УДК 517.51

©2007 р. Г. Власюк, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича

МНОГОЧЛЕНИ БЕРНШТЕЙНА І НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

Показано, як за допомогою многочленів Бернштейна доводяться класичні теореми Лебеґа і Бера про нарізно неперервні функції і встановлено, що компакт Y є метризовним тоді і лише тоді, коли тотожне відображення $I : C_p(Y) \to C_u(Y)$ належить до першого класу Бера $B_1(C_p(Y), C_u(Y))$ або коли для кожного топологічного простору X виконується включення $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$.

It is shown that using Bernstein polynoms can one prove the classical Lebesgue and Baire theorems on separately continuous functions. It is obtained that a compact Y is metrizable iff identical mapping $I : C_p(Y) \to C_u(Y)$ belongs to the first Baire class $B_1(C_p(Y), C_u(Y))$ or for every topological spaces X the inclusion $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$ holds.

1. Позначення. Нехай X і Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – відображення. Символом $C(f)$ ми позначаємо сукупність усіх точок неперервності відображення f, а через $D(f)$ – множину його точок розриву. Символ $C(X, Y)$ означає сукупність усіх неперервних відображень $f : X \to Y$, а $B_1(X, Y)$ – сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера, які характеризуються умовою: існує послідовність відображень $f_n \in C(X, Y)$, яка поточково збігається до f на X. У випадку $Y = \mathbb{R}$ ми покладаємо $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ і $B_1(X) = B_1(X, \mathbb{R})$. Якщо $X \subseteq \mathbb{R}$, то відображення $f : X \to \mathbb{R}$ називається поліноміальним, якщо існує такий поліном $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, що $f(x) = g(x)$ для кожного $x \in X$. Сукупність усіх поліноміальних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ позначається через $P(X)$.

Для трьох множин X, Y і Z, відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p(x, y) \in X \times Y$ ми покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Формулами $\varphi(x) = f^x$ і $\psi(y) = f_y$ визначаються відображення $\varphi : X \to Z^Y$ і $\psi : Y \to Z^X$, які називаються *асоційованими з* f. Нехай X, Y і Z – топологічні простори. Ми будемо вживати звичайні позначення:

$CC(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X\times Y} : (\forall x \in X)(f^x \in C(Y, Z))\ i\ (\forall y \in Y)(f_y \in C(X, Z))\}$ для сукупності всіх нарізно неперервних відображень $f : X \times Y \to Z$ (коротко: CC-функцій) і

$CB_1(X \times Y, Z) = \{f \in Z^{X\times Y} : (\forall x \in X)(f^x \in B_1(Y, Z))\ i\ (\forall y \in Y)(f_y \in C(X, Z))\}$ для сукупності всіх відображень $f : X\times Y \to Z$, які неперервні відносно першої змінної і належать до першого класу Бера відносно другої (коротко: CB_1-функції). Для множини $Y \subseteq \mathbb{R}$ покладемо

$CP(X \times Y, \mathbb{R}) = \{f \in \mathbb{R}^{X\times Y} : (\forall x \in X)(f^x \in P(Y))\ i\ (\forall y \in Y)(f_x \in C(X))\}$.

Для топологічного простору X символом $C_p(X)$ позначається топологічний простір $C(X)$ всіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з топологією поточкової збіжності, що породжується сукупністю переднорм $\pi_x(f) = |f(x)|$. Для компактного простору X символом $C_u(X)$ ми позначаємо банахів простір $C(X)$ з нормою $||f|| = \max\limits_{x\in X} |f(x)|$. Послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ *рівномірно збігаеться* до функції $f : X \to \mathbb{R}$ на X (пишемо: $f_n \rightrightarrows f$ на X), якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що для всіх $n \geq N$ і всіх $x \in X$ виконується нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Якщо f_n і f взяті з $C_u(X)$, то $f_n \rightrightarrows f$ тоді і тільки тоді, коли $f_n \to f$ в $C_u(X)$, тобто $||f_n - f|| \to 0$. Легко перевірити, що $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ тоді і тільки тоді, коли $\varphi \in C(X, C_p(Y))$.

