УДК 512.54

©2007 р. Є.В. Бондаренко, Р.І. Григорчук, Р.В. Кравченко, Є.В. Мунтян, В.В. Некрашевич, Д.М. Савчук, З. Шунич

Texas A&M University, College Station, USA

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ГРУП, ПОРОДЖЕНИХ АВТОМАТАМИ ІЗ ТРЬОМА СТАНАМИ НАД АЛФАВІТОМ ІЗ ДВОХ ЛІТЕР, І ПРО ДЕЯКІ ПИТАННЯ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЦИМИ ГРУПАМИ

Робота присвячена класифікації груп, породжених автоматами із трьома станами над алфавітом із двох літер. Показано, що цей клас груп містить не більше 124 неізоморфних груп, не містить нескінченних періодичних груп, містить єдину вільну неабелеву групу. Описано всі скінченні і всі абелеві групи в цьому класі. Наведено початкові співвідношення, розміри факторів, початкові значення функції росту, гістограму щільності спектра графа Шрайєра на 9-тому рівні дерева у 11 вибраних груп. В деяких випадках зображено граничний простір.

The article is devoted to the study of groups generated by automata with three states over an alphabet with two letters. It is shown that this class of groups contains no more than 124 pairwise non-isomorphic groups, does not contain infinite periodic groups, and contains a unique free non-abelian group. All finite and abelian groups in this class are described. Information about short relations, the size of factors, the initial values of the growth function, and the histogram of the spectral density of the Schreier graph of 9th level for 11 chosen groups is presented. In some cases we give a picture of the limit space.

Вступ

Групи, породжені скінченними автоматами, були визначені на початку 1960-тих в Києві в математичній школі В.М. Глушкова [16, 27], і досліджувалися у школі Л.А. Калужніна – В.І. Сущанського [28, 29, 32], а в 1970-тих вони привернули увагу після того, як серед них були знайдені прості приклади Бернсайдових груп [34]. Проте інтенсивне вивчення груп автоматів почалося після їх геометричного зображення як груп автоморфізмів кореневих дерев та розвитку ідей самоподібності і стискуючості, що призвело, зокрема, до побудови груп проміжного росту. Розвиток цих ідей дозволив знайти застосування груп автоматів у різних розділах математики: зокрема в аналізі [20, 13], геометрії [5], теорії ймовірностей [13], динаміці [4, 26] тощо.

На початку 80-тих, використовуючи групи автоматів, Р.І. Григорчуком були розв'язані дві важливі проблеми – проблема Мілнора про проміжний ріст та проблема Дея про аменабельність. Пізніше були побудовані інші цікаві приклади, які внесли важливий вклад у теорію інваріантних середніх на групах, започатковану фон Нойманом, та теорію функцій зростання.

Одним з найбільш цікавих новітніх досягнень теорії груп автоматів є результати про спектральну теорію цих груп та графів, асоційованих з ними [4, 26]. Наприклад, використовуючи групи автоматів було побудовано перші приклади графів Шрайєра груп, у яких спектр комбінаторного Лапласіана є канторовою множиною [4]. Крім того, реалізація групи блимаючих лампочок $\mathbb{Z} \wr C_2$ як автоматної групи дозволила довести, що ця група має «суто точковий спектр» (відповідно до системи твірних пов'язаної зі станами автомату) і тому має дискретну спектральну міру, яка була повністю описана [26]. Це, в свою чергу, привело до конструкції 7-вимірного замкненого многовиду з не цілим третім числом L^2-Бетті [15], який став першим контрприкладом до Сильної гіпоте-

[0]Всі автори були частково підтримані принаймні одним з NSF грантів DMS-0456185 і DMS-0600975

зи Ат'ї.

Фундаментальним відкриттям став взаємозв'язок між автоматними групами та голоморфною динамікою [5, 31], який був використаний, зокрема, для розв'язання проблеми Хаббарда в [9]. З кожною посткритично скінченною раціональною функцією $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ можна асоціювати скінченний автомат. Група, породжена цим автоматом, називається групою ітерованих монодромій функції f і позначається $IMG(f)$. Ці групи та їх проскінченні замикання також пов'язані з теорією Галуа. Геометрія і топологія графів Шрайєра $IMG(f)$ тісно пов'язані із геометрією множини Жуліа функції f.

