УДК 517.956

©2007 р. П.С. Ващук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

АСИМПТОТИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В ГУСТОМУ ДВОРІВНЕВОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3:2:1

Розглядається мішана крайова задача для рівняння Пуассона у дворівневому з'єднанні Ω_ε, яке є об'єднанням деякої області Ω_0 та великої кількості N тонких циліндрів. Тонкі циліндри розділено на два рівні в залежності від їх довжини і крайових умов, що задаються на їх бічних сторонах. Циліндри з кожного рівня ε-періодично чергуються. На бічних поверхнях циліндрів з першого рівня задано неоднорідні крайові умови Неймана, а на бічних поверхнях циліндрів з другого рівня – однорідні крайові умови Діріхле. Використовуючи метод узгодження асимптотичних розвинень та спеціальні розв'язки типу примежевого шару в зоні з'єднання, побудовано асимптотичне наближення для розв'язку даної задачі та доведено відповідні асимптотичні оцінки у просторі Соболєва $H^1(\Omega_\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ $(N \to +\infty)$..

We consider a mixed boundary-value problem for the Poisson equation in a two-level junction Ω_ε, which is the union of a domain Ω_0 and a large number $3N$ of thin cylinders. The thin cylinders are divided into two levels depending on their length and the boundary conditions given on their lateral surfaces. In addition, the thin cylinders from each level are ε-periodically alternated. The nonuniform Neumann conditions and the uniform Dirichlet conditions are given respectively on the lateral surfaces of the thin cylinders from the first level and the second level. Using the method of matched asymptotic expansions and special junction-layer solutions, we construct the asymptotic approximation for the solution and prove the corresponding estimates in the Sobolev space $H^1(\Omega_\varepsilon)$ as $\varepsilon \to 0$ $(N \to +\infty)$.

Постановка задачі. Існує два підходи для дослідження крайових задач в збурених областях (див., наприклад [1] – [8]). Перший полягає в доведенні теореми збіжності, а другий – в побудові асимптотичного наближення розв'язку задачі і доведенні відповідних асимптотичних оцінок. Для другого підходу потрібні сильніші припущення на праву частину, однак цей підхід частіше використовують для прикладних задач.

В даній роботі продовжується асимптотичне дослідження крайових задач в густих багаторівневих з'єднаннях, розпочате в [9] – [13]. Детальний огляд робіт по цій тематиці наведений в [13].

Нехай B – скінченне об'єднання гладких областей, які не дотикаються і не перетинаються, і строго лежать в одиничному квадраті

$$\square = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : \ 0 < \xi_1 < 1, 0 < \xi_2 < 1\}.$$

Розіб'ємо B на два класи: $B^{(1)} = \bigcup\limits_{k=1}^{K_1} B_k^{(1)}$ та $B^{(2)} = \bigcup\limits_{k=1}^{K_2} B_k^{(2)}$ (див. Рис.1).

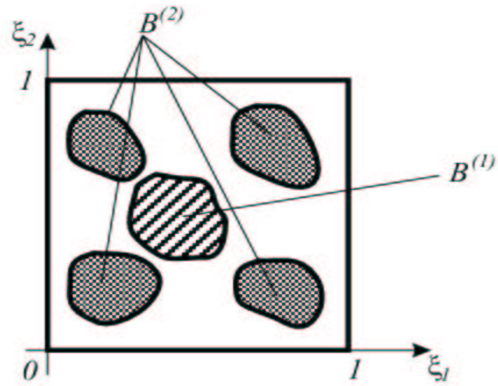

Рис. 1.

Для простоти викладу припустимо, що $B^{(1)} = B_{r_1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \{\xi : (\xi_1 - \frac{1}{2})^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < r_1^2\}$, а $B^{(2)}$ – це об'єднання чотирьох кругів $B_1^{(2)} = B_{r_2}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$,$B_2^{(2)} = B_{r_2}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$,$B_3^{(2)} =$

$B_{r_2}(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$,$B_4^{(2)} = B_{r_2}(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$. Тут $r_2 < r_1$ такі, що круги $B^{(1)}$ та $B^{(2)}$ не дотикаються і не перетинаються.

Модельне густе дворівневе з'єднання Ω_ε складається з тіла з'єднання $\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' = (x_1, x_2) \in I_0,\ 0 < x_3 < \gamma(x')\}$, де $\gamma \in C^1(I_0)$, $I_0 = (0,a)\times(0,a)$, $\min_{x'\in\overline{I_0}}\gamma(x') = \gamma_0 > 0$, та великої кількості тонких циліндрів

$$G_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{i,j=0}^{N-1}(x:\ (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in B^{(1)},$$

$$x_3 \in (-d_1, 0]),$$

$$G_\varepsilon^{(2)} = \bigcup_{i,j=0}^{N-1}\left(\bigcup_{k=1}^{4}\{x:\ (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in\right.$$

$$\left. B_k^{(2)},\ x_3 \in (-d_2, 0]\}\right).$$

Тут N – велике натуральне число, тому $\varepsilon = a/N$ – малий дискретний параметр, який характеризує відстань між сусідніми циліндрами і їх товщину; $0 < d_2 \le d_1$.

Таким чином, $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \bigcup G_\varepsilon^{(1)} \bigcup G_\varepsilon^{(2)}$. Тонкі циліндри розділені на два класи $G_\varepsilon^{(1)}$ і $G_\varepsilon^{(2)}$, і ці циліндри ε-періодично чергуються вздовж напрямків Ox_1 і Ox_2. Вони приєднуються до Ω_ε по ε-гомотетичних образах $\varepsilon(i+j+B^{(1)})$, $\quad i,j = 0,1,\ldots,N-1$, і $\varepsilon(i+j+B_k^{(2)})$, $\quad i,j = 0,1,\ldots,N-1$, $\quad k = 1,\ldots,4$, множин $B^{(1)}$ та $B^{(2)}$ відповідно. Комірка періодичності зображена на Рис. 2.

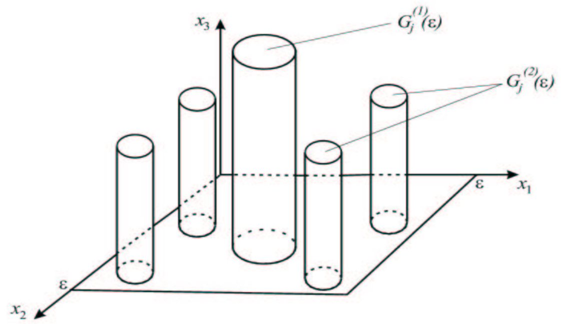

Рис. 2.

В Ω_ε розглядається наступна задача

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon(x) &= f_\varepsilon(x), && x \in \Omega_\varepsilon,\\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) &= \varepsilon g_\varepsilon(x), && x \in S_\varepsilon^{(1)},\\ u_\varepsilon(x) &= 0, && x \in S_\varepsilon^{(2)},\\ \partial_\nu u_\varepsilon(x) &= 0, && x \in \partial\Omega_\varepsilon \backslash (S_\varepsilon^{(1)} \cup S_\varepsilon^{(2)}), \end{aligned} \tag{1}$$

де $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$ - зовнішня нормальна похідна, $S_\varepsilon^{(i)}$ – об'єднання бічних поверхонь тонких циліндрів $G_\varepsilon^{(i)}$, $(i = 1,2)$. Таким чином, на бічних поверхнях циліндрів з другого рівня задані однорідні умови Діріхле, а на бічних поверхнях циліндрів з першого рівня – неоднорідні умови Неймана. На інших частинах межі дворівневого з'єднання Ω_ε задані однорідні умови Неймана.

Без втрати загальності вважаємо, що $f_\varepsilon \in L^2(\Omega_1)$, де $\overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_1$. Аналогічно $\overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}_0 \cup \overline{D}_2$. Тут $D_1 = I_0 \times (-d_1, 0)$ та $D_2 = I_0 \times (-d_2, 0)$ – паралелепіпеди, які заповнюються тонкими циліндрами відповідно з першого та другого рівня в граничному переході при $\varepsilon \to 0$.