2. Проблеми. В теорії нарізно неперервних відображень на сьогодні є ще досить багато нерозв'язаних проблем, які стимулюють подальший розвиток цього важливого розділу теорії функцій (див., наприклад, праці [1-6]). Одне з найбільш інтригуючих питань, відповіді на яке досі не знайдено, може бути сформульоване так:

Проблема 1. (В.В. Михайлюк, О.В. Собчук, 1995 [7,8]). Нехай $f \in CB_1([0,1]^2, \mathbb{R})$. Чи існує послідовність функцій $f_n \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$, яка поточково збігається до f на $[0,1]^2$?

Зауважимо, що в [7] таке питання ставилося для функцій $f \in CB_1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, а у [8] розглядалось навіть загальніше питання, що стосувалося класу $CB_n(X \times Y, \mathbb{R})$ для $n \in \mathbb{N}$.

При гортанні тез минулої Ужгородської конференції, на якій було багато доповідей з теорії наближень, а саме, при знайомстві з тезами [9] у другого з співавторів цієї статті виникла думка: а чому б не розвинути теорію наближень CC-функцій, які інтерпретуються як функції з класу $C(X, C_p(Y))$ і для них можна імітувати теорію наближень неперервних функцій з числовими значеннями? Зокрема, у зв'язку з класичною теоремою Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції поліномами [10, с.98], постало таке питання:

Проблема 2.(В.К. Маслюченко, 2006). Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$. Чи існує така послідовність функцій $f_n \in CP([0,1]^2, \mathbb{R})$, що $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$?

3. Многочлени Бернштейна і розв'язання другої проблеми. Трудність розв'язання проблеми 1 пояснюється тим, що не існує однотипної конструктивної процедури, яка б дозволяла для кожної функції $g \in B_1[0,1]$ будувати послідовність функцій $g_n \in C[0,1]$, яка поточково збігається до g (у зв'язку з цим див. [11], де доведено, що оператор переходу до поточкової границі не має секвенціального неперервного в нулі правого оберненого $Q : B_1[0,1] \to C_p[0,1]$ і правого оберненого, який би зберігав добуток). На відміну від цього для кожної неперервної функції $g \in C[0,1]$ можна цілком конструктивно визначити послідовність многочленів $g_n \in P[0,1]$, яка рівномірно збігається до g на $[0,1]$. Особливо красиву і ефективну конструкцію дають класичні многочлени Бернштейна

$$(B_n g)(y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} g(\frac{k}{n}),$$

де $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти. Використовуючи рівномірну неперервність неперервної на відрізку функції, тотожність

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} = 1$$

і похідні від неї тотожності, легко доводиться [10, с.100]

Теорема А. (С.Н. Бернштейн, 1912, [12]). $B_n g \rightrightarrows g$ на $[0,1]$ для кожної функції $g \in C[0,1]$.

З допомогою многочленів Бернштейна негайно отримується позитивна відповідь на проблему 2.

Теорема 1. Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$ при $(x,y) \in [0,1]^2$ для кожного номера n. Тоді для кожного n функції $f_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ неперервні за сукупністю змінних, $f_n \in CP([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $f_n^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$.

Доведення. Оскільки

$$f_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^k (1-y)^{n-k} f(x, \frac{k}{n})$$

при $(x,y) \in [0,1]^2$, то функції f_n сукупно неперервні як скінченні суми таких функцій. Крім того, для кожного $x \in [0,1]$ функції $f^x = B_n f^x$ є поліноміальними. Залишається скористатися вищенаведеною теоремою А.

4. Деякі класичні теореми про нарізно неперервні функції та їх нове доведення з допомогою многочленів Бернштейна. Теорія нарізно неперервних відображень почалася з двох основоположних результатів Р.Бера та А.Лебеґа, які впродовж XX століття узагальнювались і розвивались у працях багатьох математиків (див.[2,3,13] і вказану там літературу) і продовжують свій розвиток у наші дні.

Теорема B. (Р.Бер, 1899, [14]). Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$. Тоді проекція множини $D(f)$ всіх точок розриву функції f на вісь абсцис є множиною першої категорії.

Теорема C. (А.Лебеґ, 1898, [15]). $CC([0,1]^2, \mathbb{R}) \subseteq B_1([0,1]^2, \mathbb{R})$.

Зрозуміло, що теорема C негайно випливає з доведеної вище теореми 1. Виявляється, що і теорема B може бути виведена з теореми 1. Для цього нам буде потрібний ще один результат про функції першого класу Бера, який для дійсних змінних встановив Р.Бер[15], а узагальнив Г.Ган[17] (див. також [18, с.405]).

