(t+kT,x),$$
$$\mu > 1, (t,x) \in \Pi,$$

де

$$G_0(t+kT,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)-A(\sigma)(t+kT)} d\sigma,$$
$$(t,x) \in \Pi,$$

$G_0(t,x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (4). Дослідимо деякі властивості функції G та згорток вигляду $f * G$, де $f \in \Phi'$. Передусім зазначимо, що з результатів, отриманих в [20] щодо оцінок похідних функції G випливає, що при кожному $t \in (0,T)$ функція G, як функція аргумента x, є елементом простору Φ.

Лема 1. *Функція $G(t,T,\cdot,\mu)$, $t \in (0,T)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, диференційовна по t.*

Доведення. Необхідно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(x) := \frac{G(t+\Delta t,T,x,\mu) - G(t,T,x,\mu)}{\Delta x}$$
$$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\partial}{\partial t} G(t,T,x,\mu)$$

виконується у розумінні збіжності у просторі Φ, тобто:

1) $\forall\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ $D^\alpha_x \Phi_{\Delta t} \rightrightarrows D^\alpha_x \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,T,\cdot,\mu)\right)$, $\Delta t \to 0$, у кожній кулі $\overline{K}(0,R)$;

2) $\forall p \in \mathbb{Z}_+$ $\exists c_p > 0$: $\|\Phi_{\Delta t}\|_p \le c_p$, де стала c_p не залежить від Δt.

Функція $G(t,T,x,\mu)$ диференційовна по t у звичайному розумінні, тому

$$\Phi_{\Delta t}(x) = \frac{\partial}{\partial t} G(t+\theta\Delta t,T,x,\mu), \quad 0 < \theta < 1.$$

Отже,

$$D^\alpha_x \Phi_{\Delta t}(x) = -(2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\sigma)^\alpha \times$$
$$\times A(\sigma) e^{i(x,\sigma)-A(\sigma)(t+\theta\Delta t)} (\mu - e^{-A(\sigma)T})^{-1} d\sigma.$$

Крім того,

$$D^\alpha_x \left(\frac{\partial}{\partial t} G(t,T,x,\mu)\right) = (-2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (i\sigma)^\alpha \times$$
$$\times A(\sigma) e^{i(x,\sigma)-A(\sigma)t} (\mu - e^{-A(\sigma)T})^{-2} d\sigma.$$

Тоді

$$|D^\alpha_x (\Phi_{\Delta t}(x) - \frac{\partial}{\partial t} G(t,T,x,\mu))| \le$$
$$\le (2\pi)^{-n} (\mu - 1)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \|\sigma\|^{|\alpha|} A(\sigma) e^{-tA(\sigma)} \times$$

$$\times|e^{-\theta\Delta t A(\sigma)}-1|d\sigma \le c|\Delta t|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\|\sigma\|^{|\alpha|}\times$$

$$\times A(\sigma)e^{-tA(\sigma)}d\sigma \le c_1\cdot|\Delta t|, \quad \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,$$

сталі c, c_1 не залежать від Δt (тут ми скористались тим, що $(\mu-\exp\{-A(\sigma)T\})^{-1}\le(\mu-1)^{-1}$, $\mu>1$). Звідси вже випливає, що

$$D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x)\to D_x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t}G(t,T,x,\mu)\right), \Delta t\to 0,$$

рівномірно відносно $x\in\overline{K}(0,R)$, що й потрібно було довести.

Доведемо тепер, що умова 2) також виконується. Використовуючи оцінки функції G по часовому параметру t та по змінній x (див. [20]) знайдемо, що для досить малих значень параметра Δt таких, що $t+\theta\Delta t\ge t/2$ справджуються нерівності

$$|D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x)|\le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{-k-1}}{((t+\theta\Delta t+kT)^{1/\gamma}+\|x\|)^{n+\gamma+|\alpha|}}\le$$

$$\le c\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^{-k-1}}{((t/2)^{1/\gamma}+\|x\|)^{n+\gamma+|\alpha|}}\le$$

$$\le\begin{cases} c_1\|x\|^{-(n+\gamma+|\alpha|)}, & \|x\|\ge 1,\\ c_2, & \|x\|<1,\end{cases}$$

де сталі c_1, c_2 залежать від μ, t, T і не залежать від Δt. Тоді для довільного фіксованого $p\in\mathbb{Z}_+$ маємо, що

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left\{\sum_{k=0}^{p}M(x)^{\gamma_0+k}\sum_{|\alpha|=k}|D_x^\alpha\Phi_{\Delta t}(x)|\right\}\le c_p,$$

де $c_p=c(p,T,\gamma,\mu)$. Отже,

$$\forall p\in\mathbb{Z}_+:\ \exists c_p>0:\ \|\Phi_{\Delta t}\|_p\le c_p,$$

причому c_p не залежить від Δt. Лема доведена.

Наслідок 1. *Функція $G(t,T,\cdot,\mu)$, $t\in(0,T)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, неперервна по t.*

Наслідок 2. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)=\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right), \quad \forall f\in\Phi'.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$(f*G)(t,x)=<f_\xi, T_{-x}\breve{G}(t,T,\xi,\mu)>,$$

$$\breve{G}(t,T,\xi,\mu)=G(t,T,-\xi,\mu).$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,\cdot)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}[(f*G)(t+\Delta t,\cdot)-$$

$$-(f*G)(t,\cdot)]=\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle f_\xi,\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\breve{G}(t+\Delta t,T,\cdot,\mu)-\right.$$

$$\left.-T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)]\right\rangle.$$

Внаслідок леми 1 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\breve{G}(t+\Delta t,T,\cdot,\mu)-T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)]\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow}\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору Φ. Отже, врахувавши властивість неперервності функціоналу f знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,\cdot)=\left\langle f_\xi,\lim_{\Delta t\to 0}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\Delta t}[T_{-x}\breve{G}(t+\Delta t,T,\cdot,\mu)-T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)]\right\rangle=$$

$$=\left\langle f_\xi,\frac{\partial}{\partial t}T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)\right\rangle=$$

$$=\left\langle f_\xi,T_{-x}\frac{\partial}{\partial t}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu)\right\rangle=\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,\cdot).$$

Лема доведена.

