УДК 517.51

©2007 р. О.І. Гайдукевич

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

ЗВ'ЯЗКИ МІЖ РІЗНИМИ ТИПАМИ ВИМІРНОСТІ ВІДОБРАЖЕНЬ

Досліджені співвідношення між поняттями вимірності і s-вимірності відображень і встановлені умови їх рівносильності.

The relations between the notions of measurability and s-measurability of mappings are investigated. The conditions of their equivalency are established.

При вивченні узагальнень властивості Скорца-Драгоні (див.[1] і вказану там літературу) зустрічаються різні типи вимірності відображень. Нехай $(T, \mathcal{A})$ – вимірний простір і Y – топологічний простір. Відображення $f : T \to Y$ називається *вимірним* , якщо $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ для кожної борелівської підмножини B простору Y. Відображення F називається *простим*, якщо існує скінченна кількість вимірних неперетинних множин M_k, $k = 1, ..., n$, така, що $T = \bigsqcup\limits_{k=1}^{n} M_k$ і $f|_{M_k} = const$ для кожного k . У випадку, коли на σ-алгебрі $\mathcal{A}$ задано міру μ, відображення $f : T \to Y$ будемо називати *s-вимірним*, якщо існує послідовність простих відображень $f_n : T \to Y$, яка майже скрізь на T збігається до f. У випадку, коли Y – банаховий простір, відображення $f : T \to Y$ називається *слабко s-вимірним*, якщо для довільного $y^* \in Y^*$ відображення $y^* \circ f$ є s-вимірним. У теоремі Петтіса [2, с.42] встановлюються умови рівносильності понять s-вимірності і слабкої s-вимірності відображень. В даній роботі досліджуються зв'язки між s-вимірністю і вимірністю відображень.

Кажемо, що відображення $f : T \to Y$ має *майже сепарабельний образ*, якщо існує множина L нульової міри в просторі T така, що образ $f(T \setminus L)$ є сепарабельною множиною в просторі Y.

Модифікуючи міркування Л.Шварца [3, с.514], встановимо наступний результат.

Теорема 1. *Нехай $(T, \mathcal{A}, \mu)$ – простір з σ-скінченною повною мірою, Y – метризовний топологічний простір і $f : T \to Y$ – вимірне відображення з майже сепарабельним образом. Тоді f є s-вимірним.*

Доведення. Нехай L – підмножина міри нуль простору T, така, що образ $Y_0 = f(T \setminus L)$ сепарабельний в Y і d – метрика, що породжує топологію простору Y. Для довільного $\varepsilon > 0$ і $y_0 \in Y$ позначимо $V(y_0, \varepsilon) = \{y \in Y : d(y, y_0) < \varepsilon\}$. Візьмемо деяку щільну в Y_0 не більш ніж зліченну множину $\{y_k : k \in \mathbf{N}\}$. Покладемо $C_{k,\varepsilon} = V(y_k, \varepsilon) \setminus \bigcup\limits_{i<k} V(y_i, \varepsilon)$ і $D_{k,\varepsilon} = f^{-1}(C_{k,\varepsilon})$ для довільного номера k. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ множини $D_{k,\varepsilon}$ попарно неперетинні, як прообрази таких множин. Оскільки $\overline{\{y_k : k \in \mathbf{N}\}} \supseteq Y_0$, то $Y_0 \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V(y_k, \varepsilon) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{k,\varepsilon}$. Тому $T \setminus L \subseteq f^{-1}(Y_0) = f^{-1}(\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} C_{k,\varepsilon}) = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} D_{k,\varepsilon}$.

Нехай A – множина скінченної міри в T. Оскільки

$$A = (\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (A \cap D_{k,\varepsilon})) \cup (A \cap L) \text{ і } \mu(A \cap L) = 0,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A \cap D_{k,\varepsilon}) = \mu(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A \cap D_{k,\varepsilon}) + \mu(A \cap L) =$$

$$= \mu(A) < +\infty.$$

Отже, для довільного $\delta > 0$ існує номер $N = N(\varepsilon, A, \delta)$, такий, що $\sum\limits_{k>N} \mu(A \cap D_{k,\varepsilon}) \leq \delta$. Покладемо $E(\varepsilon, A, \delta) = \bigsqcup_{k>N} D_{k,\varepsilon}$. Тоді $\mu(A\cap E(\varepsilon, A, \delta)) = \sum_{k>N} \mu(A\cap D_{k,\varepsilon}) \le \delta$.