Теорема D. (Р.Бер, 1898, [16,14]; Г.Ган, 1932, [17]). Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний простір і $f \in B_1(X, Y)$. Тоді $D(f)$ є множиною першої категорії у просторі X.

Крім того ми використаємо ще один добре відомий результат [13, твердження 2.1.2], який легко випливає з компактності простору Y. В ньому ми покладаємо $C_Y(f) = \{x \in X : \{x\} \times Y \subseteq C(f)\} = X \backslash pr_X(D(f))$.

Теорема E. Нехай X – топологічний простір, Y – компактний простір, $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ і $\varphi : X \to C_u(Y)$ – асоційоване з f відображення. Тоді $C_Y(f) = C(\varphi)$.

Покажемо тепер як з допомогою цих тверджень доводити теорему B. Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $f_n(x,y) = (B_n f^x)(y)$. Розглянемо асоційовані з f і f_n відображення $\varphi : [0,1] \to C_u[0,1]$ і $\varphi_n : [0,1] \to C_u[0,1]$. Оскільки $f_n \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, то $\varphi_n \in C([0,1], C_u[0,1])$. За теоремою A $\varphi_n(x) = f_n^x \to f^x = \varphi(x)$ в $C_u[0,1]$ для кожного $x \in [0,1]$. Тому $\varphi \in B_1([0,1], C_u[0,1])$. За теоремою E маємо, що $pr_X(D(f)) = D(\varphi)$, а з теореми D випливає, що $D(\varphi)$ є множиною першої категорії в $X = [0,1]$. Отже, і $pr_X(D(f))$ є множиною першої категорії в $X = [0,1]$.

Таким чином, ми фактично з допомогою теореми 1 довели включення $C([0,1], C_u[0,1]) \subseteq B_1([0,1], C_u[0,1])$, звідки, використавши теореми D і E, вивели теорему B.

Зауважимо, що твердження теореми D залишається вірним, коли Y – сильно σ-метризовний простір, але перестає бути вірним, коли Y тільки σ-метризовний простір[19].

5. Метод Лебеґа і попередники. У світлі сказаного вище первісний метод Лебеґа доведення теореми C можна викласти так. Для функції $g \in C[0,1]$ і номера n позначимо символом $L_n g$ функцію з $C[0,1]$, графіком якої є ламана з послідовними вершинами у точках $(\frac{k}{n}, g(\frac{k}{n}))$ при $k = 0, 1, ..., n$. Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $f_n(x,y) = (L_n f^x)(y)$. Тоді $f_n \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $f_n(p) \to f(p)$ на $[0,1]^2$. Насправді ж $L_n g \rightrightarrows g$ на $[0,1]$, якщо $g \in C[0,1]$, отже, $f_n^x = L_n f^x \rightrightarrows f^x$ на $[0,1]$. Тому методом Лебеґа можна знову довести включення $C([0,1], C_u[0,1]) \subseteq B_1([0,1], C_u[0,1])$, з якого негайно випливає теорема B. Цікаво при цьому зауважити, що в праці [15], яка є першою друкованою працею А.Лебеґа, оригінальним способом доводиться і теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної функції многочленами.

Зауважимо, що такий хід міркувань не новий. Ще М.Цуджі [20] розглянув функції $h_n(x,y) = (L_{2^n} f^x)(y)$ і помітив, що $h_n^x \rightrightarrows f^x$ для кожного $x \in [0,1]$. Звідси він вивів теорему Бера про проекцію у трохи слабшому формулюванні, де твердиться, що множина $C_Y(f)$ всюди щільна в $X = [0,1]$. Правда, при цьому він не використовує теореми D, а фактично прямо її доводить у цьому частинному випадку.

Включення $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$ для сепарабельного повнометризовного простору X і метризовного компакту Y довели А.Алексєвич та В.Орлич [21], які також застосували його для доведення узагальнення теореми B. При цьому вони використовували одну теорему Банаха, що давала характеризацію абстрактних функцій $\varphi : X \to E$ першого класу Бера зі значеннями у банаховому просторі E через прообрази, розвиваючи класичну теорему Лебеґа-Гаусдорфа [18, с.400].