Відносно функції g_ε зробимо наступні припущення: функція g_ε та її узагальнені похідні по x_1 та x_2 належать $L^2(D_1)$, крім того,

$$\exists\, C_0 > 0 \ \ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \|\partial_{x_i} g_\varepsilon(x)\|_{L^2(D_1)} \le C_0,$$

$i = 1,2$.

Означення 1. Функція $u_\varepsilon \in H_\varepsilon = \{u \in H^1(\Omega_\varepsilon) :\ u\big|_{S_\varepsilon^{(2)}} = 0\}$ називається узагальненим розв'язком задачі (1), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon \varphi\, dx + \varepsilon \int_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon \varphi\, d\sigma_x$$

$$\forall \varphi \in H_\varepsilon. \tag{2}$$

З основних положень теорії крайових задач випливає, що для кожного фіксованого значення $\varepsilon > 0$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1).

Мета нашого дослідження – побудувати асимптотичне наближення для розв'язку задачі (1) коли $\varepsilon \to 0$, тобто, коли число тонких циліндрів з кожного рівня нескінченно зростає, а їх товщина прямує до нуля, і довести відповідні асимптотичні оцінки.

Зовнішнє асимптотичне наближення. В данному пункті припустимо, що праві частини в (1) не залежать від ε, тобто, $f_\varepsilon = f_0$, $g_\varepsilon = g_0$ та f_0, g_0 – гладкі функції.

Шукаємо головні члени розв'язку u_ε, в області Ω_0, у формі

$$u(x,\varepsilon) \approx v_0^+(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k^+(x,\varepsilon), \qquad (3)$$

а в кожному з циліндрів $G_j^{(1)}(\varepsilon)$, $G_j^{(2)}(n,\varepsilon)$, $(j = (j_1,j_2)$, $j_1,j_2 = 0,\ldots,N-1$, $n = 1,\ldots,4)$ відповідно у формі

$$u(x,\varepsilon) \approx v_0^{(i,-)}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k v_k^{(i,-)}(x,\xi_1^j,\xi_2^j),$$

$$\xi_i^j = \varepsilon^{-1}x_i - j_i, \ \ i = 1,2. \qquad (4)$$

В (4), і надалі не відображена залежність від $n = 1,\ldots,4$, коли $i = 2$, оскільки асимптотичні наближення цих циліндрів однакові, надалі вважаємо, що $n = 1$.

Підставивши ряд (3) в задачу (1) і в крайові умови на $\Gamma_0 = \partial\Omega_0 \setminus I_0$, та збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо наступні співвідношення для функції v_0^+ :

$$\begin{array}{rcll} -\Delta v_0^+(x) &=& f_0(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &=& 0, & x \in \Gamma_0. \end{array}$$

Тепер знайдемо граничні співвідношення в прямокутниках D_i, $i = 1,2$. Розкладемо формально в ряди Тейлора функції $v_k^{(i,-)}$ по змінним x_1 та x_2 в околі точок $x_1 = \varepsilon(j_1 + b_1^{(i)})$, $x_2 = \varepsilon(j_2 + b_2^{(i)})$ і перейдемо до "швидкої" змінної $\xi' = x'/\varepsilon$, де $b_1^{(1)} = b_2^{(1)} = 1/2$, $b_1^{(2)} = b_2^{(2)} = 1/4$. Тоді (4) матиме вигляд

$$u(x,\varepsilon) \approx v_0^{(i,-)}(\varepsilon(j_1 + b_1^{(i)}), \varepsilon(j_2 + b_2^{(i)}), x_3) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_k^{i,j}(b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \xi', x_3), \quad x \in G_j^{(i)}(\varepsilon), \qquad (5)$$

де

$$\begin{gathered} V_k^{i,j}(b_1^{(i)}, b_2^{(i)}, \xi', x_3) = v_k^{(i,-)}(\varepsilon(j_1 + b_1^{(i)}), \\ \varepsilon(j_2 + b_2^{(i)}), x_3, \xi_1^j, \xi_2^j) + \\ + \sum_{m=1}^{k} \sum_{l=1}^{2} \frac{(\xi_l - j_l - b_l^{(i)})^m}{m!} \frac{\partial^m v_{k-m}^{(i,-)}}{\partial x_l^m} \times \\ \times \left(\varepsilon(j_1 + b_1^{(i)}), \varepsilon(j_2 + b_2^{(i)}), x_3, \xi_1^j, \xi_2^j\right). \qquad (6) \end{gathered}$$

Підставляючи ряд (5) в задачу (1) на стержнях $G_j^{(1)}(\varepsilon)$ з першого рівня і в умови Неймана, та збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε, ми отримаємо крайову задачу для змінної ξ'.

Задача для функції $V_1^{1,j}$ має наступний вигляд

$$\begin{array}{rcll} \nabla_{\xi'} V_1^{1,j}(1/2,1/2,\xi',x_3) &=& 0, & \xi' \in B^{(1)}, \\ \partial_{\nu_{\xi'}} V_1^{1,j}(1/2,1/2,\xi',x_3) &=& 0, & \xi' \in \partial B^{(1)}, \end{array} \qquad (7)$$

де змінна x_3 виступає як параметр в цій задачі. З (7) випливає, що функція $V_1^{1,j}$ не залежить від ξ'. Ми обмежимося лише головними членами асимптотики і покладемо $V_1^{1,j} \equiv 0$. Тоді, у відповідності до (6), будемо мати

$$\begin{gathered} v_1^{(1,-)}(\varepsilon(j_1 + 1/2), \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3, \xi_1^j, \xi_2^j) = \\ = (-\xi_1 + j_1 + 1/2)\partial_{x_1} v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1 + 1/2), \\ \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3) + (-\xi_2 + j_2 + 1/2) \times \\ \times \partial_{x_2} v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1 + 1/2), \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3). \end{gathered}$$

Задача для функції $V_2^{1,j}$ має наступний вигляд

$$\begin{gathered} -\nabla_{\xi'} V_2^{1,j}(1/2,1/2,\xi',x_3) = \\ = \partial_{x_3}^2 v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1 + 1/2), \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3) + \\ + f_0(\varepsilon(j_1 + 1/2), \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3), \qquad \xi' \in B^{(1)}, \\ \partial_{\nu_{\xi'}} V_2^{1,j}(1/2,1/2,\xi',x_3) = \\ = g_0(\varepsilon(j_1 + 1/2), \varepsilon(j_2 + 1/2), x_3), \xi' \in \partial B^{(1)}. \qquad (8) \end{gathered}$$

Записуючи необхідну і достатню умову існування розв'язку задачі (8) отримаємо таке звичайне диференціальне рівняння

$$-|B^{(1)}|\,\partial^2_{x_3} v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1{+}1/2),\varepsilon(j_2{+}1/2),x_3) = \\ = |B^{(1)}|\,f_0(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),x_3) + \\ + l g_0(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),x_3), \quad (9)$$

де $|B^{(1)}|$ – площа, а l – довжина кола, для круга $B^{(1)}$.

Якщо підставити (5) в умови Неймана на нижній частині циліндрів $G_j^{(1)}(\varepsilon)$, отримаємо

$$\partial_{x_3} v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),-d_1) = 0. \quad (10)$$

Оскільки сегменти $\{x : (\varepsilon^{-1}x_1 - j_1, \varepsilon^{-1}x_2 - j_2) \in B^{(1)},\ x_3 \in [-d_1, 0]\}$, $j_1, j_2 = 0,1,\ldots,N{-}1$, заповнюють паралелепіпед $\overline{D}_1$ в граничному переході, коли $\varepsilon \to 0$ ($N \to +\infty$), ми можемо продовжити диференціальне рівняння (9) на весь паралелепіпед D_1, а співвідношення (10) на $I_{d_1} = \{x :\ x' \in I_0,\ x_3 = -d_1\}$.

Підставимо тепер ряд (5) в задачу (1) на циліндрах $G_j^{(2)}(\varepsilon)$ з другого рівня. У відповідності до умов Діріхле, маємо $v_0^{(2,-)} \equiv 0$.