Символом Φ'_* позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору Φ', які є згортувачами у просторі Φ.

Наслідок 3. *Нехай $f \in \Phi'_*$, $\omega(t,x) = (f * G)(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$. Тоді $\omega(t,\cdot)$ – слабко диференційовна функція параметра $t \in (0,T)$ над простором Φ.*

Доведення. Оскільки f – згортувач у просторі Φ, то $\omega(t,\cdot) \in \Phi \subset \Phi'$ при кожному $t \in (0,T)$. Для доведення твердження досить показати, що

$$\left\langle \frac{\omega(t+\Delta t,\cdot) - \omega(t,\cdot)}{\Delta t}, g \right\rangle \longrightarrow \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial t}, g \right\rangle \quad (5)$$

при $\Delta t \to 0$ ($u(t,\cdot)$ при кожному $t \in (0,T)$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію). Отже,

$$\left| \left\langle \frac{\omega(t+\Delta t,\cdot) - \omega(t,\cdot)}{\Delta t}, g \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \omega}{\partial t}, g \right\rangle \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[f * \left(\frac{G(t+\Delta t, T, x, \mu) - G(t,T,x,\mu)}{\Delta t} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\partial G(t,T,x,\mu)}{\partial t} \right) \right] g(x) dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \left[f * \left(\frac{\Delta G(t,T,x,\mu)}{\Delta t} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\partial G(t,T,x,\mu)}{\partial t} \right) \right] \right| \cdot |g(x)| dx \leq$$

$$\leq c \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{ M(x)^{\gamma_0} |\Psi_\Delta(t,x)| \},$$

де $c = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| dx$,

$$\Psi_{\Delta t}(t,x) = f * \left(\frac{\Delta G(t,T,x,\mu)}{\Delta t} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial G(t,T,x,\mu)}{\partial t} \right).$$

Із леми 1 випливає, що

$$\frac{\Delta G(t,T,\cdot,\mu)}{\Delta t} \longrightarrow \frac{\partial G(t,T,\cdot,\mu)}{\partial t}$$

при $\Delta t \to 0$ за топологією простору Φ. Оскільки f – згортувач у просторі Φ, то $\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) \to 0$, $\Delta t \to 0$, у просторі Φ, тобто $\|\Psi_{\Delta t}(t,\cdot)\|_p \to 0$, $\Delta t \to 0$, для кожного $p \in \mathbb{Z}_+$. Зокрема, із співвідношення $\|\Psi_{\Delta t}(t,\cdot)\|_0 \to 0$, $\Delta t \to 0$, дістаємо, що

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^\varkappa} \{ \Psi_{\Delta t}(t,x) \} \to 0, \Delta t \to 0.$$

Цим доведено, що співвідношення (5) має місце.

Лема 2. *$G(t,T,\cdot,\mu) \to \dfrac{\delta}{\mu - 1}$ при $t \to +0$ у просторі Φ' (Δ – дельта-функція Дірака).*

Доведення. Урахувавши співвідношення [20]

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu) dx = \frac{1}{\mu - 1}, \quad (t,x) \in \Pi,$$

для довільної основної функції $\varphi \in \Phi$ маємо:

$$\left| < G(t,T,\cdot,\mu), \varphi > - \frac{1}{\mu - 1} < \delta, \varphi > \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu) \varphi(x) dx - \frac{\varphi(0)}{\mu - 1} \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu) \varphi(x) dx - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x,\mu) \varphi(0) dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,x,\mu)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| dx = J(t,T,\mu).$$

Оскільки $\varphi \in \Phi$, то застосувавши формулу про скінченні прирости знайдемо, що $|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq M \cdot \|x\|$, де $M = \sum\limits_{i=1}^{n} \max\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right|$.

Візьмемо тепер ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Тоді $|\varphi(x) - \varphi(0)| < M \cdot \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$, якщо тільки $\|x\| < t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Отже,

$$J(t,T,\mu) < M \cdot \varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])} \cdot \int\limits_{\|x\| < t_0^\alpha} |G(t,T,x,\mu)| dx +$$

$$+\int\limits_{\|x\|\geq t_0^\alpha}|G(t,T,x,\mu)|\cdot|\varphi(x)-\varphi(0)|dx\equiv$$

$$\equiv M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}J_1(t,T,\mu)+J_2(t,T,\mu),$$

$\alpha:=\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])$.

Оцінимо $J_1(t,T,\mu)$. Легко бачити, що

$$J_1(t,T,\mu)\leq\int\limits_{\mathbb{R}^n}|G(t,T,x,\mu)|dx.$$

Урахувавши зображення функції $G(t,T,x,\mu)$ знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}|G(t,T,x,\mu)|dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Big|\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}G_0(t+kT,x)\Big|dx\leq$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|G_0(t+kT,x)|dx, \qquad (6')$$

де

$$G_0(t+kT,x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{i(x,\sigma)-A(\sigma)(t+kT)}d\sigma,$$

$$(t,x)\in\Pi.$$

Здійснивши в $(6')$ заміну змінної $x_i=(t+kT)^{1/\gamma}y_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, знайдемо, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}_0}|G_0(t+kT,x)|dx=(t+kT)^{n/\gamma}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}|G_0(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma}y)|dy.$$