Однією з важливих розробок в теорії груп автоматів є введення груп з гіллястою будовою, що пов'язує групи автоматів із групами скінченної ширини і слабконескінченними (just-infinite) групами, тобто нескінченними групами, що не мають нетривіальних нормальних підгруп нескінченного індексу [21, 6]. Зокрема, одна з проблем Є. Зельманова була розв'язана використовуючи проскінченне замикання групи Григорчука.

Є сподівання, що спектральні властивості груп, породжених скінченними автоматами, можуть бути використані при дослідженні гіпотези Капланського про ідемпотенти (а, отже, гіпотези Баума-Конна і гіпотези Новікова), проблеми унітарізації Діксм'є, і для побудови нових сімейств експандерів і, можливо, навіть графів Рамануджана.

Дві важливі характеристики автомату — це потужність m множини його станів та потужність n алфавіту. Відповідну пару (m, n) будемо називати типом автомату і типом групи, яку він породжує.

В роботі [17] було показано, що існує тільки 6 неізоморфних груп типу $(2, 2)$: тривіальна група, C_2, $C_2 \times C_2$, $\mathbb{Z}$, D_∞ та група блимаючих лампочок $\mathbb{Z} \wr C_2$. Проблема класифікації груп типу $(3, 2)$ є значно важчою.

Дана робота представляє прогрес, зроблений дослідницькою групою Texas A&M університету за останні декілька років у класифікації груп типу $(3, 2)$ під керівництвом Григорчука Р.І. Основні завдання данного дослідження полягають в наступному:

1. Пошук нових цікавих груп, та використання їх для розв'язання відомих проблем.

2. Реалізації уже відомих груп як груп, породженими скінченними автоматами. Використання цих реалізацій для поглибленого аналізу цих груп. Інтерпретація вже відомих результатів крізь призму самоподібних груп.

3. Пошук загальних закономірностей, які би дали можливість висловити гіпотези про структуру автоматно породжених груп. Формулювання проблем, гіпотез, та розвиток методів для їх розв'язання.

4. Використання вивчених груп та об'єктів з ними пов'язаних (графів Шрайєра, граничних просторів, C^*-алгебр, тощо) для розв'язання проблем із інших галузей математики.

5. Знаходження нових конструкцій експандерів та інших застосувань в інформатиці і дискретній математиці.

Загальна кількість оборотних автоматів типу $(3, 2)$ дорівнює $2^3 \cdot 3^6 = 5832$. Але, кількість не ізоморфних груп, породжених цими автоматами, є значно меншою.

Теорема 1. *Існує не більше* 124 *попарно не ізоморфних груп типу* $(3, 2)$.

Основні результати отримані для всього класу цих груп є наступними.

Теорема 2. *В класі* $(3, 2)$ *груп є лише* 6 *скінченних груп:* $\{1\}$, C_2, $C_2 \times C_2$, D_4, $C_2 \times C_2 \times C_2$ *і* $D_4 \times C_2$.

Теорема 3. *В класі* $(3, 2)$ *груп є лише* 6 *абелевих груп:* $\{1\}$, C_2, $C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_2 \times C_2$, $\mathbb{Z}$ *і* $\mathbb{Z}^2$.

Теорема 4. *Єдина вільна не абелева група в класі* $(3, 2)$ *груп — це вільна група* *рангу 3 породжена автоматом Альошина-Воробця [2240].*

Теорема 5. *Клас* $(3,2)$ *груп не містить нескінченних періодичних груп.*

У параграфах 2,3 ми подаємо загальну інформацію про групи автоматів, самоподібні групи, їх дію на кореневих деревах і асоційовані комбінаторні об'єкти такі, як діаграми Мура, графи Шрайєра, граничні простори. В четвертому параграфі формулюються деякі проблеми, пов'язані з класом $(3,2)$ груп. Нарешті п'ятий розділ містить вибірку цікавих прикладів груп з цього класу і деяку інформацію про них.