Задача для функції $V_1^{2,j}(1/4,1/4,\xi',x_3)$ визначається наступним чином

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi'} V_1^{2,j}(1/4,1/4,\xi',x_3) &= 0, \quad \xi' \in B_1^{(2)}, \\ V_1^{2,j}(1/4,1/4,\xi',x_3) &= 0, \quad \xi' \in \partial B_1^{(2)}, \end{aligned}$$

звідки $V_1^{2,j} \equiv 0$. Тоді, згідно з (6), маємо $v_1^{(2,-)}(\varepsilon(j_1+1/4),\varepsilon(j_2+1/4),x_3,\xi_1^j,\xi_2^j) = 0$. Задача для $V_2^{2,j}$ має наступний вигляд

$$-\nabla_{\xi'} V_2^{2,j}(1/4,1/4,\xi',x_3) = \\ = f_0(\varepsilon(j_1+1/4),\varepsilon(j_2+1/4),x_3), \quad \xi' \in B_1^{(2)}, \\ V_2^{2,j}(1/4,1/4,\xi',x_3) = 0, \quad \xi' \in \partial B_1^{(2)}.$$

У відповідності до (6), маємо $v_2^{(2,-)}(\varepsilon(j_1+1/4),\varepsilon(j_2+1/4),x_3,\xi_1^j,\xi_2^j) = V_2^{(2,j)}(\varepsilon(j_1+1/4),\varepsilon(j_2+1/4),x_3)$.

Отже, асимптотичні наближення на циліндрах з другого рівня починаються з доданку, який має порядок $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$:

$$\varepsilon^2 v_2^{(2,-)}(\varepsilon(j_1+b_1^{(2)}),\varepsilon(j_2+b_2^{(2)}),x_3) + \\ + \sum_{k=3}^{\infty} \varepsilon^k V_k^{2,j}(b_1^{(2)},b_2^{(2)},x_3),\ x \in G_j^{(2)}(n,\varepsilon), \quad (11)$$

де $(b_1^{(2)}, b_2^{(2)})$ – центри кругів $B_n^{(2)}$, $n = 1,\ldots 4$.

Зрозуміло, що перші члени асимптотичного наближення повинні співпадати в зоні з'єднання I_0. Тому з одного боку, на підставі (11) та (3), $v_0^+(\varepsilon(j_1+b_1^{(2)}),\varepsilon(j_2+b_2^{(2)}),0) = 0$, $j_1,j_2 = 0,1,\ldots,N-1, k = 1,\ldots 4$. З іншого боку, $v_0^+(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),0) = v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),0)$, $j_1,j_2 = 0,1,\ldots,N-1$. Це можливо, коли

$$v_0^+(x',0) = v_0^{(1,-)}(x',0) = 0, \quad x' \in I_0.$$

Таким чином, отримуємо, що перші члени асимптотичного наближення (3) і (4) на $G_\varepsilon^{(1)}$ повинні бути розв'язками наступних задач

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v_0^+(x) &=& f_0(x), & x \in \Omega_0, \\ \partial_\nu v_0^+(x) &=& 0, & x \in \Gamma_0, \\ v_0^+(x',0) &=& 0, & x' \in I_0, \end{array} \right. \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{cl} -|B^{(1)}|\,\partial^2_{x_3} v_0^{(1,-)}(x) = & \\ = |B^{(1)}|\,f_0(x) + l g_0(x), & x \in D_1, \\ v_0^{(1,-)}(x',0) = 0, & x' \in I_0, \\ \partial_{x_2} v_0^{(1,-)}(x',-d_1) = 0, & x' \in I_0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Очевидно, що існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (12) який належить простору Соболєва $H^1(\Omega_0, I_0) = \{u \in H^1(\Omega_0) :\ u = 0 \text{ на } I_0\}$. Легко порахувати, що

$$v_0^{(1,-)}(x) = -\,x_3 \int_{-d_1}^{x_3} \big(f_0(x',t) + l|B^{(1)}|^{-1} \times \\ \times g_0(x',t)\big)\,dt \ - \int_{x_3}^{0} t\big(f_0(x',t) + \\ + l|B^{(1)}|^{-1} g_0(x',t)\big)\,dt. \quad (14)$$

Отже, асимптотичне наближення на циліндрах $G_j^{(1)}(\varepsilon)$ має вигляд

$$v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),x_3)+ \\ +\varepsilon(-\xi_1+j_1+1/2)\partial_{x_1}v_0^{(1,-)}(\varepsilon(j_1+1/2), \\ \varepsilon(j_2+1/2),x_3)+\varepsilon(-\xi_2+j_2+1/2)\partial_{x_2}v_0^{(1,-)}(\varepsilon\times \\ \times(j_1+1/2),\varepsilon(j_2+1/2),x_3)+ \\ +\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k V_k^{1,j}(1/2,1/2,\xi',x_3).$$

Якщо розглянути функцію

$$R(x)=\begin{cases} v_0^+(x), & x\in\Omega_0,\\ v_0^{(1,-)}(x)+\Lambda(x), & x\in G_\varepsilon^{(1)},\\ 0, & x\in G_\varepsilon^{(2)}, \end{cases} \quad (15)$$

де $\Lambda(x) = \varepsilon Y_1(x_1/\varepsilon)\partial_{x_1}v_0^{(1,-)}(x) + \varepsilon Y_2(x_2/\varepsilon)\partial_{x_2}v_0^{(1,-)}(x)$, як перше наближення для розв'язку задачі (1), то вона залишає нев'язку

$$\int\limits_{I_0\cap G_\varepsilon^{(1)}} \big(\partial_{x_3}v_0^+(x',0)-|B^{(1)}|\times \\ \times\partial_{x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)\big)\varphi(x',0)\,dx', \quad \varphi\in H_\varepsilon \quad (16)$$

у відповідній інтегральній тотожності. В (15) $Y_i(t_i)=-t_i+\frac{1}{2}+[t_i]$, де $[t_i]$ ціла частина t_i, $i=1,2$. Щоб позбутися цієї нев'язки, ми повинні побудувати спеціальне внутрішнє асимптотичне наближення поблизу зони приєднання I_0.

Внутрішнє асимптотичне наближення. Біля зони приєднання I_0 розглянемо "швидкі" змінні $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, де $\xi_1=x_1/\varepsilon$, $\xi_2=x_2/\varepsilon$, $\xi_3=x_3/\varepsilon$. Перейшовши до границі коли $\varepsilon\to 0$, ми бачимо, що стержні $G_0^{(1)}(\varepsilon)$, $G_0^{(2)}(n,\varepsilon)$, $n=1,\ldots,4$. переходять в такі напів обмежені циліндри

$$\Pi_1^-=B^{(1)}\times(-\infty,0),$$

$$\Pi_{2,n}^-=B_n^{(2)}\times(-\infty,0),\ n=1,\ldots,4.$$

Область Ω_0 переходить в першу чверть $\{\xi:\xi_1>0,\xi_2>0,\xi_3>0\}$. Взявши до уваги періодичність тонких циліндрів, ми будемо вважати, що область $\Pi=\Pi^+\cup\Pi_1^-\cup\Pi_2^-$, де $\Pi_2^-=\cup_{n=1}^4\Pi_{2,n}^-$, $\Pi^+=(0,1)^2\times(0,+\infty)$, це базова область в якій потрібно розглядати задачу примежевого шару.

Очевидно, що розв'язок цієї задачі повинен бути 1-періодичним по ξ_1 та ξ_2

$$\partial_{\xi_\alpha}^p Z(\xi)|_{\xi_\alpha=0}=\partial_{\xi_\alpha}^p Z(\xi)|_{\xi_\alpha=1},$$

$$\xi\in\partial\Pi^+,\ \xi_3>0,\ p=0,1,\ \alpha=1,2. \quad (17)$$

Шукаємо перші члени внутрішнього наближення у вигляді

$$u_\varepsilon(x)=\varepsilon\big(Z_1\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\partial_{x_3}v_0^+(x',0)+ \\ +\Xi_1\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\big(|B^{(1)}|^{-1}\partial_{x_3}v_0^+(x',0)- \\ -\partial_{x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)\big)\big)+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (18)$$

де функції $Z_1(\xi)$, $\Xi_1(\xi)$, $\xi\in\Pi$ – 1-періодичні по ξ_1 та ξ_2. Останній доданок в (18) нейтралізує залишок (16).