Таке ж включення для метризовних компактів X і Y довів і Ж.Сан-Ремо [22], але зовсім іншим простішим методом, використовуючи розбиття одиниці. Тут він також доводить, що для польських просторів X і Y і функції $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ множина $C_Y(f)$ залишкова, застосовуючи при цьому лише слабший варіант теореми D про те, що $C(f) \neq \varnothing$, якщо $f \in B_1(X, Y)$ і X та Y – метризовні компакти.

6. Узагальнення: дві характеризації метризовних компактів. Легко перевірити, що розглянуті в п.3 оператори B_n є неперервними як відображення з $C_p[0,1]$ в $C_u[0,1]$. Крім того, за теоремою A $B_n g \to g$ в $C_u[0,1]$. Тому тотожне відображення $I : C_p[0,1] \to C_u[0,1]$ є поточковою границею неперервних відображень $B_n : C_p[0,1] \to C_u[0,1]$, а значить належить до першого класу Бера $B_1(C_p[0,1], C_u[0,1])$. До речі, і оператори $L_n : C_p[0,1] \to C_u[0,1]$ з п.5 теж неперервні і $L_n \to I$ поточково. Узагальнюючи цю обставину, скажемо, що компакт Y є *компактом Бернштейна*, якщо тотожний оператор $I : C_p(Y) \to C_u(Y)$ належить до $B_1(C_p(Y), C_u(Y))$. Далі, компакт Y назвемо *компактом Бера*, якщо для кожного топологічного простору X виконується включення $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$. Виявляється, що ці два поняття рівносильні і еквівалентні тому, що Y – метризовний компакт. Щоб це довести, нам буде потрібний один результат Ґ.Вери [23, теорема 2] і один факт з книжки А.В. Архангельського [24, наслідок 0.3.7]. Перед їх формулюванням нагадаємо, що топологічний простір X має *властивість зліченності /дискретних/ ланцюжків*, якщо кожна диз'юнктна /дискретна/ система непорожніх відкритих множин в X не більш ніж зліченна. Ці властивості в літературі позначають відповідно символами $C.C.C.$ і $D.C.C.C.$ При цьому система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X називається *дискретною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл U в X, що $U \cap A \neq \varnothing$ хіба що для однієї множини $A \in \mathcal{A}$. Ясно, що кожна дискретна система множин є диз'юнктною, отже, $C.C.C. \Rightarrow D.C.C.C.$ Тепер ми можемо сформулювати потрібний нам результат.

Теорема F. (Ґ.Вера, [23, с.110]). Нехай X – цілком регулярний простір, Y – компактний простір, $f \in (X \times Y, \mathbb{R})$, $\varphi : X \to C_p(Y)$ і $\psi : Y \to C_p(X)$ – асоційовані з f відображення. Розглянемо такі умови: (a) підпростір $Y_f = \psi(Y)$ простору $C_p(Y)$ є метризовним; (b) підпростір $X_f = \varphi(X)$ простору $C_u(Y)$ чи лише $C_p(Y)$ є сепарабельним; (c) $f \in B_1(X \times Y)$; (d) відображення f вимірне за Бером, тобто належить до якогось класу Бера $B_\alpha(X \times Y)$ чи, інакше, є аналітично зображуваною функцією [18, с.401]. Тоді (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c)$\Rightarrow$(d). Якщо до того ж X має $D.C.C.C.$, то і (d)$\Rightarrow$(a).

Теорема G.([24, с.15]). Нехай X – цілком регулярний простір. Тоді простір $C_p(X)$ має $C.C.C.$

Тепер ми можемо братися за доведення основного результату статті.

Теорема 2. Нехай Y – компакт. Тоді наступні умови еквівалентні:

(i) Y – метризовний компакт;

(ii) Y – компакт Бернштейна;

(iii) Y – компакт Бера.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай Y – метризовний компакт і $d(y', y'') = |y' - y''|$ – метрика на Y, яка породжує його топологічну структуру. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки простір (Y, d) цілком обмежений, то існує скінченна ε-сітка в Y, тобто скінченна послідовність елементів $y_i = y_i(\varepsilon)$, де $j = 1, ..., m$, а $m = m(\varepsilon)$, така, що $Y = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B(y_j, \varepsilon)$, де $B(y_j, \varepsilon) = \{y \in Y : |y - y_j| < \varepsilon\}$ – відкрита куля в просторі (Y, d). Для кожного $j = 1, ..., m$ визначимо на Y функцію

$$\psi_j^\varepsilon(y) = \begin{cases} 1 - \frac{|y-y_j|}{\varepsilon}, \text{ якщо } |y - y_j| \leq \varepsilon, \\ 0, \text{ якщо } |y - y_j| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Зрозуміло, що функції ψ_j^ε неперервні і для їх носіїв маємо: $supp\ \psi_j^\varepsilon = B(y_j, \varepsilon)$. Далі по-