Внаслідок однорідності функції G маємо, що

$$G_0(t+kT,(t+kT)^{1/\gamma}y)=(2\pi)^{-n}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-(t+kT)A(\sigma)+i((t+kT)^{1/\gamma}y,\sigma)}d\sigma=$$

$$\stackrel{(t+kT)^{1/\gamma}\sigma=z}{=}(2\pi)^{-n}(t+kT)^{-n/\gamma}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-A(z)+i(y,z)}dz=(t+kT)^{-n/\gamma}G_0(y),$$

де

$$G_0(y)=F^{-1}[e^{-A(z)}](y),\quad G_0\in\Phi.$$

Отже,

$$J_1(t,T,\mu)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|G_0(y)|dy=b=\text{const},$$

$$\forall t\in(0,T).$$

Для того, щоб здійснити оцінку J_2 знову врахуємо властивість однорідності функції $A(\xi)$. Здійснивши заміну змінної інтегрування $\xi=t^{1/\gamma}\eta$, подамо $G(t,T,x,\mu)$ у вигляді

$$G(t,T,x,\mu)=(2\pi)^{-n}t^{n/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-A(\eta)t^2+i(x,t^{1/\gamma}\eta)}\times$$

$$\times(\mu-e^{-A(\eta)t\cdot T})^{-1}d\eta.$$

Скориставшись методикою проведення оцінок функції G [20] знайдемо, що для всіх $\|x\|\geq a>0$ правильними є нерівності:

$$|G(t,T,x,\mu)|\leq c_0t^{n/\gamma}\times$$

$$\times\frac{t^2+ktT}{((t^2+ktT)^{1/\gamma}+(t^{1/\gamma}\|x\|))^{n+[\gamma]}}\leq$$

$$\leq\frac{c\cdot t^{n/\gamma}\cdot t}{\|x\|^{n+[\gamma]}t^{(n+[\gamma])/\gamma}}=\frac{c\cdot t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x\|^{n+[\gamma]}},$$

$$\gamma\neq 2m,\gamma\neq 2m-1,m\in\mathbb{N} \qquad (6)$$

(стала c залежить від μ, T і не залежить від t). Далі, врахувавши обмеженість функції φ, а також оцінку (6), дістанемо, що

$$J_2(t,T,\mu)\leq c_1t^{\{\gamma\}/\gamma}\int\limits_{\|x\|\geq t_0^\alpha}\|x\|^{-(n+[\gamma])}dx=$$

$$c_2t^{\{\gamma\}/\gamma}\int\limits_{t_0^\alpha}^{+\infty}\rho^{-(1+[\gamma])}d\rho=c_2t^{\{\gamma\}/\gamma}t_0^{-\{\gamma\}/(2\gamma)}<$$

$$<c_2t^{\{\gamma\}/(2\gamma)}=c_2\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)},\forall t<t_0.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon\in(0,T)\ \exists t_0=\varepsilon>0\ \forall t:0<t<t_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(t,T,\mu) < bM\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])} + c_2\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}. \quad (7)$$

Аналогічна оцінка встановлюється для довільного $\varepsilon \geq T$. Це і означає, що

$$< G(t,T,\cdot,\mu),\varphi > \longrightarrow \frac{\varphi(0)}{\mu-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu-1} < \delta,\varphi >, t \to +0, \varphi \in \Phi,$$

тобто $G(t,T,\cdot,\mu) \longrightarrow \dfrac{\delta}{\mu-1}$ при $t \to +0$ у просторі Φ'.

Лема доведена.

Лема 3. *$G(t,T,\cdot,\mu) \longrightarrow \dfrac{\delta}{\mu-1}$ при $t \to T-0$ у просторі Φ'.*

Доведення. Доведення цього твердження здійснюється за схемою доведення леми 2. Якщо скористатися позначеннями, введеними при доведенні леми 2, то досить показати, що

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists t_0 = t_0(\varepsilon) > 0 \;\; \forall t : T - t_0 < t < T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow J(t,T,\mu) < \varepsilon.$$

Якщо $\varepsilon \in (0,T)$, то покладемо $t_0 = \varepsilon$ і скористаємося нерівністю $|\varphi(x)-\varphi(0)| < M\cdot\varepsilon^{\alpha}$, $\alpha = \{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])$, яка є правильною для x: $\|x\| < t_0^{\alpha}$. Далі встановлюємо оцінку для J_1 (див. лему 2)): $J_1(t,T,\mu) \leq b = \mathrm{const}$, яка справджується для всіх $t \in (0,T)$, зокрема і для $t \in (T-t_0,T)$.

Для того, щоб оцінити J_2, введемо позначення: $t-(T-t_0) := \tilde{t}$ (очевидно, що $0 < \tilde{t} < t_0 \Leftrightarrow T-t_0 < t < T$) і здійснимо заміну змінної інтегрування $\xi = \tilde{t}^{1/\gamma}\eta$. Як і при доведенні леми 2 для функції G отримаємо наступне зображення:

$$G(t,T,x,\mu) = (2\pi)^{-n}\,\tilde{t}^{n/\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-A(\eta)t\cdot\tilde{t}+i(x,\tilde{t}^{1/\gamma}\eta)}\times$$

$$\times(\mu - e^{-A(\eta)\tilde{t}\cdot T})^{-1}d\eta.$$

Звідси вже дістаємо оцінки для функції G:

$$|G(t,T,x,\mu)| \leq c_0\tilde{t}^{n/\gamma}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}\times$$

$$\times\frac{t\cdot\tilde{t}+k\tilde{t}\cdot T}{((t\cdot\tilde{t}+k\tilde{t}\cdot T)^{1/\gamma}+(\tilde{t}^{1/\gamma}\|x\|))^{n+[\gamma]}} \leq$$

$$\leq \frac{c\tilde{t}^{n/\gamma}\cdot\tilde{t}}{\|x\|^{n+[\gamma]}\cdot\tilde{t}^{(n+[\gamma])/\gamma}} = \frac{c\cdot\tilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x\|^{n+[\gamma]}},$$

$$\forall x : \|x\| \geq a > 0.$$

Тоді

$$J_2(t,T,\mu) \leq c\tilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}\int\limits_{\|x\|\geq t_0^{\alpha}}\|x\|^{-(n+[\gamma])}dx =$$

$$= c\tilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}\int\limits_{t_0^{\alpha}}^{+\infty}\rho^{-(1+[\gamma])}d\rho = c_1\tilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}t_0^{-\{\gamma\}/(2\gamma)} <$$

$$< c_1 t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma)} = c_1\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}, \forall\tilde{t} \in (0,t_0),$$