Підставляючи (18) в задачу (1) і у відповідні крайові умови, взявши до уваги, що оператор Лапласа має вигляд $\varepsilon^{-3}\Delta_\xi$ по змінних ξ, та збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε, отримаємо, що функція Z_1 має бути не тривіальним розв'язком наступної задачі

$$\begin{array}{ll} -\Delta Z_1(\xi)=0, & \xi\in\Pi,\\ \partial_{\xi_1}^p Z_1(\xi)|_{\xi_1=0}=\partial_{\xi_\alpha}^p Z_1(\xi)|_{\xi_\alpha=1}, & \xi\in\partial\Pi^+,\xi_3>0,\ p=0,1,\ \alpha=1,2,\\ \partial_{\xi_3}Z_1(\xi',0)=0, & \xi'\in(0,1)^2\setminus\widehat{I},\\ [Z_1]_{|\xi_3=0}=[\partial_{\xi_3}Z_1]_{|\xi_3=0}=0, & \xi'\in\widehat{I},\\ Z_1(\xi)=0, & \xi\in S_2^-,\\ \partial_{\nu_{\xi'}}Z_1(\xi)=0, & \xi\in S_1^-, \end{array} \quad (19)$$

де $\widehat{I}=\bigcup\limits_{n=1}^4 B_n^{(2)}\cup B^{(1)}$; $S_2^-=\bigcup\limits_{n=1}^4(\partial\Pi_{2,n}^-\setminus B_n^{(2)})$; $S_1^-=\partial\Pi_1^-\setminus B^{(1)}$; дужки $[\cdot]$ позначають стрибок вказаної величини.

Функція Ξ_1 має бути розв'язком наступної задачі

$$\begin{aligned}
&-\Delta\Xi_1(\xi)=0, &&\xi\in\Pi;,\\
&\partial^p_{\xi_\alpha}\Xi_1(\xi)|_{\xi_\alpha=0}=\partial^p_{\xi_\alpha}\Xi_1(\xi)|_{\xi_\alpha=1}, &&\xi\in\partial\Pi^+,\xi_3>0,\ p=0,1,\ \alpha=1,2;\\
&\partial_{\xi_3}\Xi_1(\xi',0)=0, &&\xi'\in(0,1)^2\setminus\widehat{I};\\
&[\Xi_1]_{|_{\xi_3=0}}=0, &&\xi'\in\widehat{I};\\
&[\partial_{\xi_3}\Xi_1]_{|_{\xi_3=0}}=0, &&\xi'\in\bigcup_{n=1}^{4}B_n^{(2)};\\
&[\partial_{\xi_3}\Xi_1]_{|_{\xi_3=0}}=1, &&\xi'\in B^{(1)};\\
&\Xi_1(\xi)=0, &&\xi\in S_2^-;\\
&\partial_{\nu_{\xi'}}\Xi_1(\xi)=0, &&\xi\in S_1^-.
\end{aligned}\tag{20}$$

Аналогічно, як в [13, 15, 16], доводимо наступне твердження.

Твердження 1. *Існує єдиний узагальнений розв'язок Z_1 задачі (19), який має таку асимптотику:*

$$Z_1(\xi)=\begin{cases}\xi_3+\alpha^++\mathcal{O}(\exp(-\delta_1\xi_3)),\\ |B^{(1)}|^{-1}\xi_3+\alpha^-+\mathcal{O}(\exp(\delta_1\xi_3)),\\ \mathcal{O}(\exp(\delta_1\xi_3)),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\xi_3\to+\infty,\ \xi\in\Pi^+,\\ \xi_3\to-\infty,\ \xi\in\Pi_1^-,\\ \xi_3\to-\infty,\ \xi\in\Pi_2^-,\end{cases}\tag{21}$$

де $\alpha^\pm$ – деякі фіксовані константи; δ_1 - деяке додатне число. Крім того, функція Z_1 парна по ξ_3 відносно $1/2$.

Для того, щоб знайти невідомі константи $\alpha_i^\pm$ в (21), необхідно підставити функцію Z_i в другу формулу Гріна в області $\Pi^+\cap\{\xi:\ 0<\xi_3<R\}$, $\Pi_1^-\cap\{\xi:\ -R<\xi_3<0\}$, $\Pi_{2,n}^-\cap\{\xi:\ -R<\xi_3<0\}$, $n=1,\dots,4$, і перейти до границі коли $R\to\infty$. В результаті отримуємо

$$\alpha^+=\int\limits_{[0,1]^2\setminus(\cup_{n=1}^4B_n^{(2)})}Z_1(\xi',0)\,d\xi',$$

$$\alpha^-=\frac{1}{|B^{(1)}|}\int\limits_{B^{(1)}}Z_1(\xi',0)\,d\xi'.\tag{22}$$

Міркуючи так само як в [13], отримаємо твердження.

Твердження 2. *Існує єдиний узагальнений розв'язок Ξ_1 задачі (20), який має таку асимптотику:*

$$\Xi_1(\xi)=\begin{cases}\beta^++\mathcal{O}(\exp(-\delta_2\xi_3)),\\ \beta^-+\mathcal{O}(\exp(\delta_2\xi_3)),\\ \mathcal{O}(\exp(\delta_2\xi_3)),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\xi_3\to+\infty,\ \xi\in\Pi^+,\\ \xi_3\to-\infty,\ \xi\in\Pi_1^-,\\ \xi_3\to-\infty,\ \xi\in\Pi_2^-,\end{cases}\tag{23}$$

де $\beta^\pm$ деякі фіксовані константи; δ_2 – деяке додатне число. Крім того, функція Ξ_1 парна по ξ_3 відносно $1/2$.

Так само, як ми отримали (22), отримуємо

$$\beta^+=\int\limits_{[0,1]^2\setminus(\cup_{n=1}^4B_n^{(2)})}\Xi_1(\xi',0)\,d\xi',$$

$$\beta^-=\frac{1}{|B^{(1)}|}\int\limits_{B^{(1)}}\Xi_1(\xi',0)\,d\xi'.$$

Побудова асимптотичного наближення. Використовуючи функції v_0^+, $v_0^{(1,-)}$, Z_1, Ξ_1 визначені в попередньому пункті і зрізаючу функцію $\chi_1\in C^\infty(\mathbb{R})$, таку, що

$$\chi_1(x_3)=\begin{cases}1, & |x_3|\le\lambda_1/2,\\ 0, & |x_3|\ge\lambda_1,\end{cases}$$

де $\lambda_1=2^{-1}\min\{\gamma_0,d_1,d_2\}$, побудуємо апроксимаційну функцію $R_\varepsilon\in H_\varepsilon$:

$$R_\varepsilon^+(x):=R_\varepsilon(x)=v_0^+(x)+\varepsilon\chi_1(x_3)N^+(\xi,x')|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}},\quad x\in\Omega_0,\tag{24}$$

$$\begin{aligned}R_\varepsilon^{(1,-)}(x)&:=R_\varepsilon(x)=v_0^{(1,-)}(x)+\\ &+\varepsilon\big(Y_1(\xi_1)\partial_{x_1}v_0^{(1,-)}(x)+Y_2(\xi_2)\partial_{x_2}v_0^{(1,-)}(x)+\\ &+\chi_1(x_3)N^{(1,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}},\quad x\in G_\varepsilon^{(1)},\end{aligned}\tag{25}$$

$$R_\varepsilon^{(2,-)}(x) := R_\varepsilon(x) = \varepsilon\,\chi_1(x_3)\,N^{(2,-)}(\xi,x')|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}},$$
$$x \in G_\varepsilon^{(2)}, \qquad (26)$$