кладемо
$$\psi^\varepsilon(y)=\sum_{j=1}^m \psi_j^\varepsilon(y).$$
Оскільки кулі $B(y_j,\varepsilon)$ покривають простір Y, то $\psi^\varepsilon(y)>0$ на Y. Крім того, функція ψ^ε неперервна як скінченна сума таких функцій. Тому функції $\varphi_j^\varepsilon=\frac{\psi_j^\varepsilon}{\psi^j}$ визначені і неперервні на Y, $supp\ \varphi_j^\varepsilon=B(y_j,\varepsilon)$ і $\sum\limits_{j=1}^m \varphi_j^\varepsilon(y)=1$ на Y. Таким чином, ми побудували розбиття одиниці, підпорядковане покриттю $\{B(y_j,\varepsilon):j=1,...m\}$.

Візьмемо тепер $\varepsilon=\frac{1}{n}$, де $n\in\mathbb{N}$, і позначимо $y_{n,j}=y_j(\varepsilon),\ m_n=m(\varepsilon),\ \varphi_{n,j}=\varphi_j^\varepsilon(y)$. Для $g\in C(Y),\ y\in Y$ і $n\in\mathbb{N}$ покладемо
$$(T_ng)(y)=\sum_{j=1}^{m_n}\varphi_{n,j}(y)g(y_{n,j}).$$
Зрозуміло, що $T_ng\in C(Y)$ і $T_n:C(Y)\to C(Y)$ – лінійний оператор. Далі, $||T_ng||\le\varepsilon$, якщо $|g(y_{n,j})|\le\varepsilon$ для кожного $j=1,...,m_n$, отже, $T_n:C_p(Y)\to C_u(Y)$ – неперервне відображення.

Доведемо, що $g_n=T_ng\to g$ в $C_u(Y)$ для кожного $g\in C(Y)$. Нехай $g\in C(Y)$ і $\varepsilon>0$. Оскільки функція $g:Y\to\mathbb{R}$ рівномірно неперервна на метричному компакті (Y,d), то існує таке $\delta>0$, що
$$(\forall y',y''\in Y)(|y'-y''|<\delta\Rightarrow|g(y')-g(y'')|<\varepsilon).$$
Візьмемо номер N настільки великим, що $\frac{1}{N}<\delta$. Нехай $n\ge N$ і y – довільна точка з Y. Розглянемо такий номер $j=1,...,m_n$, що $y\in B(y_{n,j},\frac{1}{n})$. Тоді $|y-y_{n,j}|<\frac{1}{n}<\delta$, отже, $|g(y)-g(y_{n,j})|<\varepsilon$. Якщо ж $y\notin B(y_{n,j},\frac{1}{n})$, то $y\notin supp\ \varphi_{n,j}$, отже, $\varphi_{n,j}(y)=0$. Зважаючи на це, введемо у розгляд дві множини
$$J_1=\{j\in\overline{1,m_n}:y\in B(y_{n,j},\frac{1}{n})\}=$$
$$=\{j\in\overline{1,m_n}:|y-y_{n,j}|<\frac{1}{n})\}$$
і
$$J_2=\overline{1,m_n}\setminus J_1=\{j\in\overline{1,m_n}:|y-y_{n,j}|\ge\frac{1}{n})\}.$$
Оскільки $\sum\limits_{j=1}^{m_n}\varphi_{n,j}(y)=1$, то
$$g(y)=\sum_{j=1}^{m_n}\varphi_{n,j}(y)g(y).$$
Тому
$$g_n(y)-g(y)=\sum_{j=1}^{m_n}\varphi_{n,j}(y)(g(y_{n,j})-g(y))=$$
$$=\sum_{j\in J_1}\varphi_{n,j}(y)(g(y_{n,j})-g(y))+$$
$$+\sum_{j\in J_2}\varphi_{n,j}(y)(g(y_{n,j})-g(y))=$$
$$=\sum_{j\in J_1}\varphi_{n,j}(y)(g(y_{n,j})-g(y)).$$
В такому разі
$$|g_n(y)-g(y)|\le\sum_{j\in J_1}\varphi_{n,j}(y)|g(y_{n,j})-g(y)|<$$
$$<\varepsilon\sum_{j\in J_1}\varphi_{n,j}(y)\le\varepsilon\sum_{j=1}^{m_n}\varphi_{n,j}(y)=\varepsilon.$$
Таким чином, при $n\ge N$ маємо, що
$$|g_n(y)-g(y)|<\varepsilon$$
для кожного $y\in Y$, що і означає, що $g_n\to g$ в $C(Y)$, тобто послідовність неперервних операторів $T_n:C_p(Y)\to C_u(Y)$ поточково збігається до тотожного відображення $I:C_p(Y)\to C_u(Y)$. Таким чином, $I\in B_1(C_p(Y),C_u(Y))$, тобто Y – компакт Бернштейна.