тобто для всіх $t \in (T-t_0,T)$. Отже,

$$\forall\varepsilon \in (0,T) \;\; \exists t_0 = \varepsilon > 0 \;\; \forall t : \;\; T - t_0 < t < T$$

для $J(t,T,\mu)$ справджується оцінка вигляду (7). Якщо $\varepsilon \geq T$, то за $t_0 = t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Лема доведена.

Наслідок 3. *Нехай*

$$\omega(t,x) = (f * G)(t,x), \quad f \in \Phi', (t,x) \in \Pi.$$

Тоді граничні співвідношення

$$\omega(t,\cdot) \longrightarrow \frac{f}{\mu-1}, t \to +0;$$

$$\omega(t,\cdot) \longrightarrow \frac{f}{\mu-1}, t \to T-0,$$

виконуються у просторі Φ'.

Доведення. Ці властивості є наслідками властивостей функції G (див. леми 2, 3) та властивості неперервності операції згортки у просторі Φ' (роль одиниці тут виконує δ-функція Дірака). Наприклад,

$$\omega(t,\cdot) = (f*G)(t,\cdot)\underset{t\to+0}{\longrightarrow}\left(f*\frac{\delta}{\mu-1}\right)(t,\cdot) =$$

$$= \frac{f}{\mu-1}$$

у просторі Φ'.

Про оператор, спряжений до псевдодиференціального оператора A_γ. Передусім зазначимо, що

$$\forall\psi\in\Phi\ \exists c_\varphi>0\ \forall x\in\mathbb{R}^n:\ \ |(A_\gamma\psi)(x)|\le c_\psi, \tag{8}$$

де c_ψ не залежить від x (ця властивість випливає з того, що $A_\gamma\psi\in\Phi$). Із лінійності і неперервності оператора A_γ випливає лінійність і неперервність спряженого оператора A^*_γ, який діє в просторі Φ' за формулою

$$< A^*_\gamma g,\psi>=< g, A_\gamma\psi>, g\in\Phi',\psi\in\Phi. \tag{9}$$

З'ясуємо, який вигляд має звуження оператора A^*_γ на простір $\Psi\subset\Phi'$, тобто в (9) вважаємо, що $\{g,\psi\}\subset\Phi$. На підставі нерівності (8) стверджуємо, що інтеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)(A_\gamma\psi)(x)dx$ є абсолютно збіжним для довільної функції $g\in\Phi$. Тому, внаслідок теореми Фубіні, правильними є перетворення:

$$< g, A_\gamma\psi>=\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)(A_\gamma\psi)(x)dx=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} A(\xi)F[\psi](\xi)e^{i(x,\xi)}d\xi\right)dx=$$

$$=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} A(\xi)g(x)e^{i(x,\xi)}F[\psi](\xi)dxd\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} A(\xi)F^{-1}[g](\xi)F[\psi](\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} A(\xi)F^{-1}[g](\xi)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)e^{-i(x,\xi)}dx\right)d\xi=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n} A(\xi)F^{-1}[g](\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n} F[A(\xi)F^{-1}[g]](x)\psi(x)dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(A^*_\gamma g)(x)\psi(x)dx=< A^*_\gamma g,\psi>, \{g,\psi\}\subset\Phi.$$

Отже,

$$\forall g\in\Phi:\ \ A^*_\gamma g=F[A(\xi)F^{-1}[g]].$$

Розглянемо тепер крайову задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t}+A_\gamma u=0,(t,x)\in\Pi,\gamma>1,\gamma\text{ – неціле}, \tag{10}$$

$$\mu u(t,\cdot)|_{t=0}-u(t,\cdot)|_{t=T}=\varphi,\mu>1,\varphi\in\Phi'_*. \tag{11}$$

Під розв'язком задачі (10), (11) розумітимемо функцію u: $(0,T)\to u(t,\cdot)\in\Phi$, диференційовну по t, яка задовольняє рівняння (10) і крайову умову (11) у тому сенсі, що

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\lim_{t\to T-0}u(t,\cdot)=\varphi$$

(границі розглядаються у просторі Φ'). Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Задача (10), (11) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій Φ'_*. Розв'язок подається у вигляді згортки:*

$$u(t,x)=(\varphi*G)(t,x),\quad \varphi\in\Phi'_*,(t,x)\in\Pi,$$

де G – ФРЗД для рівняння (10).