де Y_i визначена в (15); функції $N^+(\xi,x')$, $N^{(1,-)}(\xi,x')$, $N^{(2,-)}(\xi,x')$ – 1-періодичні по ξ_1, ξ_2 і

$$N^+(\xi,x') = (Z_1(\xi)-\xi_3)\partial_{x_3}v_0^+(x',0)+$$
$$+\Xi_1(\xi)\big(\partial_{x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)-|B^{(1)}|^{-1}\partial_{x_3}v_0^+(x',0)\big),$$
$$\xi_3>0,$$

$$N^{(1,-)}(\xi,x') = (Z_1(\xi)-|B^{(1)}|^{-1}\xi_3)\partial_{x_3}v_0^+(x',0)+$$
$$+\Xi_1(\xi)\big(\partial_{x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)-|B^{(1)}|^{-1}\partial_{x_3}v_0^+(x',0)\big),$$
$$\xi_3<0,\ \xi\in\Pi_1^-,$$

$$N^{(2,-)}(\xi,x') = Z_1(\xi)\partial_{x_3}v_0^+(x',0)+$$
$$+\Xi_1(\xi)\big(\partial_{x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)-|B^{(1)}|^{-1}\partial_{x_3}v_0^+(x',0)\big),$$
$$\xi_3<0,\ \xi\in\Pi_2^-.$$

Легко порахувати, що $R_\varepsilon^+(x',0) = R_\varepsilon^{(2,-)}(x',0)$, $x'\in I_0\cap G_\varepsilon^{(2)}$, а також $R_\varepsilon^+(x',0) = R_\varepsilon^{(1,-)}(x',0)$, $x'\in I_0\cap G_\varepsilon^{(1)}$. Отже, $R_\varepsilon\in H_\varepsilon$. Крім того, $[\partial_{x_2}R_\varepsilon]_{|x_3=0}=0$, $x'\in I_0\cap G_\varepsilon^{(2)}$, та

$$[\partial_{x_3}R_\varepsilon]_{|x_3=0} = -\varepsilon Y_1(\xi_1)\partial^2_{x_3x_1}v_0^{(1,-)}(x',0)-$$
$$\varepsilon Y_2(\xi_2)\partial^2_{x_3x_2}v_0^{(1,-)}(x',0), \quad x'\in I_0\cap G_\varepsilon^{(1)}. \qquad (27)$$

Теорема 1. *Нехай $f_0\in C_0^2(\Omega_1)$, $g_0\in C_0^2(D_1)$. Тоді для довільного $\delta_0\in(0,1)$ існують додатні константи C_1,ε_0 такі, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ різниця між розв'язком u_ε задачі (1) і апроксимаційною функцією R_ε, визначеною в (24)-(26), задовольняє наступну оцінку*

$$\|u_\varepsilon-R_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_1\Bigg(\varepsilon^{1-\delta_0}+\varepsilon+$$
$$+\|f_\varepsilon-f_0\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})}+\|g_0-g_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})}\Bigg). \qquad (28)$$

Доведення. 1. Нев'язки в області Ω_0. Взявши до уваги властивості функцій Z_1, Ξ_1, v_0^+ та f_0, g_0, переконуємося, що R_ε^+ задовольняє усі крайові умови задачі (1) на $\partial\Omega_0\cap\partial\Omega_\varepsilon$. Підставляючи R_ε^+ в рівняння задачі (1), маємо

$$-\Delta_x R_\varepsilon^+(x)-f_\varepsilon(x)=$$
$$=-\chi_1'(x_3)\,(\partial_{\xi_3}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}-$$
$$-\chi_1(x_3)\,(\partial^2_{x_1\xi_1}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}-$$
$$-\chi_1(x_3)\,(\partial^2_{x_2\xi_2}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}-\varepsilon\partial_{x_3}(\chi_1'(x_3)\times$$
$$N^+(x/\varepsilon,x'))-\varepsilon\chi_1(x_3)\,\partial_{x_1}(\partial_{x_1}N^+(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon})-$$
$$-\varepsilon\chi_1(x_3)\,\partial_{x_2}(\partial_{x_2}N^+(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon})-(f_\varepsilon(x)-$$
$$-f_0(x)),\ x\in\Omega_0. \quad (29)$$

Аргументи функцій які входять в обчислення, записуються тільки тоді, коли їх відсутність може викликати непорозуміння. Помножимо рівність (29) на тестову функцію $\psi\in H_\varepsilon$ і проінтегруємо частинами в Ω_0

$$\int_{I_0\cap\Omega_\varepsilon}\partial_{x_3}R_\varepsilon^+(x',0)\,\psi\,dx'+\int_{\Omega_0}\nabla_x R_\varepsilon^+\cdot\nabla_x\psi dx-$$
$$-\int_{\Omega_0}f_\varepsilon\psi dx = Q_1^+(\varepsilon,\psi)+\dots+Q_7^+(\varepsilon,\psi),$$
$$(30)$$

де

$$Q_1^+(\varepsilon,\psi)=$$
$$=-\int_{\Omega_0}\chi_1'(x_3)\,(\partial_{\xi_3}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}\psi\,dx,$$

$$Q_2^+(\varepsilon,\psi)=$$
$$=-\int_{\Omega_0}\chi_1(x_3)\,(\partial^2_{x_1\xi_1}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}\psi\,dx,$$

$$Q_3^+(\varepsilon,\psi)=$$
$$=-\int_{\Omega_0}\chi_1(x_3)\,(\partial^2_{x_2\xi_2}N^+(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon}\psi\,dx,$$

$$Q_4^+(\varepsilon,\psi)=\varepsilon\int_{\Omega_0}\chi_1'(x_3)\,N^+(x/\varepsilon,x')\,\partial_{x_3}\psi dx,$$

$$Q_5^+(\varepsilon,\psi)=$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} \chi_1(x_3) \left(\partial_{x_1} N^{+}(\xi, x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\, \partial_{x_1}\psi\, dx,$$

$$Q_6^{+}(\varepsilon,\psi) =$$
$$= \varepsilon \int\limits_{\Omega_0} \chi_1(x_3) \left(\partial_{x_2} N^{+}(\xi, x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\, \partial_{x_2}\psi\, dx,$$

$$Q_7^{+}(\varepsilon,\psi) = -\int\limits_{\Omega_0} (f_\varepsilon(x) - f_0(x))\,\psi\, dx.$$

2. Нев'язки в тонких стержнях з першого рівня. Легко порахувати $\partial_{x_3} R_\varepsilon^{(1,-)}(x', -d_1) = 0$, та

$$\begin{aligned}\partial_\nu R_\varepsilon^{1,-} = {}& \varepsilon\nu_1\big(Y_1(\xi_1)\partial^2_{x_1x_1} v_0^{(1,-)}(x) + \\ & + Y_2(\xi_2)\partial^2_{x_1x_2} v_0^{(1,-)}(x) + \\ & + \chi_1(x_3)(\partial_{x_1} N^{(1,-)}(\xi,x'))|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}} + \varepsilon\nu_2 \times \\ & \times \big(Y_1(\xi_1)\partial^2_{x_2x_1} v_0^{(1,-)}(x) + Y_2(\xi_2)\partial^2_{x_2x_2} v_0^{(1,-)}(x) + \\ & + \chi_1(x_3)(\partial_{x_2} N^{(1,-)}(\xi,x'))|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}\big), \ x \in S_\varepsilon^{(1)}.\end{aligned} \tag{31}$$