Визначення груп автоматів

Зафіксуємо $d \geq 2$, покладемо $X = \{1,2,\ldots,d\}$ і будемо розглядати X як алфавіт. Множину всіх скінченних слів X^* над X можна розглядати як множину вершин регулярного кореневого дерева $\mathcal{T}$, у якому коренем є порожнє слово $\emptyset$ і кожне слово $v \in X^*$ з'єднане ребром зі словом vx для кожного $x \in X$. Нехай $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ — група автоморфізмів кореневого дерева $\mathcal{T}$. Границю дерева $\mathcal{T}$, яка позначається $\partial\mathcal{T}$, можна ототожнювати з множиною X^ω нескінченних слів над X. Група ізометрій $\mathsf{Isom}(\partial\mathcal{T})$ (з природною ультраметрикою, в якій нескінченні слова близькі, якщо вони мають достатньо великий спільний початок) канонічно ізоморфна $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$.

Кожен автоморфізм $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ може бути записаний у вигляді

$$f = \alpha_f(f_0,\ldots,f_{d-1}), \tag{1}$$

де f_x, $x \in X$ — це автоморфізми дерева і α_f — підстановка X. Автоморфізми f_x (також позначаються $f|_x$), $x \in X$, називаються *зрізами* (першого рівня) автоморфізму f і кожен з них діє на піддереві $\mathcal{T}_x$, яке звисає нижче вершини $x \in X$ і множиною вершин якого є слова X^*, які починаються на x (кожне таке піддерево канонічно ізоморфно всьому дереву). Тоді дія автоморфізму f задається таким чином: $(f_0,\ldots,f_{d-1})$ діє на d піддеревах, які висять нижче кореня, а потім підстановка α_f переставляє ці d піддерев і називається *кореневою підстановка.* А дію f можна задати наступним чином

$$f(xw) = \alpha_f(x)f_x(w), \tag{2}$$

$x \in X$, $w \in X^*$. Можна також розглядати зрізи будь-якого рівня n дерева $\mathcal{T}$. Для слова $v = x_1x_2\ldots x_n \in X^n$ *зрізом* f_v (або $f|_v$) називається автоморфізм $f|_{x_1}|_{x_2}\cdots|_{x_n}$.

Означення 1. Група G автоморфізмів дерева $\mathcal{T}$ називається *самоподібною*, якщо зрізи g_x належать G для всіх літер $x \in X$ і $g \in G$.

Вся група автоморфізмів $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ є очевидно самоподібною. Самоподібна група G занурюється у підстановковий вінцевий добуток $\mathsf{Sym}(X) \wr_X G = \mathsf{Sym} \ltimes G^X$ наступним чином:

$$g \mapsto \alpha_g(g_0, g_1, \ldots, g_{d-1}). \tag{3}$$

Розглянемо скінченну систему рекурсивних співвідношень (вінцевих рекурсій)

$$\begin{cases} f^{(1)} & = & \alpha_1\left(f_0^{(1)}, f_1^{(1)}, \ldots, f_{d-1}^{(1)}\right), \\ \ldots & & \\ f^{(k)} & = & \alpha_k\left(f_0^{(k)}, f_1^{(k)}, \ldots, f_{d-1}^{(k)}\right), \end{cases} \tag{4}$$

де кожен символ $f_j^{(i)}$, $i = 1,\ldots,k$, $j = 0,\ldots,d-1$, рівний одному із символів $f^{(1)},\ldots,f^{(k)}$ і $\alpha_1,\ldots,\alpha_k \in \mathsf{Sym}(X)$. Система (4) має єдиний розв'язок в групі $\mathrm{Aut}(\mathcal{T})$. Група, породжена автоморфізмами $f^{(1)},\ldots,f^{(k)}$, може бути описана в термінах скінченних оборотних автоматів.

Означення 2. *Скінченним оборотним автоматом* A називається четвірка $A = (X, Q, \pi, \lambda)$, де X — скінченний алфавіт, Q — скінченна множина станів, $\pi : Q \times X \to Q$ — функція переходів, $\lambda : Q \times X \to X$ — функція виходів, причому, для кожного стану $q \in Q$ обмеження $\lambda_q : X \to X$, визначене за правилом $\lambda_q(x) = \lambda(q,x)$, є підстановкою, тобто $\lambda_q \in \mathsf{Sym}(X)$.