Доведення. Передусім переконаємося в тому, що функція $u(t,x)$ є розв'язком рівняння (10). Справді (див. наслідок 1),

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\varphi*G)(t,x)=\left(\varphi*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x),$$

$$A_\gamma u(t,x)=F^{-1}[A(\xi)F[(\varphi*G)(t,x)](\xi)](x).$$

Оскільки φ – згортувач у просторі Φ, то

$$F[(\varphi*G)(t,x)](\xi)=F[\varphi](\xi)\cdot F[G](\xi)=$$
$$=F[\varphi](\xi)\cdot Q(t,\xi),$$

де

$$Q(t,\xi)=\exp\{-tA(\xi)\}(\mu-\exp\{-A(\xi)T\})^{-1}.$$

Отже,

$$A_\gamma u(t,x)=F^{-1}[A(\xi)Q(t,\xi)F[\varphi](\xi)](x)=$$

$$=F^{-1}\Big[\frac{\partial}{\partial t}Q(t,\xi)F[\varphi](\xi)\Big](x)=$$

$$=-F^{-1}\Big[F\Big[\frac{\partial}{\partial t}G\Big]\Big](\xi)\cdot F[\varphi](\xi)=$$

$$= -F^{-1}\Big[F\Big[\Big(\varphi * \frac{\partial}{\partial t}G\Big)(t,x)\Big](\xi)\Big](x) =$$

$$= -\left(\varphi * \frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x).$$

Звідси дістаємо, що функція $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, задовольняє рівняння (10). З наслідку 3 випливає, що u задовольняє крайову умову у вказаному сенсі:

$$\mu \lim_{t\to +} u(t,\cdot) - \lim_{t\to T-0} u(t,\cdot) = \mu \lim_{t\to +0}(f*G)(t,\cdot) -$$

$$- \lim_{t\to T-0}(f*G)(t,\cdot) = \frac{\mu}{\mu-1}\varphi - \frac{\varphi}{\mu-1} = \varphi.$$

Зазначимо також, що u неперервно залежить від початкової функції $\varphi \in \Phi'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності.

Залишається переконатися в тому, що задача (10), (11) має єдиний розв'язок. Для цього розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t} - A^*_\gamma v = 0, (t,x) \in [0,t_0) \times \mathbb{R}^n \equiv \Pi',$$

$$0 \le t < t_0 \le T, \tag{12}$$

$$v(t,\cdot)|_{t=0} = \psi, \quad \psi \in \Phi'_*, \tag{13}$$

де A^*_γ – звуження спряженого оператора до оператора A_γ на простір $\Phi \subset \Phi'$. Умова (13) розуміється в слабкому сенсі. Розглянемо функцію

$$G^*(t-t_0,x) = F[e^{(t-t_0)A(\xi)}](x).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено в [15] у випадку задачі Коші для еволюційного рівняння з ПДО A_γ доводимо, що G^*, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі Φ, диференційовна по t; розв'язок задачі (12), (13) дається формулою

$$v(t,x) = (\psi * G)(t-t_0,x), \quad (t,x) \in \Pi',$$

при цьому $v(t,\cdot) \in \Phi$ при кожному $t \in [0,t_0)$, $v(t,\cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі Φ, диференційовна по t.

Нехай $Q^t_{t_0}$: $\Phi'_* \to \Phi$ – оператор, який зіставляє функціоналу $\psi \in \Phi'_*$ розв'язок $v(t,\cdot) \in \Phi$ задачі (12), (13):

$$\forall \psi \in \Phi'_*: \ \ Q^t_{t_0}\psi = (\psi * G^*)(t-t_0,x) \equiv v(t,x),$$

$$(t,x) \in \Pi'.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ є лінійним і неперервним, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0 \le t < t_0 \le T$ і володіє властивостями:

$$\forall \psi \in \Phi'_*: \ \ \frac{dQ^t_{t_0}\psi}{dt} - A^*_\gamma Q^t_{t_0}\psi = 0,$$

$$\lim_{t\to t_0} Q^t_{t_0}\psi = \psi$$

(границя розглядається у просторі Φ').

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi$, задачі (10), (11), який трактуватимемо як функціонал з простору $\Phi' \supset \Phi$. Доведемо, що задача (10), (11) може мати лише єдиний розв'язок у просторі Φ'. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (10) при нульовій крайовій умові може бути лише функціонал $u(t,x) \equiv 0$. Застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi \in \Phi \subset \Phi'_*$, де ψ – довільний елемент з простору Φ. Диференціюючи по t, врахувавши при цьому, що $u(t,\cdot)$ – слабко диференційовна функція параметра $t \in (0,T)$ над простором Φ (див. наслідок 3), $Q^t_{t_0}\psi \equiv v(t,\cdot)$ – диференційовна функція параметра $t \in (0,t_0)$, $t_0 \le T$, як абстрактна функція, використовуючи рівняння (10), (12), знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t} < u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi >= \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, Q^t_{t_0}\psi \right\rangle +$$

$$+ \left\langle u, \frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t} \right\rangle = - < A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi > +$$

$$+ < u, A^*_\gamma Q^t_{t_0}\psi >= - < A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi > +$$

$$+ < A_\gamma u, Q^t_{t_0}\psi >= 0, \forall \psi \in \Phi, 0 < t < t_0 \le T.$$

Звідси випливає, що функція $g(t)$: $< u(t,\cdot), Q^t_{t_0}\psi >$, $0 < t < t_0 \le T$, є сталою ($g(t) = c \equiv \text{const}$). Функція $G^*(t-t_0,\cdot)$, як абстрактна функція параметра $t \in [0, t_0]$ із значеннями у просторі Φ, диференційовна по t, тому вона є неперервною абстрактною функцією параметра t, тобто $G^*(t - t_0, \cdot) \to G^*(-t_0, \cdot)$ при $t \to +0$ за топологією простору Φ. Оскільки ψ – згортувач у просторі Φ (Φ утворює топологічну алгебру відносно згортки), то звідси вже дістаємо, що $\psi * G^*(t - t_0, \cdot) \to \psi * G^*(-t_0, \cdot)$ при $t \to +0$ у просторі Φ. Отже, $Q^t_{t_0}\psi = \psi * G^*(t - t_0, \cdot) \to Q^0_{t_0}\psi$ при $t \to +0$ у просторі Φ. Крім того, за доведеним раніше (див. лему 2), за умови $\varphi = 0$ маємо, що $u(t, \cdot) \to 0$ при $t \to +0$ у просторі Φ'. Тоді із відповідного твердження про абстрактні функції випливає, що

$$c =< u(t, \cdot), Q^t_{t_0}\psi > \underset{t\to+0}{\longrightarrow} < 0, Q^0_{t_0}\psi >= 0.$$