Підставляючи $R_\varepsilon^{(1,-)}$ в диференціальне рівняння задачі (1), отримуємо

$$\begin{aligned}& -\Delta_x R_\varepsilon^{(1,-)}(x) - f_\varepsilon(x) = \\ & = -\chi_1'(x_3)\,(\partial_{\xi_3} N^{(1,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \chi_1(x_3)\times \\ & \times (\partial^2_{x_1\xi_1} N^{(1,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \chi_1(x_3)\times \\ & \times (\partial^2_{x_2\xi_2} N^{(1,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \varepsilon\partial_{x_3}(\chi_1'(x_3)\times \\ & \times N^{(1,-)}(x/\varepsilon,x')) - \\ & -\varepsilon\chi_1(x_3)\,\partial_{x_1}\big(\partial_{x_1} N^{(1,-)}(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon}\big) - \varepsilon\chi_1(x_3)\times \\ & \times \partial_{x_2}\big(\partial_{x_2} N^{(1,-)}(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon}\big) - (f_\varepsilon(x) - f_0(x)) - \\ & -\varepsilon\,\mathrm{div}\Big(Y_1\big(\frac{x_1}{\varepsilon}\big)\nabla_x\big(\partial_{x_1} v_0^{(1,-)}\big)\Big) + \varepsilon\,\mathrm{div}\Big(Y_2\big(\frac{x_2}{\varepsilon}\big)\times \\ & \times \nabla_x\big(\partial_{x_2} v_0^{(1,-)}\big)\Big) + l|B^{(1)}|^{-1} g_0(x), \quad x \in G_\varepsilon^{(1)}.\end{aligned} \tag{32}$$

Аналогічно як в [17], для 1-періодичного продовженя по ξ_1 та ξ_2 розв'язку Y наступної задачі

$$\begin{array}{rcll} \Delta_\xi Y(\xi) & = & l|B^{(1)}|^{-1}, & \xi \in B^{(1)}, \\ \partial_{\nu(\xi)} Y(\xi) & = & 1, & \xi \in \partial B^{(1)}, \\ \int\limits_{B^{(1)}} Y\, d\xi & = & 0, & \end{array}$$

виводимо наступну інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}\varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} v\, d\sigma_x = \int\limits_{-d_1}^{0} \int\limits_{\bigcup_{i,j=0}^{N-1} \varepsilon(i+j+B^{(1)})} \Big(\frac{l}{|B^{(1)}|} v + \\ + \varepsilon\nabla_{\frac{x'}{\varepsilon}} Y\big(\frac{x'}{\varepsilon}\big)\cdot\nabla_{x'} v\Big)\, dx' dx_3, \forall\, v \in H^1\big(G_\varepsilon^{(1)}\big).\end{aligned} \tag{33}$$

Взявши до уваги (27) та значення $\partial_\nu R_\varepsilon^{-}$ (див. (31)), ми помножимо (32) на тестову функцію $\psi \in H_\varepsilon$ і проінтегруємо частинами в $G_\varepsilon^{(1)}$. Отримаємо

$$\begin{aligned}& -\int\limits_{I_0\cap G_\varepsilon^{(1)}} \partial_{x_3} R_\varepsilon^{+}(x',0)\,\psi(x',0)\,dx' + \\ & + \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_x R_\varepsilon^{(1,-)}\cdot\nabla_x\psi\,dx - \\ & - \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} f_\varepsilon\psi dx - \varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\,\psi\,d\sigma_x = \\ & Q_1^{1,-}(\varepsilon,\psi) + \ldots + Q_{10}^{1,-}(\varepsilon,\psi),\end{aligned} \tag{34}$$

де

$$Q_1^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$
$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1'(x_3)\left(\partial_{\xi_3} N^{(1,-)}(\xi,x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_2^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$
$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1(x_3)\left(\partial^2_{x_1\xi_1} N^{(1,-)}(\xi,x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_3^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$
$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1(x_3)\left(\partial^2_{x_2\xi_2} N^{(1,-)}(\xi,x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_4^{1,-}(\varepsilon,\psi) = \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1'(x_3)\,N^{(1,-)}(x/\varepsilon,x')\,\partial_{x_3}\psi\,dx,$$

$$Q_5^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$
$$= \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1(x_3)\left(\partial_{x_1} N^{(1,-)}(\xi,x')\right)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\partial_{x_1}\psi\,dx,$$

$$Q_6^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \chi_1(x_3)\,\big(\partial_{x_2} N^{(1,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\partial_{x_2}\psi\,dx,$$

$$Q_7^{1,-}(\varepsilon,\psi) = -\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \big(f_\varepsilon(x)-f_0(x)\big)\,\psi\,dx,$$

$$Q_8^{1,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_1\big(\frac{x_1}{\varepsilon}\big)\nabla_x\big(\partial_{x_1} v_0^{(1,-)}\big)\cdot\nabla_x\psi\,dx,$$

$$Q_9^{1,-}(\varepsilon,\psi) = \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} Y_2\big(\frac{x_2}{\varepsilon}\big)\nabla_x\big(\partial_{x_2} v_0^{(1,-)}\big)\cdot\nabla_x\psi\,dx,$$

$$Q_{10}^{1,-}(\varepsilon,\psi) = \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \big(g_0(x)-g_\varepsilon(x)\big)\,\psi(x)\,d\sigma_x -$$

$$-\varepsilon l|B^{(1)}|^{-1}\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \nabla_{\xi'}Y\big(\frac{x'}{\varepsilon}\big)\cdot\nabla_{x'}(g_0\,\psi)\,dx.$$

3. Нев'язки в стержнях з другого рівня. Легко порахувати, що $\partial_{x_3}R_\varepsilon^{(2,-)}(x',-d_2)=0$ і $R_\varepsilon^{(2,-)}(x)=0$ на $S_\varepsilon^{(2)}$. Підставляючи $R_\varepsilon^{(2,-)}$ в диференціальне рівняння задачі (1), отримаємо

$$\begin{aligned}
&-\Delta_x R_\varepsilon^{(2,-)}(x) - f_\varepsilon(x) = -\chi_1'(x_3)\times\\
&\times\,(\partial_{\xi_3}N^{(2,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \chi_1(x_3)\times\\
&\times\,(\partial^2_{x_1\xi_1}N^{(2,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \chi_1(x_3)\times\\
&\times\,(\partial^2_{x_2\xi_2}N^{(2,-)}(\xi,x'))|_{\xi=x/\varepsilon} - \varepsilon\partial_{x_3}(\chi_1'(x_3)\times\\
&\times\,N^{(2,-)}(x/\varepsilon,x')) - \varepsilon\chi_1(x_3)\times\\
&\times\,\partial_{x_1}\big(\partial_{x_1}N^{(2,-)}(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon}\big) - \varepsilon\chi_1(x_3)\times\\
&\times\partial_{x_2}\big(\partial_{x_2}N^{(2,-)}(\xi,x')|_{\xi=x/\varepsilon}\big) - f_\varepsilon(x),\ x\in G_\varepsilon^{(2)}.
\end{aligned}\qquad(35)$$

Помножимо (35) на тестову функцію $\psi\in H_\varepsilon$ і проінтегруємо частинами в $G_\varepsilon^{(2)}$, отримаємо

$$-\int\limits_{I_0\cap G_\varepsilon^{(2)}} \partial_{x_3}R_\varepsilon^{+}(x',0)\,\psi(x',0)\,dx' +$$

$$+\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \nabla_x R_\varepsilon^{(2,-)}\cdot\nabla_x\psi\,dx - \int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon\psi dx =$$

$$= Q_1^{2,-}(\varepsilon,\psi)+\ldots+Q_7^{2,-}(\varepsilon,\psi), \quad (36)$$

де

$$Q_1^{2,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1'(x_3)\,\big(\partial_{\xi_3}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_2^{2,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1(x_3)\,\big(\partial^2_{x_1\xi_1}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_3^{2,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= -\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1(x_3)\,\big(\partial^2_{x_2\xi_2}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\psi\,dx,$$

$$Q_4^{2,-}(\varepsilon,\psi) = \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1'(x_3)\,N^{(2,-)}(x/\varepsilon,x_1)\,\partial_{x_3}\psi\,dx,$$

$$Q_5^{2,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1(x_3)\,\big(\partial_{x_1}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\partial_{x_1}\psi\,dx,$$

$$Q_6^{2,-}(\varepsilon,\psi) =$$

$$= \varepsilon\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} \chi_1(x_3)\,\big(\partial_{x_2}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,\partial_{x_2}\psi\,dx,$$

$$Q_7^{2,-}(\varepsilon,\psi) = -\int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon(x)\,\psi\,dx.$$

4. Асимптотичні оцінки. Додаючи (30), (34) і (36) бачимо, що функція R_ε побудована в (24)-(26) задовольняє інтегральну тотожність

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x R_\varepsilon\cdot\nabla_x\psi\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f_\varepsilon\psi dx + \varepsilon\int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} g_\varepsilon\,\psi\,d\sigma_x +$$

$$+F_\varepsilon(\psi) \quad \forall\,\psi\in H_\varepsilon, \tag{37}$$

де $F_\varepsilon(\psi) = Q_1^{\pm}(\varepsilon,\psi) + \ldots + Q_7^{\pm}(\varepsilon,\psi) + Q_8^{1,-}(\varepsilon,\psi)+Q_9^{1,-}(\varepsilon,\psi)+Q_{10}^{1,-}(\varepsilon,\psi)$; $Q_j^{\pm}(\varepsilon,\psi) = Q_j^{+}(\varepsilon,\psi)+Q_j^{1,-}(\varepsilon,\psi)+Q_j^{2,-}(\varepsilon,\psi)$, $j=1,\ldots,7$.