Оскільки міра μ є σ-скінченною, то існує зростаюча послідовність множин A_n скінченної міри, така, що $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Розглянемо номери $p_n = N(\frac{1}{n}, A_n, \frac{1}{2^{n+1}})$ при $n = 1, 2, \ldots$. Зафіксуємо деякий елемент $y_0 \in Y$. Побудуємо прості відображення $f_n : T \to Y$ наступним чином:

$$f_n(t) = \begin{cases} y_k, \text{ якщо } t \in D_{k,\frac{1}{n}}, \text{ де } k \le p_n, \\ y_0, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Покладемо

$$E_n = E(\frac{1}{n}, A_n, \frac{1}{2^{n+1}}),\;\; E = (\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} E_n) \cup L$$

і $F = \{t \in T : f_n(t) \not\to f(t)\}$. Візьмемо довільне $t \in T \setminus E$. Покажемо, що тоді $f_n(t) \to f(t)$. Оскільки $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, то існує номер m_1, такий, що $t \in A_{m_1}$. З того що $t \notin E$ отримуємо, що існує номер m_2, такий, що $t \notin \bigcup_{n\ge m_2} E_n$, а значить, $t \notin E_n$ для всіх $n \ge m_2$. Покладемо $m = \max\{m_1, m_2\}$. Зауважимо, що для довільного n маємо:

$$A_n = (A_n \cap \bigsqcup_{k=1}^{\infty} D_{k,\frac{1}{n}}) \cup (A_n \cap L) =$$

$$= (A_n \cap \bigsqcup_{k\le p_n} D_{k,\frac{1}{n}}) \sqcup (A_n \cap \bigsqcup_{k>p_n} D_{k,\frac{1}{n}}) \cup (A_n \cap L) =$$

$$= \bigsqcup_{k\le p_n} (A_n \cap D_{k,\frac{1}{n}}) \sqcup (A_n \cap E_n) \cup (A_n \cap L).$$

Зважаючи на те, що $t \notin L$ і $t \notin E_n$ при $n \ge m$, для таких n отримуємо, що $t \in \bigsqcup_{k\le p_n} (A_n \cap D_{k,\frac{1}{n}})$. Таким чином, для довільного $n \ge m$ існує $k_n \le p_n$, таке, що $t \in D_{k_n,\frac{1}{n}}$ а, отже, $f_n(t) = y_{k_n}$. З того, що $f(t) \in C_{k_n,\frac{1}{n}} \subseteq V(y_{k_n}, \frac{1}{n})$, випливає, що $d(f_n(t), f(t)) < \frac{1}{n}$, звідки $f_n(t) \to f(t)$ при $n \to \infty$, тобто, $t \in T \setminus F$. Таким чином, $F \subseteq E$. Покажемо, що $\mu(E) = 0$. Візьмемо довільне $n_0 \in \mathbf{N}$. Для будь якого $m \ge n_0$ маємо, що

$$E \cap A_{n_0} \subseteq ((\bigcup_{n\ge m} E_n) \cap A_{n_0}) \cup (L \cap A_{n_0}) =$$

$$= (\bigcup_{n\ge m} (E_n \cap A_{n_0})) \cup (L \cap A_{n_0}) \subseteq \bigcup_{n\ge m} (E_n \cap A_n) \cup L.$$

Тому

$$\mu(E_n \cap A_{n_0}) \le \sum_{n\ge m} (E_n \cap A_n) + \mu(L) \le$$

$$\le \sum_{n\ge m} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^m}$$

для довільного $m \ge n_0$. Спрямовуючи m до безмежності отримуємо, що $\mu(E \cap A_{n_0}) = 0$. Таким чином, $\mu(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap A_n) = 0$. Оскільки міра μ повна і $F \subseteq E$, то $\mu(F) = 0$, що завершує доведення теореми.

Розвиваючи побудови з книги К. Куратовського [4, с.204] отримуємо таке твердження:

Теорема 2. *Нехай $(T, \mathcal{A}, \mu)$– простір з повною мірою, Y – досконало нормальний простір і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$– послідовність вимірних відображень $f_n : T \to Y$, що майже скрізь на T збігається до відображення $f : T \to Y$. Тоді відображення f є вимірним.*