Ініціальним автоматом A_q називається автомат A з фіксованим станом $q \in Q$. Ініціальний автомат діє на множині X^*, а отже і на дерева $\mathcal{T}$, наступним чином. Автомат починає зі стану q, читає першу введену літеру x_1, виводить літеру $\lambda(q, x_1)$ і переходить у новий стан $q_1 = \pi(q, x_1)$. Залишок введеного слова обробляється з нового стану q_1 таким самим чином, тобто обробляється ініціальним автоматом A_{q_1}. Дію станів автомату на дереві $\mathcal{T}$ можна описати продовживши функцію λ на $X^* \times Q$ рекурентно

$$\lambda(q, xw) = \lambda(q, x)\lambda(\pi(q, x), w), \qquad (5)$$

де $x \in X$, $q \in Q$ і $w \in X^*$ — довільні елементи. Тоді дія ініціального автомату A_q визначається $A_q(u) = \lambda(q, u)$ для слова $u \in X^*$. Рівність (5) показує, що кожен ініціальний автомат A_q визначає автоморфізм дерева X^*, який також позначається q і визначається співвідношенням

$$q(xw) = \alpha_q(x) q_x(w), \qquad (6)$$

де зріз q_x — це стан $\pi(q, x)$, а коренева підстановка α_q — це підстановка $\lambda(q, \cdot)$.

Означення 3. *Групою $G(A)$ автомату $A = (Q, X, \lambda, \pi)$* називається група автоморфізмів дерева $\mathcal{T}$ породжена всіма його станами. Множина станів Q називається *стандартною множиною твірних* групи $G(A)$.

Групи автоматів є самоподібними.

Автомат A можна задавати поміченим орієнтованим графом, який називається *діаграмою Мура*, в якому вершинами є стани автомату, кожен стан q помічений своєю кореневою підстановкою α_q і для кожної пари $(q, x) \in Q \times X$ існує ребро зі стану q у стан $q_x = \pi(q, x)$, помічене літерою x.

Автоматна група $G = G(A)$ називається *стискуючою*, якщо існують константи ρ, C, і N, з $0 \leq \rho < 1$, такі, що $|g|_v| \leq \rho|g| + C$, для всіх вершин v довжини не менше N і $g \in G$. Для достатньо довгих елементів g це означає, що довжина його зрізів на вершини рівня глибшого за N буде коротшою, ніж довжина g. Це дає змогу дати еквівалентне означення стискуючої групи: група G називається стискуючою, якщо існує скінченна множина $\mathcal{N} \subset G$ така, що для кожного $g \in G$ існує $N > 0$ для якого $g|_v \in \mathcal{N}$ для всіх вершин $v \in X^*$ довжини не менше N. Мінімальна множина $\mathcal{N}$ з такою властивістю називається *нуклеусом* групи G.

Групи автоматів пов'язані із конформною динамікою через поняття груп ітерованих монодромій (IMG). Нехай $\mathcal{M}$ — лінійно-зв'язний та локально лінійно-зв'язний топологічний простір, а $\mathcal{M}_1$ — відкрита лінійно-зв'язна підмножина $\mathcal{M}$. Нехай $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}$ — d-кратне накриття. Позначимо n-ту ітерацію функції f через f^n. Виберемо деяку точку $t \in \mathcal{M}$. Нехай $\mathcal{T}_t$ — це диз'юнктне об'єднання множин $f^{-n}(t), n \geq 0$ (ці множини можуть бути не диз'юктними самі по собі). Множина прообразів $\mathcal{T}_t$ має структуру d-арного кореневого дерева, коренем якого є t і кожна вершина $z \in f^{-n}(t)$ з'єднана ребром із вершиною $f(z) \in f^{-n+1}(t)$. Фундаментальна група $\pi_1(\mathcal{M}, t)$ діє автоморфізмами на дереві $\mathcal{T}_t$. *Групою ітерованих монодромій $IMG(f)$* накриття f називається фактор фундаментальної групи $\pi_1(\mathcal{M}, t)$ по ядру дії на дереві $\mathcal{T}_t$.

Інший важливий клас — це клас автоматних груп гіллястого типу. Гіллясті групи виникають як один з трьох можливих типів слабко-нескінченних груп [21]. Зокрема, група Григорчука, групи, пов'язані з грою «Ханойська Вежа» [24], $IMG(z^2 + i)$ [25] є прикладами гіллястих груп, в той же час група $\mathcal{B} = IMG(z^2 - 1)$ не є гіллястою, але є слабко гіллястою [21, 6].