Віднімаючи інтегральну тотожність (2) від (37), маємо

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \nabla_x\big(R_\varepsilon - u_\varepsilon\big)\cdot\nabla_x\psi\,dx = F_\varepsilon(\psi),$$

$$\forall\,\psi\in H_\varepsilon, \tag{38}$$

Тепер потрібно оцінити функцію $F_\varepsilon(\psi)$. Зауважимо, що звичайна норма $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ і норма $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ рівномірно еквівалентні відносно ε.

Інтеграли в $Q_1^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ та $Q_4^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ фактично беруться по областях, які належать множині

$$\operatorname{supp}\big(\chi_1'(x_3)\big)\,\cap\,\Omega_\varepsilon =$$

$$\{x:\ \lambda_1/2<|x_3|<\lambda_1\,\}\cap\Omega_\varepsilon.$$

В цих областях, у відповідності до твердження 1 та твердження 2, функції

$$\big(\partial_{\xi_3}N^{+}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon},$$

$$\big(\partial_{\xi_3}N^{(1,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon},\,\big(\partial_{\xi_3}N^{(2,-)}(\xi,x')\big)|_{\xi=x/\varepsilon}$$

експоненціально спадають, а функції N^{+}, $N^{(1,-)}$, $N^{(2,-)}$ рівномірно обмежені відносно ε. Отже,

$$|Q_1^{\pm}(\varepsilon,\psi)\,+\,Q_4^{\pm}(\varepsilon,\psi)|\,\le\,\varepsilon\,c_1\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Тут і далі, усі константи в асимптотичних нерівностях не залежать від ε.

Для того, щоб оцінити $Q_2^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ та $Q_3^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ використаємо наступне твердження.

Твердження 3. ([15, 16]) *Припустимо, що функція $\mathcal{N}$ - 1-періодична по ξ_1 та ξ_2, і належить простору $L_2(\Pi)$ та експоненціально спадає на нескінченності, коли $\xi_3\to\infty$, тобто, існують позитивні константи c_2, R, σ такі, що для всіх $|\xi_3|\ge R$*

$$\big|\mathcal{N}(\xi)\big|\,\le\,c_2\,\exp(-\sigma|\xi_3|).$$

Тоді для довільних $\delta>0$ існують позитивні константи c_3,ε_0 такі, що для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ має місце наступна нерівність

$$\Big|\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\mathcal{N}\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)\,\psi(x)\,dx\Big|\,\le\,c_3\varepsilon^{1-\delta}\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

$$\forall\ \psi\in\mathcal{H}_\varepsilon.$$

Оскільки всі функції від ξ які входять $\partial^2_{x_1\xi_1}N^{+}(\xi,x')$, $\partial^2_{x_1\xi_1}N^{(1,-)}(\xi,x')$, $\partial^2_{x_1\xi_1}N^{(2,-)}(\xi,x')$, $\partial^2_{x_2\xi_2}N^{+}(\xi,x')$, $\partial^2_{x_2\xi_2}N^{(1,-)}(\xi,x')$, $\partial^2_{x_2\xi_2}N^{(2,-)}(\xi,x')$ експоненціально спадають, коли $|\xi_3|\to+\infty$, то на основі твердження 2 маємо

$$|Q_2^{\pm}(\varepsilon,\psi)+Q_3^{\pm}(\varepsilon,\psi)|\,\le\,\varepsilon^{1-\delta_0}\,c_4(\delta_0)\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)},$$

де δ_0 – довільне фіксоване додатне число.

Інтеграли в $Q_5^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ та $Q_6^{\pm}(\varepsilon,\psi)$ фактично беруться по областях, які належать множині $\{x:\,|x_3|<\lambda_1\}\cap\Omega_\varepsilon$ і можуть бути оцінені наступним чином (для прикладу розглянемо інтеграл Q_5^{+}):

$$\varepsilon^{-1}|Q_5^{+}(\varepsilon,\psi)|\,=\,\Big|\int\limits_{\Omega_0}\chi_1(x_3)\partial_{x_1}\psi\,\Big((Z_1(\xi)-\xi_3)\times$$
$$\times\partial^2_{x_1x_3}v_0^{+}(x',0)+\,\Xi_1(\xi)\big(\partial^2_{x_1x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)-$$
$$-|B^{(1)}|^{-1}\partial^2_{x_1x_3}v_0^{+}(x',0)\big)\Big)|_{\xi=x/\varepsilon}\,dx\Big|\le$$
$$\le\int\limits_{\Omega_0}\chi_1\,|\partial_{x_1}\psi|\,\big(|Z_1(\xi)-\xi_3-\alpha^{+}|+|\Xi_1(\xi)-$$
$$-\beta^{+}|\big)_{\xi=x/\varepsilon}\big(|\partial^2_{x_1x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)|+|B^{(1)}|^{-1}|\times$$
$$\times\partial^2_{x_1x_3}v_0^{+}(x',0)|\big)\,dx+\int\limits_{\Omega_0}\chi_1\,|\partial_{x_1}\psi|\,\big(|\alpha^{+}|+|\beta^{+}|\big)\times$$
$$\times\big(|\partial^2_{x_1x_3}v_0^{(1,-)}(x',0)|+|B^{(1)}|^{-1}\times$$
$$\times|\partial^2_{x_1x_3}v_0^{+}(x',0)|\big)\,dx\le c_5\|\partial_{x_1}\psi\|_{L_2(\Omega_0)}\times$$
$$\times\Bigg(\sqrt{\int\limits_{\Omega_0}\chi_1\,|Z_1(\xi)-\xi_3-\alpha^{+}|^2_{\xi=x/\varepsilon}\,dx}+\times$$
$$\times\sqrt{\int\limits_{\Omega_0}\chi_1\,|\Xi_1(\xi)-\beta^{+}|^2_{\xi=x/\varepsilon}\,dx}+1\Bigg)\le$$

$$\leq c_6 \|\partial_{x_1}\psi\|_{L_2(\Omega_0)} \left(\sqrt{\varepsilon}\|Z_1(\xi) - \xi_3 - \alpha^+\|_{L^2(\Pi^+)} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\varepsilon}\|\Xi_1(\xi) - \beta^+\|_{L^2(\Pi^+)} + 1 \right),$$

де $|\Omega_0|$ міра області Ω_0.

Згідно (21) та (23), величини $\|Z_1(\xi)-\xi_3-\alpha^+\|_{L^2(\Pi^+)}$ та $\|\Xi_1(\xi) - \beta^+\|_{L^2(\Pi^+)}$ обмежені. В результаті отримуємо, що

$$|Q_5^{\pm}(\varepsilon,\psi) + Q_6^{\pm}(\varepsilon,\psi)| \ \leq \ \varepsilon\, c_7 \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}. \quad (39)$$

Зауваження 1. *Константа c_7 в (39) залежить від величин*

$$\sup_{x'\in I_0} \Big| \frac{\partial^2 v_0^+}{\partial x_1 \partial x_3}(x',0) \Big|, \ \sup_{x'\in I_0} \Big| \frac{\partial^2 v_0^+}{\partial x_2 \partial x_3}(x',0) \Big|,$$

$$\sup_{x'\in I_0} \Big| \frac{\partial^2 v_0^{(1,-)}}{\partial x_1 \partial x_3}(x',0) \Big|, \ \sup_{x'\in I_0} \Big| \frac{\partial^2 v_0^{(1,-)}}{\partial x_2 \partial x_3}(x',0) \Big|. \quad (40)$$

Оскільки $f_0 \in C_0^2(\Omega_1)$, функція v_0^+ та її похідні не мають жодних особливостей в точках $(0,0)$ та $(a,0)$. Таким чином, у відповідності до класичних результатів щодо гладкості розв'язку крайової задачі, перша та друга величина в (40) обмежена. Обмеженість третьої та четвертої величини випливає з (14) та умови $g_0 \in C_0^2(D_1)$.