Доведення. Спочатку припустимо, що $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всіх $t \in T$. Оскільки простір Y досконало нормальний, то довільну замкнену в Y множину B можна подати у вигляді перетину спадної послідовності відкритих множин B_m, такої, що $\overline{B}_{m+1} \subseteq B_m$ для всіх m. Нехай $A_{m,n} = f_n^{-1}(B_m)$, $A_m = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_{m,n}$ і $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$. Очевидно, що множина A є вимірною. Покажемо, що $f^{-1}(B) = A$. Нехай $t \in f^{-1}(B)$. Тоді $f(t) \in B_m$ для кожного номера m. Оскільки $f_n(t) \to f(t)$ при $n \to \infty$ і множини B_m відкриті, то для довільного $m \in \mathbf{N}$ існує такий номер n_m, що $f_n(t) \in B_m$ при $n \ge n_m$, тобто, для $n \ge n_m$ маємо, що

$t \in A_{m,n}$. Звідси отримуємо, що для довільного $k \in \mathbf{N}$ елемент t міститься в множині $\bigcup\limits_{n>k}^{\infty} A_{m,n}$. Таким чином, для кожного номера m маємо, що $t \in A_m$, а, отже, $t \in A$. Навпаки, нехай $t \in A$. Тоді для кожного $m \in \mathbf{N}$ маємо, що $t \in A_m$. Візьмемо довільне $m \in \mathbf{N}$. Для кожного $k \in \mathbf{N}$ існує такий номер $n_k > k$, що $t \in A_{m,n_k}$, тобто, $f_{n_k}(t) \in B_m$. Спрямовуючи k до безмежності, отримаємо, що $f(t) \in \overline{B}_m$. Оскільки номер m довільний, і $B = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \overline{B}_m$, то $f(t) \in B$, отже, $t \in f^{-1}(B)$.

Нехай тепер $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всіх $t \in T \setminus L$, де L – деяка підмножина міри нуль простору T, і y_0 – деякий фіксований елемент простору Y. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ покладемо

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), \text{ якщо } t \in T \setminus L, \\ y_0, \text{ якщо } t \in L. \end{cases}$$

Отримані відображення g_n є вимірними, як рівні майже скрізь відповідним вимірним відображенням f_n. Крім того, відображення

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} g_n(t) = \begin{cases} f(t), \text{ якщо } t \in T \setminus L, \\ y_0, \text{ якщо } t \in L \end{cases}$$

є вимірним, як поточкова границя вимірних відображень. Отже, вимірним є і рівне йому майже скрізь відображення f .

З теорем 1 і 2 випливає наступний результат.

Теорема 3. *Нехай $(T, \mathcal{A}, \mu)$ – простір з σ-скінченною повною мірою і Y – метризовний топологічний простір. Тоді відображення $f : T \to Y$ є s-вимірним в тому і тільки в тому випадку, коли воно є вимірним відображенням з майже сепарабельним образом.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай L – деяка підмножина міри нуль простору T і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність простих відображень $f_n : T \to Y$, таких, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ для всіх $t \in T \setminus L$. Тоді за теоремою 2 відображення f є вимірним. Нехай для кожного номера n множиною значень відображення f_n є множина $C_n = \{y_1^n, ..., y_{k_n}^n\}$. Покладемо $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Множина C є не більш ніж зліченною, а її замикання Y_0 в просторі Y є сепарабельним підпростором простору Y. Крім того, для кожного $t \in T \setminus L$ існує послідовність елементів множини C, що збігається до $f(t)$. Таким чином, $f(t) \in \overline{C} = Y_0$, отже, $f(T \setminus L) \subseteq Y_0$. Оскільки метризовний простір є спадково сепарабельним, то і множина $f(T \setminus L)$ сепарабельна, тобто f, має майже сепарабельний образ.

Достатність встановлена в теоремі 1.

Зауваження 1. У випадку, коли Y – сепарабельний метризовний простір, вимірність відображення f рівносильна його s-вимірності.

Зауваження 2. У випадку, коли μ – міра Радона, задана на локально компактному зліченному в нескінченності просторі T і Y – сепарабельний метризовний простір, еквівалентність вимірності і s-вимірності відображення $f : T \to Y$ була встановлена в [3. с.514].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Zygmunt W.* Wlasność Scorza-Dragoni'ego. – Lublin: Wydawnictvo un-tu Marii Curie-Sklodovskiej, 1990. – 87 s.

2. *Diestel J., Uhl J.J,Jr.* Vector measures. – Rhode Island: American Mathematical Society Providence, 1977. – 322 p.

3. *Шварц Л.* Анализ, т.1. – М.:Мир, 1972. – 824 с.

4. *Куратовський К.* Топология, т.1. – М.:Мир, 1966. – 594 с.