$(ii)\Rightarrow(iii)$. Нехай Y – компакт Бернштейна і X – довільний топологічний простір. За означенням існує послідовність неперервних відображень $T_n:C_p(Y)\to C_u(Y)$, яка поточково збігається до тотожного відображення $I:C_p(Y)\to C_u(Y)$. Нехай $\varphi\in C(X,C_p(Y))$ і $\varphi_n=T_n\circ\varphi$. Відображення $\varphi_n:X\to C_u(Y)$ неперервне, як композиція двох неперервних відображень. Крім того, для кожного $x\in X$ маємо: $\varphi_n(x)=$

$T_n(\varphi(x)) \to \varphi(x)$ в $C_u(Y)$, отже, φ є поточковою границею послідовності неперервних відображень $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, звідки випливає, що $\varphi \in B_1(X, C_u(Y))$. Ми показали, що Y – це компакт Бера.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай Y – компакт Бера. Покладемо $X = C_p(Y)$. Простір X цілком регулярний, як гаусдорфовий топологічний векторний простір [25, п°32]. Крім того, за теоремою G простір X має $C.C.C.$, а значить, і $D.C.C.C.$, адже, компакт Y – це гаусдорфовий компактний простір, який є цілком регулярним, чи навіть, більше того, нормальним [26, с.199]. Розглянемо відображення обчислення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x(y)$. Зрозуміло, що $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$. Асоційоване з f відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ – це тотожне відображення $I : X \to X$, яке, ясно, неперервне. Оскільки Y – компакт Бера, то $\varphi = I \in B_1(X, C_u(Y))$, отже, існує послідовність неперервних функцій $\varphi_n : X \to C_u(Y)$, яка поточково збігається до відображення φ. Розглянемо на добутку $X \times Y$ функції $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y)$. За теоремою E $f_n \in C(X \times Y)$. Крім того, зрозуміло, що $f_n(x, y) = \varphi_n(x)(y) \to \varphi(x)(y) = x(y) = f(x, y)$ на $X \times Y$. Таким чином, $f \in B_1(X \times Y)$. Тоді за теоремою F простір $Y_f = \psi(Y)$ є метризовним в топології, індукованій з простору $C_p(X)$. Але асоційоване відображення $\psi : Y \to Y_f$ є бієктивним, адже Y є цілком регулярним, і неперервним. Оскільки Y – компакт, а простір Y_f гаусдорфовий, то відображення $\psi : Y \to Y_f$ є гомеоморфізмом. Тому з метризовності простору Y_f випливає метризовність простору Y. Таким чином, Y – це метризовний компакт.

7. Конаміоковість метризовних компактів. Ґ.Дебс [27] назвав компакт Y *конаміоковим*, якщо для кожного берівського простору і будь-якої нарізно нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ множина $C_Y(f)$ містить всюди щільну в X множину A типу G_δ, що рівносильно тому, що $C_Y(f)$ є залишковою в X. Скориставшись теоремою Банаха про категорію [18, с.87], легко перевірити [4, с.206], що компакт Y буде конаміоковим тоді і тільки тоді, коли для будь-якого топологічного простору X і довільної функції $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ множина $C_Y(f)$ є залишковою в X.