В більшості випадків фігурують рекурентні самоподібні групи. Самоподібна група G називається *рекурентною*, якщо для кожної вершини u гомоморфізм $\varphi_u : \mathsf{St}_G(u) \to G$, визначений за правилом $\varphi(g) = g|_u$, є сюр'єктивним ($\mathsf{St}_G(u)$ — це стабілізатор вершини u у групі G). Рекурентність і транзитивність дії групи на першому рівні дерева забезпечують транзитивність дії групи на всіх рівнях дерева.

Граничні простори та графи Шрайєра

Зафіксуємо самоподібну стискуючу групу G, яка діє автоморфізмами на дереві X^*. Нехай $X^{-\omega}$ — простір всіх нескінченних вліво послідовностей над алфавітом X.

Означення 4. Дві послідовності $\ldots x_3x_2x_1, \ldots y_3y_2y_1 \in X^{-\omega}$ називаються *асимптотично еквівалентними* відповідно до дії групи G, якщо існує скінченна множина $K \subset G$ і послідовність $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів K такі, що

$$g_k(x_kx_{k-1}\ldots x_2x_1) = y_ky_{k-1}\ldots y_2y_1$$

для всіх $k \geq 1$.

Асимптотична еквівалентність є відношенням еквівалентності [31].

Означення 5. Фактор простір $\mathcal{J}_G$ топологічного простору $X^{-\omega}$ (з топологією прямого добутку дискретних просторів) за відношенням асимптотичної еквівалентності називається *граничним простором* самоподібної групи G.

Граничний простір $\mathcal{J}_G$ є метризовним і скінченно-вимірним. Якщо група G є скінченно-породженою і діє транзитивно на рівнях дерева, то граничний простір $\mathcal{J}_G$ є зв'язним.

Нехай G — група, породжена скінченною множиною S, яка діє на множині Y. *Графом Шрайєра* дії (G, Y) називається граф $\Gamma(G, S, Y)$ з множиною вершин Y і множиною ребер $S \times Y$, в якому ребро (s, y) починається у вершині y і закінчується в $s(y)$. Для точки $y \in Y$ графом Шрайєра $\Gamma(G, S, y)$ дії групи G на G-орбіті точки y називається *орбітальним графом Шрайєра.*

Нехай група $G < \mathrm{Aut}(\mathcal{T})$ породжена множиною S. Рівні дерева X^n, $n \geq 0$, є інваріантними під дією групи G і ми можемо розглядати графи Шрайєра $\Gamma_n(G, S) = \Gamma(G, S, X^n)$. Нехай $\omega = x_1x_2x_3\ldots \in X^{\omega}$, тоді послідовність графів Шрайєра $(\Gamma_n(G, S), x_1x_2\ldots x_n)$ з відміченою вершиною збігається у локальній топології до орбітального графа Шрайєра $(\Gamma(G, S, \omega), \omega)$ з відміченою вершиною.

Графи Шрайєра $\Gamma_n(G, S)$ самоподібної стискуючої групи G в деякому сенсі збігаються до граничного простору $\mathcal{J}_G$ [31]. Крім того, для багатьох прикладів самоподібних стискуючих груп існує послідовність чисел λ_n таких, що послідовність метричних просторів $(\Gamma_n, d(\cdot,\cdot)/\lambda_n)$, де d — це комбінаторна метрика на графі, збігається в метриці Громова-Хаусдорфа до граничного простору групи.

Теорема 6 ([31]). *Група ітерованих монодромій суб-гіперболічної раціональної функції є стискуючою та її граничний простір гомеоморфний множині Жуліа цієї функції.*

Зокрема, графи Шрайєра Γ_n групи ітерованих монодромій суб-гіперболічної раціональної функції можуть бути намальовані на сфері Рімана так, що вони будуть збігатися в метриці Хаусдорфа до множини Жуліа цієї функції.