Отже, $c = 0$, тобто

$$< u(t, \cdot), Q^t_{t_0}\psi >= 0, \quad 0 < t < t_0 \le T.$$

Оскільки $u(t, \cdot)$, $Q^t_{t_0}\psi$ можна розуміти як регулярні узагальнені функції з простору Φ', то правильними є співвідношення

$$< u(t, \cdot), Q^t_{t_0}\psi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(t, x) Q^t_{t_0}\psi(x)dx =$$

$$=< Q^t_{t_0}\psi, u(t, \cdot) > . \qquad (14)$$

Далі скористаємося тим, що $Q^t_{t_0}\psi \to \psi$ при $t \to t_0$ у просторі Φ', $u(t, \cdot) \to u(t_0, \cdot)$ при $t \to t_0$ у просторі Φ, якщо $t_0 \neq 0$, $t_0 \neq T$. Перейшовши в (14) до границі при $t \to t_0$, внаслідок відповідної леми про абстрактні функції знайдемо, що

$$\lim_{t\to t_0} < u(t, \cdot), Q^{t_0}_t\psi >= \lim_{t\to t_0} < Q^t_{t_0}\psi, u(t, \cdot) >=$$

$$=< Q^{t_0}_{t_0}\psi, u(t_0, \cdot) >=< \psi, u(t_0, \cdot) >=$$
$$=< u(t_0, \cdot), \psi >= 0.$$

Оскільки t_0 вибране довільним чином між 0 і T, то $u(t, x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0, T)$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай $\varphi \in \Phi'$,*

$$\omega(t, x) =< \varphi, T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu) >,$$

$$\breve{G}(t, T, \xi, \mu) = G(t, T, -\xi, \mu), \quad (t, x) \in \Pi.$$

Якщо $\varphi = 0$ в області $Q \subset \mathbb{R}^n$, то $\omega(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ і $\omega(t, x) \to 0$ при $t \to T - 0$ рівномірно на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$. Побудуємо функцію $\nu \in \Phi$ з носієм в Q так, що $\nu = 1$ на $\mathbb{K}_1$, supp$\nu \subset Q$ (така функція існує, бо $D \subset \Phi$). Оскільки

$$\{\nu(\cdot)T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu),$$

$$(1 - \nu(\cdot))T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu)\} \subset \Phi$$

при кожному $t \in (0, T)$ і $x \in \mathbb{R}^n$, то

$$\omega(t, x) =< \varphi, \nu(\cdot)T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu) > +$$

$$+ < \varphi, \eta(\cdot)T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu) >,$$

де $\eta = 1 - \nu$. Урахувавши, що узагальнена функція φ дорівнює нулю в області Q, а supp$(\nu(\cdot)T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu)) \subset Q$, з останнього співвідношення дістаємо, що

$$\omega(t, x) = t^\alpha < \varphi, t^{-\alpha}\eta(\cdot)T_{-x}\breve{G}(t, T, \cdot, \mu) >,$$

де $\alpha > 0$ – деякий параметр, конкретне значення якого ми вкажемо пізніше. Оскільки кожна узагальнена функція $\varphi \in \Phi'$ має скінченний порядок, тобто $\varphi \in \Phi'_p$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$, то

$$|\omega(t, x)| \le t^\alpha \|\varphi\|_p \cdot \|\Psi_{t,x}\|_p,$$

де

$$\Psi_{t,x}(\xi) = t^{-\alpha}\eta(\xi)T_{-x}\breve{G}(t, T, \xi, \mu) \equiv$$

$$\equiv t^{-\alpha}\eta(\xi)G(t, T, x - \xi, \mu),$$

$\|\varphi\|_p$ – норма функціоналу φ. Отже, для доведення того, що $\omega(t, x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно на компакті $\mathbb{K} \subset Q$, досить встановити, що сукупність функцій $\Psi_{t,x}$ обмежена за нормою простору Φ_p, тобто $\|\Psi_{t,x}\|_p \le c_p$, причому стала c_p не залежить від параметрів t і x, які змінюються вказаним способом ($t \in (0, T)$, $x \in \mathbb{K}$). Оскільки $\Psi_{t,x}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbb{K}_1$, то оцінку $\|\Psi_{t,x}\|_p \le c_p$ досить довести для $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1$.

Функція $\nu \in \Phi = \bigcap\limits_{j=0}^{\infty} \Phi_j$, тобто $\nu \in \Phi_p$, тому

$$\|\nu\|_p = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left\{ \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{|\alpha|=k} |D_\xi^\alpha \nu(\xi)| \right\} \le$$

$$\le c_0, \quad c_0 = c_0(p) > 0.$$

Тоді

$$\Delta(\xi) := \sum_{k=0}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=k} |D_\xi^\alpha(\eta(\xi) G(t,T,x-\xi,\mu))| =$$

$$= M(\xi)^{\gamma_0} |(1-\nu(\xi)) G(t,T,x-\xi,\mu)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{|\alpha|=k} |D_\xi^\alpha((1-\nu(\xi)) \times$$

$$\times G(t,T,x-\xi,\mu))| \le M(\xi)^{\gamma_0} |G(t,T,x-\xi,\mu)| +$$

$$+ M(\xi)^{\gamma_0} |\nu(\xi)| \cdot |G(t,T,x-\xi,\mu)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|l|=0}^{|\alpha|} C_\alpha^l |D_\xi^l (1-\nu(\xi))| \times$$

$$\times |D_\xi^{\alpha-l} G(t,T,x-\xi,\mu)| \le M(\xi)^{\gamma_0} \times$$

$$\times |G(t,T,x-\xi,\mu)| + M(\xi)^{\gamma_0} |\nu(\xi)| \times$$

$$\times |G(t,T,x-\xi,\mu)| + \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=k} [|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| + |\nu(\xi)| \times$$