За допомогою нерівності Коші-Буняковського оцінимо $Q_7^{\pm}(\varepsilon,\psi)$:

$$|Q_7^{\pm}(\varepsilon,\psi)| = \Bigg| \int\limits_{\Omega_0 \cup G_\varepsilon^{(1)}} (f_\varepsilon(x) - f_0(x))\,\psi\, dx +$$

$$+ \int\limits_{G_\varepsilon^{(2)}} f_\varepsilon(x)\,\psi\, dx \Bigg| \leq \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})} \times$$

$$\times \|\psi\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})} + \|f_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})}\, \varepsilon\, \|\nabla_{x'}\psi\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} \leq$$

$$\leq \big(\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon c_8 \big) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Оскільки функції $\partial_{x_1} v_0^{(1,-)}, \partial_{x_2} v_0^{(1,-)} \in H^1(D_1)$,

$$|Q_8^{1,-}(\varepsilon,\psi) + Q_9^{1,-}(\varepsilon,\psi)| \ \leq \ \varepsilon\, c_9\, \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Тепер залишається оцінити $Q_{10}^{1,-}$. Очевидно, що останній доданок в $Q_{10}^{1,-}$ не перевищує $c_{10}\varepsilon\|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Використовуючи рівність (33), припущення відносно функції g_ε, та факт, що $g_0 \in C_0^2(D_1)$, маємо

$$\Bigg| \varepsilon \int\limits_{S_\varepsilon^{(1)}} \big(g_0(x) - g_\varepsilon(x)\big)\, \psi(x)\, d\sigma_x \Bigg| \leq$$

$$\leq c_{11} \Bigg(\int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} \big|g_0 - g_\varepsilon\big|\, |\psi|\, dx +$$

$$+ \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon^{(1)}} |\nabla_{x'}\big((g_0 - g_\varepsilon)\,\psi\big)|\, dx \Bigg) \leq$$

$$\leq c_{12} \left(\|g_0 - g_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon \right) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Отже,

$$|Q_{10}^{1,-}(\varepsilon,\psi)| \ \leq$$

$$\leq \ c_{13} \left(\|g_0 - g_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} + \varepsilon \right) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

У відповідності до отриманих нерівностей, робимо висновок, що для правої частини в (38) має місце нерівність

$$|F_\varepsilon(\psi)| \leq c_{14} \bigg(\varepsilon^{1-\delta_0} + \varepsilon + \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})} +$$

$$+ \|g_0 - g_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \bigg) \|\psi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \ \forall \psi \in H_\varepsilon, \quad (41)$$

де δ_0 – додатне фіксоване число. З (38) та (41) безпосередньо випливає нерівність (28).

Теорему доведено.

Наслідок 1. *З (28) випливає, що*

$$\|u_\varepsilon - v_0^+\|_{L^2(\Omega_0)} + \|u_\varepsilon - v_0^{(1,-)}\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} +$$

$$+ \|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} \leq C_9 \bigg(\varepsilon^{1-\delta_0} + \varepsilon +$$

$$+ \|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2(\Omega_0\cup G_\varepsilon^{(1)})} + \|g_0 - g_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} \bigg).$$

Наслідок 2. *Припустимо*

$$f_\varepsilon(x) = f_0(x) + \varepsilon f_1(x,\varepsilon), \ x \in \Omega_\varepsilon,$$

де $\|f_1(\cdot,\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \mathcal{O}(1)$ *при* $\varepsilon \to 0$*;*

$$g_\varepsilon(x) = g_0(x) + \varepsilon g_1(x,\varepsilon),\ \ x \in G_\varepsilon^{(1)},$$

де $\|g_1(\cdot,\varepsilon)\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} = \mathcal{O}(1)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Тоді для довільного $\delta_0 > 0$ *існують позитивні константи* C_{10}, ε_0 *такі, що для всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$\|u_\varepsilon - R_\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \le C_{10}\,\varepsilon^{1-\delta_0},$$

$$\|u_\varepsilon - v_0^+\|_{L^2(\Omega_0)} + \|u_\varepsilon - v_0^{(1,-)}\|_{L^2(G_\varepsilon^{(1)})} + $$

$$+ \|u_\varepsilon\|_{L^2(G_\varepsilon^{(2)})} \le C_{10}\,\varepsilon^{1-\delta_0}.$$

Висновки. Важливою проблемою будь-якого апроксимаційного методу є його точність. Доведення похибки оцінки між побудованим наближенням і точним розв'язком – це головний принцип, який застосовується для аналізу ефективності таких методів. В цій роботі побудовано асимптотичне наближення для розв'язку задачі (1) і доведено таку оцінку.

З отриманих результатів випливає, що для прикладних проблем в густих дворівневих з'єднаннях можна використовувати відповідні граничні задачі, які є набагато простішими.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. Homogenization: averaging processes in periodic media. – Kluwer Academic Publishes, series "Mathematics and its Applications", 1989.

2. Bensoussan A., Lions J., Papanicolau G. Asymptotic analysis for periodic structure. – Amsterdam, North Holland, 1978.

3. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization of reticulated structures. – Springer-Verlag, series "Applied Mathematical Sciences", 1999.

4. Zhikov V.V., Kozlov S.M. , Oleinik O.A. Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals. – Springer, Berlin-Heidelberg, 1994.

5. Ковалевский А.А. Усреднение задач Неймана для нелинейных эллиптических уравнений в областях с накопителями // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, № 2. – С. 194-212.

6. Марченко В.А., Хруслов Е.Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наукова думка, 1974. – 279 с.

7. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Том 1. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: "Научная книга", 2002. – 406 с.

8. Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во МГУ, 1990. – 310 с.

9. De Maio U., Mel'nyk T.A., Perugia C. Homogenization of the Robin problem in a thick multi-level junction // Nonlinear oscillations. – 2004. – V. 7, № 3. – P. 336-356.

10. Mel'nyk T.A., Vashchuk P.S. Homogenization of a boundary-value problem with changing of the boundary condition type in a thick two-level junction // Nonlinear oscillations. – 2005. – V. 8, № 2. – P. 241-257.

11. Mel'nyk T.A. Asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of the Fourier problem in a thick multi-level junction // Ukrainian Math. Journal. – 2006. – V. 58, № 2. - P. 195-217.

12. De Maio U., Durante T., Mel'nyk T.A. Asymptotic approximation for the solution to the Robin problem in a thick multi-level junction // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (to appear).

13. Durante T., Mel'nyk T.A., Vashchuk P.S. Asymptotic aproximation for the solution to a boundary-value problem with varying type of boundary conditions in a thick two-level junction // Nonlinear oscillations. – 2006. – V. 9, № 3. – P. 336-355.

14. Mel'nyk T.A., Vashchuk P.S. Homogenization of the Neumann-Fourier problem in a thick two-level junction of type 3:2:1 // MPAG. – 2006. – V. 1, № 3, – P. 318-337.

15. Мельник Т.А., Назаров С.А. Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа "густого гребешка"// Труды семинара им. И.Г.Петровского. – 1996. – Т. 19. – С.138-174.

16. Mel'nyk T.A. Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. – 1999. – V. 18, № 4. – P. 953-975.

17. Мельник Т.А. Усереднення сингулярно збуреної параболічної задачі в густому періодичному з'єднанні типу 3:2:1 // Український математичний журнал. – 2000. – Т. 11. – С. 1524-1534.