Добре відомо, що кожний метризовний компакт є конаміоковим (див., наприклад, [28] чи [29]). Тут ми можемо запропонувати нове доведення цього факту на основі теореми 2 і теорем D і E. Справді, нехай Y – метризовний компакт, X – довільний топологічний простір, $f \in CC(X \times Y, \mathbb{R})$ і $\varphi : X \to C_p(Y)$ – асоційоване з f відображення. За теоремою 2 $C(X, C_p(Y)) \subseteq B_1(X, C_u(Y))$. Оскільки $\varphi \in C(X, C_p(Y))$, то $\varphi \in B_1(X, C_u(Y))$. За теоремою E $C_Y(f) = C(\varphi)$, а за теоремою D множина $C(\varphi)$ залишкова в X. Отже, множина $C_Y(f)$ залишкова в X, що і треба було довести.

8. Перспектива. Нехай P_n – підпростір простору $C[0,1]$, що складається з усіх многочленів h степеня $\leq n$. Для функції $g \in C[0,1]$ розглянемо її найкраще рівномірне наближення многочленами P_n, тобто число $E_n(g) = d(g, P_n) = \inf\limits_{h \in P_n} ||g - h||$. Зрозуміло, що послідовність чисел $\alpha_n = E_n(g)$ спадає і прямує до нуля. С.Н. Бернштейн у 1938 році довів [30], що і навпаки для кожної спадної нескінченно малої послідовності чисел α_n існує така функція $g \in C[0,1]$, що $\alpha_n = E_n(g)$ для кожного n. Цей результат Бернштейна поклав початок дослідженню обернених задач теорії наближень, які інтенсивно проводились у другій половині XX століття (див. дисертацію О.Н. Нестеренка [31] і вказану в ній літературу).

У зв'язку з цим можна поставити деякі задачі, щодо нарізно і сукупно неперервних функцій. Нехай $f \in CC([0,1]^2, \mathbb{R})$ і $\varphi(x) = f^x$ для кожного $x \in [0,1]$. Покладемо $\alpha_n = E_n \circ \varphi$. Оскільки функції $E_n : C_u[0,1] \to C_u[0,1]$ неперервні, то $C(\varphi) \subseteq C(\alpha_n)$ для кожного n, зокрема, якщо $f \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, то відображення $\varphi : [0,1] \to C_u[0,1]$ неперервне, отже, $C(\varphi) = [0,1]$, а значить, і $C(\alpha_n) = [0,1]$, тобто всі функції α_n неперервні. Для нарізно неперервних функцій це вже не так, як показує приклад класичної функції Шварца $sp(x, y) - \frac{2xy}{x^2+y^2}$ при

$x^2 + y^2 \neq 0$ і $sp(0,0) = 0$ при $x^2 + y^2 = 0$. Тому природно виникають такі питання.

Питання 1. Чи для кожної нарізно неперервної функції $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ і кожного номера n справджується рівність $C(\alpha_n) = C(\varphi)$?

Питання 2. Чи для кожної поточково збіжної до нуля спадної послідовності неперервних функцій $\alpha_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ існує така сукупно неперервна функція $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, що $\alpha_n = E_n \circ \varphi$ для кожного n?

Питання 3. Описати всі можливі послідовності функцій $\alpha_n(x) = E_n(f^x)$, якщо f пробігає: а) множину $CC([0,1]^2, \mathbb{R})$; б) множину $C([0,1]^2, \mathbb{R})$.

9. Подяки. Автори дякують С.Н. Бернштейну, чиї прекрасні результати спонукали появу цієї роботи. Незважаючи на те, що С.Н. Бернштейн вже перейшов у вічність, автори все ж вважають, що висловлена ними подяка є немарною. Наступну подяку і поздоровлення автори висловлюють І.Ф. Григорчуку, який нещодавно відзначив своє 80-ліття. І.Ф. Григорчук був першим науковим керівником другого співавтора даної праці, він познайомив його з многочленами Бернштейна на своїх лекціях з математичного аналізу у 1967 - 69 роках у Чернівецькому університеті, а стаття [32], де узагальнювались многочлени Бернштейна, була була предметом перших наукових студій тодішнього першокурсника. Нарешті, автори вдячні В.В. Михайлюку і О.В. Маслюченку за корисні поради, зокрема, за вказівку використати результат Вери для доведення останньої імплікації в теоремі 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Talagrand M.* Espaces de Baire et espaces de Namioka // Math. Ann. – 1985. – **270**, №2. – P.159-164.

2. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real Anal. Exch. – 1985-86. – **11**, №2. – P.293-322.

3. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity. II // Real Anal. Exch. – 1989-1990. – **15**, №1. – P.248-256.

4. *Маслюченко В.К., Михайлюк О.В., Собчук О.В.* Дослідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнародної математичної конференції, присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С.192-246.

5. *Maslyuchenko V.* Connection between separate and joint properties of functions of several variables // International Conf. on Funct. Analysis and its Appl. Dedic. to the 110th ann. of Stefan Banach. May 28-31, 2002, Lviv. – P.135-136.

6. *Maslyuchenko V.K., Plichko A.M.* Some open problems on functional analysis and function theory // Extracta Math. – 2005. – **20**, №1. – P.51-70.

7. *Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Функції з діагоналлю скінченного класу // Всеукр. наук. конф., присв. 70-річчю нар. проф. П.С.Казимірського (5-7 жовтня 1995). Тези доп. Ч.І. – Львів, 1995. – С.82.

8. *Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Функції з діагоналлю скінченного класу Бера // Мат. студії. – 2000. – **14**, №1. – С.23-28.

9. *Романюк А.С.* Білінійні наближення класів періодичних функцій багатьох змінних // Міжнар. мат. конф. "Математичний аналіз і диференціальні рівняння та їх застосування", 18 - 23 вересня 2006 р., Ужгород. Тези доповідей. – С.89-90.

10. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. – Санкт-Петербург – Москва – Краснодар: Лань, 2005. – 464 с.

11. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В.* Про оператор переходу до поточкової границі // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С.77-79.

12. *Бернштейн С.Н.* Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на теории вероятностей (1912). Собрание сочинений, Т.1. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 105 с.

13. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете // Дис.... докт. фіз. - мат. наук. – Чернівці, 1999. – 345 с.

14. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles // Ann. Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P.1-123.

15. *Lebesque H.* Sur l'approximation des fonctions // Bull. Sci. Math. – 1898. – **22**. – P.278-287.

16. *Baire R.* Sur les fonctions discontinues développables enséries de fonctions continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. F. – 1898. – **126**. – P.884-887.

17. *Hahn H.* Reelle Funktionen. 1. Teil. Punktfunktionen. – Leipzig: Academische Verlagsgesellschaft M.B.H., 1932. – 416 S.

18. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.

19. *Карлова О.О., Куцак С.М., Маслюченко В.К.* Узагальнення теореми Бера на випадок неметризовного простору значень // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 228. Математика. – Чернівці: Рута, 2004. – С.11-14.

20. *Tsuji M.* On Baire's Theorem concerning a function $f(x, y)$, which is continuous with respect to each variable x and y // J. Math. Soc. Japan. – 1951. – **2**, №3-4. – P.210-212.

21. *Alexiewicz A., Orlicz W.* Sur la continuité et la classification des Baire de fonctions abstraites // Fund. Math. – 1948. – **35.** – P.105-126.

22. *Saint-Raymond J.* Fonctions séparément continues sur le produit de deux espaces polonais // Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse-15^{e}année, 1975-1976. – Communication **n2** – 3 p.

23. *Vera G.* Baire mesurability of separately continuous functions // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1988. – **39**. – P.109-116.

24. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 222 с.

25. *Маслюченко В.К.* Перші типи топологічних векторних просторів. – Чернівці: Рута, 2002. – 72 с.

26. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

27. *Debs G.* Points de continuité d'une function séparément continue // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **97**, N1. – P.167-176.

28. *Calbrix J., Troallic J.P.* Applications séparément continues // C.R. Acad. Sc. Paris. Séc. A. – 1979. – **288**. – P.647-648.

29. *Маслюченко В.К.* Задача Діні та рівномірна неперервність // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Вип. 46. Математика. – Чернівці: ЧДУ, 1999. – С.80-87.

30. Бернштейн С.Н. Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций (1938) // Собрание сочинений, Т.2. – М.: Издво АН СССР, 1954. – С.292-294.

31. Нестеренко О.Н. Обернена задача наближення та оцінки норм цілих функцій експоненціального типу і многочленів. Дис....канд. фіз. - мат. наук. – Київ, 2006. – 148 с.

32. Григорчук І.Ф. Оцінки функцій L-базису і одне узагальнення многочленів Бернштейна // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, №1. – С.18-25.