$$\times |D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| + \sum_{|l|=1}^{|\alpha|} C_\alpha^l |D_\xi^l \nu(\xi)| \times$$

$$\times |D_\xi^{\alpha-l} G(t,T,x-\xi,\mu)|].$$

Оскільки $\|x-\xi\| \ge a_0 > 0$, де a_0 – віддаль між межами компактів $\mathbb{K}$ і $\mathbb{K}_1$, то скористаємося оцінками функції G, які отримані при доведенні леми 2:

$$|G(t,T,x-\xi,\mu)| \le \frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}}$$

$$(\gamma > 1, \gamma \ne 2m, \gamma \ne 2m+1, m \in \mathbb{N}),$$

стала c залежить від μ, T і не залежить від t. Аналогічно можна довести, що

$$|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| \le \frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}},$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{15}$$

Тоді

$$\Delta(\xi) \le \frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma} M(\xi)^{\gamma_0}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}} + \frac{cc_0 t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} M(\xi)^{\gamma_0+k} \sum_{|\alpha|=k} \left[\frac{ct^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_0 c t^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}} + \sum_{|l|=1}^{|\alpha|} \frac{c_l c_0 c C_\alpha^l t^{\{\gamma\}/\gamma} M(\xi)^{-|l|}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha-l|}} \right],$$

$$\gamma_0 = n + [\gamma].$$

Зазначимо, що

$$\exists L > 0 \ \forall x \in \mathbb{K} \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{K}_1 :$$

$$M(\xi)/\|x-\xi\| \le L.$$

Отже, врахувавши оцінки (15), знаходимо, що

$$\Delta(\xi) \le cL^{\gamma_0} t^{\{\gamma\}/\gamma} + cc_0 a_0^{-(n+[\gamma])} t^{\{\gamma\}/\gamma} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} \sum_{|\alpha|=k} [c a_0^{\{\gamma\}} L^{\gamma_0+k} t^{\{\gamma\}/\gamma} + c_0 c L^{\gamma_0+k} t^{\{\gamma\}/\gamma} +$$

$$+ \sum_{|l|=1}^{|\alpha|} c_l c c_0 c C_\alpha^l L^{\gamma_0+k} t^{\{\gamma\}/\gamma}] = c_1 \cdot t^{\{\gamma\}/\gamma},$$

де стала c_1 не залежить від t і x. Покладемо тепер $\alpha = \{\gamma\}/\gamma$. Звідси вже випливає, що $\|\Psi_{t,x}\|_p \le c_1$. Тоді

$$|\omega(t,x)| \le c_1 \|\varphi\|_p \cdot t^{\{\gamma\}/\gamma} \equiv c_2 \cdot t^{\{\gamma\}/\gamma},$$

де стала c_2 не залежить від t і x. Цим доведено, що $\omega(t,x) \to 0$ при $t \to +0$ рівномірно по $x \in \mathbb{K}$.

Властивість $\omega(t,x) \to 0$ при $t \to T-0$ рівномірно по $x \in \mathbb{K}$ доводиться аналогічно;

при цьому використовуються оцінки функції G та її похідних подібні до тих, які встановлені при доведенні леми 3:

$$|D_\xi^\alpha G(t,T,x-\xi,\mu)| \le c\frac{\tilde{t}^{\{\gamma\}/\gamma}}{\|x-\xi\|^{n+[\gamma]+|\alpha|}},$$

$$\|x-\xi\| \ge a_0 > 0, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

де $\tilde{t} = T - t$ (якщо $t \to T-0$, то $\tilde{t} \to +0$). Теорема доведена.

Теорема 3(властивість локалізації). *Нехай $\varphi \in \Phi_*'$, $u(t,x)$ – розв'язок задачі (10), (11). Якщо узагальнена функція φ збігається в деякій області $Q \subset \mathbb{R}^n$ з неперервно диференційовною функцією g, то $\mu \lim\limits_{t\to+0} u(t,x) - \lim\limits_{t\to T-0} u(t,x) = g(x)$ рівномірно відносно x на довільному компакті $\mathbb{K} \subset Q$.*

Доведення. Нехай $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}_1 \subset Q$, де $\mathbb{K}_1$ – деяка компактна множина в $\mathbb{R}^n$, ν – основна функція, побудована при доведенні теореми 2. Оскільки $\nu(\varphi - g) = 0$ в Q, то $\nu(\varphi-g) = 0$ на $\mathbb{K}_1$, $(1-\nu)\varphi = 0$ на $\mathbb{K}_1$ і за доведеним у теоремі 2

$$< \nu(\varphi-g), T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > \to 0, t \to +0,$$

$$< (1-\nu)\varphi, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > \to 0, t \to +0,$$

$$< \nu(\varphi-g), T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > \to 0, t \to T-0,$$

$$< (1-\nu)\varphi, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > \to 0, t \to T-0,$$

рівномірно по $x \in \mathbb{K}$. Крім того,

$$u(t,x) = (\varphi * G)(t,x) =< \varphi, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) >=$$

$$=< \nu(\varphi-g), T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > +$$

$$+ < (1-\nu)\varphi, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) > +$$

$$+ < \nu g, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) >,$$

причому

$$< \nu g, T_{-x}\breve{G}(t,T,\cdot,\mu) >=$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,\mu)\nu(\xi)g(\xi)d\xi \equiv J(t,x).$$

Для доведення твердження теореми досить встановити, що $J(t,x) \to \dfrac{1}{\mu-1}(\nu g)(x)$ при $t \to +0$ рівномірно по $x \in \mathbb{K} \subset Q$, $J(t,x) \to \dfrac{1}{\mu-1}(\nu g)(x)$ при $t \to T-0$ рівномірно по $x \in \mathbb{K} \subset Q$.

Оскільки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,x-\xi,\mu)d\xi = \frac{1}{\mu-1},$$

то

$$|J(t,x) - \frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(t,T,\xi,\mu)\times\right.$$

$$\left.\times[(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)]d\xi\right| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |G(t,T,\xi,\mu)| \cdot |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)|d\xi \equiv$$

$$\equiv \Delta(t,x).$$

Оскільки νg – неперервно диференційовна функція, то із формули про скінченні прирости випливає, що

$$|(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| \le M\|x-\xi-x\| = M\|\xi\|,$$

де $M = \sum\limits_{i=1}^n \max\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\dfrac{\partial(\nu g)}{\partial\, xi_i}\right|$. Візьмемо ε з проміжку $(0,T)$ і покладемо $t_0 = \varepsilon$, $\delta = t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Тоді

$$|(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)| < M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])},$$

якщо тільки $\|\xi\| < t_0^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}$. Отже,

$$\Delta(t,x) < M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])} \int\limits_{\|\xi\|<t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)|d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\|\xi\|\ge t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)| \cdot |(\nu g)(x-\xi) - (\nu g)(x)|d\xi,$$

$$\alpha = \{\gamma\}/(2\gamma[\gamma]).$$

Далі, як і при доведенні леми 2 встановлюємо, що

$$\int\limits_{\|\xi\|<t_0^\alpha} |G(t,T,\xi,\mu)|d\xi \le b_0 = \mathrm{const}, \forall t \in (0,T),$$

$$\int\limits_{\|\xi\|\geq t_0^{\alpha}} |G(t,T,\xi,\mu)|d\xi \leq c\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}, \forall t\in(0,t_0);$$

при цьому враховуємо той факт, що νg – неперервно диференційовна фінітна в $\mathbb{R}^n$ функція, тобто

$$\exists M_1>0: \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n, x\in\mathbb{K}} |(\nu g)(x-\xi)-(\nu g)(x)|\leq M_1.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon\in(0,T)\ \exists t_0=\varepsilon\ \forall t: 0<t<t_0\ \forall x\in\mathbb{K}:$$

$$\Delta(t,x)=|J(t,x)-\frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x)|<$$

$$<b_0M\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma[\gamma])}+cM_1\varepsilon^{\{\gamma\}/(2\gamma)}.$$

Якщо $\varepsilon\geq T$, то за $t_0=t_0(\varepsilon)$ можна взяти довільне фіксоване число з проміжку $(0,T)$. Звідси випливає, що

$$J(t,x)\underset{t\to+0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}\frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x).$$

Використовуючи доведення леми 3 та міркування аналогічно попередньому встановлюємо також, що

$$J(t,x)\underset{t\to T-0}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}\frac{1}{\mu-1}(\nu g)(x).$$

Теорема доведена.

Як приклад, розглянемо функцію

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1/\|x\|^{n+\gamma}, & x\in\overline{K}(0,1)\setminus\{0\},\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{K}(0,1).\end{cases}$$

Відомо [15], що φ допускає регуляризацію у просторі $\Phi'_*\subset\Phi'$, при цьому відповідний функціонал F_φ визначається формулою

$$<F_\varphi,\psi>=\int\limits_{\mathbb{R}^n}(\psi(x)-\sum_{|j|\leq[\gamma]}(D_x^j\psi)(0)\frac{x^j}{j!})\times$$

$$\times\|x\|^{-(n+\gamma)}dx, \psi\in\Phi.$$

Отже, як узагальнена функція, φ збігається з гладкою функцією $g(x)=\|x\|^{-(n+\gamma)}$ у кожній області $Q\subset\overline{K}(0,1)$, яка не містить точку 0. Тоді, згідно з теоремою 3, розв'язок задачі (10), (11) з крайовою умовою φ володіє властивостями:

$$u(t,x)\underset{t\to+0}{\overset{\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}(\mu-1)^{-1}\|x\|^{n+\gamma},$$

$$u(t,x)\underset{t\to T-0}{\overset{\mathbb{K}}{\rightrightarrows}}(\mu-1)^{-1}\|x\|^{n+\gamma},$$

де $\mathbb{K}$ – довільний компакт, що міститься в області Q.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Шубин М.А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – М.: Наука, 1978. – 280 с.

2. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1985. – 472 с.

3. Фракталы в физике: Труды VI Международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9 – 12 июля 1985). – М.: Мир, 1988. – 672 с.

4. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

5. *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наукова думка, 1992. – 205 с.

6. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, N 8. – С. 1359 – 1368.

7. *Эйдельман С.Д., Дринь Я.М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. Киев. – 1974. – С. 60 – 69.

8. *Федорюк М.В.* Асимптотика функции Грина псевдодифференциального параболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, N 7. – С. 1296 – 1301.

9. *Дрінь Я.М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1974. – N 1. – С. 19 – 21.

10. *Дринь Я.М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – N 3. – С. 198 – 203.

11. *Кочубей А.Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1988. – Т. 52, N 5. – С. 909 – 934.

12. *Кочубей А.Н.* Сингулярные параболические уравнения и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1984. – Т. 48, N 1. – С. 77 – 103.

13. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

14. *Дрінь Р.Я.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1997. – 137 с.

15. *В.В.Городецький.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівняння параболічного типу. Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

16. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

17. *Кириллов А.А., Гвишиани А.Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 381 с.

18. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные значения решений дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 283 с.

19. *Городецький В.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь нескінченного порядку. – Чернівці: Рута, 2005. – 291 с.

20. *Дрінь М.м., Дрінь Я.М.* Зображення розв'язків нелокальних задач для параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами // Spectral and Evolution Problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School. – Symposium. Simferopol. – Vol. 16. – 2006. – P. 33 – 37.