Нехай G — самоподібна група, породжена скінченною множиною S. Розглянемо марківський оператор

$$M = \frac{1}{2|S|}\sum_{s\in S}(\pi_s + \pi_{s^{-1}}),$$

який відповідає унітарному зображенню π групи G в $L_2(X^{\omega}, \nu)$, яке визначається за правилом $\pi_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$. Спектр оператора M апроксимується спектрами графів Шрайєра $\Gamma_n(G, S)$, а саме

$$sp(M) = \overline{\bigcup_{n\geq 0} sp(\Gamma_n(G, S))}.$$

Проблеми

Проблема 1. Чи є група 929 (єдина поліноміальна $(3, 2)$ група, автомат якої не є обмеженим [33]) аменабельною?

Проблема 2. Чи є серед $(3, 2)$ груп групи проміжного росту?

Проблема 3. Описати порядки зростання графів Шрайєра $(3, 2)$ груп.

Проблема 4. a) Чи існує $(3, 2)$ група така, що графи Шрайєра аменабельні, а група ні?

б) Чи з аменабельності орбітальних графів Шрайєра випливає аменабельність групи, породженої скінченним автоматом?

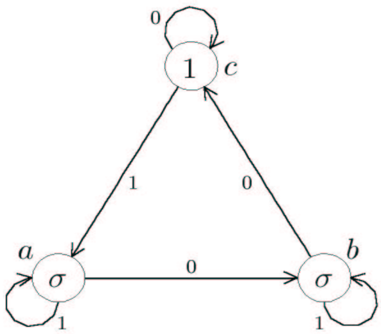
Вибрані групи із класу

В цьому параграфі ми наведемо інформацію про деякі вибрані групи. Вибрані автомати пронумеровані відповідно до того, яка нумерація була вибрана для всіх 5832 автоматів типу $(3,2)$. Використано наступні позначення:

- СГ — це список деяких співвідношень в групі. Включені усі незалежні співвідношення довжини ≤ 20 (в деяких випадках наведено співвідношення більшої довжини).
- РФ — ці числа представляють розмір факторів $G/\mathsf{St}_G(n)$, для $n \geq 0$, де $\mathsf{St}_G(n)$ — це підгрупа тих елементів з G, які стабілізують всі вершини n-того рівня дерева.
- РГ — ці числа представляють значення функції росту $\gamma_G(n)$, для $n \geq 0$, і стандартної системи твірних a, b, c.

Після кожного автомату наведено гістограму спектральної щільності графа Шрайєра $\Gamma_9(G,\{a,b,c\})$. В деяких випадках зображено граничний простір групи.

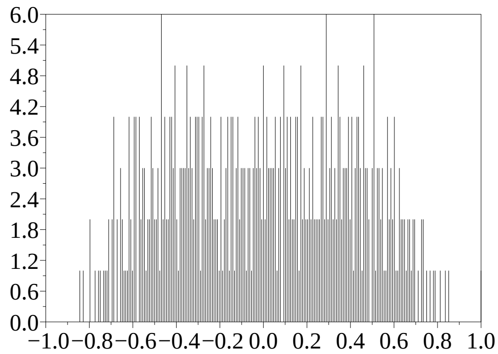
Автомат номер 2396



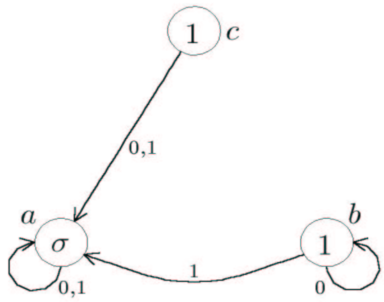
$a = \sigma(b,a)$ Група: А. Болтенков
$b = \sigma(c,b)$ Стискуючість: *ні*
$c = (c,a)$ Рекурентність: *так*

СГ: $acb^{-1}ca^{-2}cb^{-1}cac^{-1}bc^{-2}bc^{-1}$, $acb^{-1}ca^{-2}cb^{-1}a^2c^{-1}b^{-1}a^2c^{-1}bc^{-1}a^{-1}bca^{-2}bc^{-1}$, $acb^{-1}a^2c^{-1}b^{-1}a^{-1}cb^{-1}cbca^{-2}bc^{-2}bc^{-1}$, $bcb^{-1}ca^{-1}b^{-1}cb^{-1}a^2c^{-1}ac^{-1}ba^{-2}bc^{-1}$

РФ: 2^1, 2^1, 2^3, 2^6, 2^{12}, 2^{24}, 2^{46}, 2^{90}, 2^{176}
РГ: 1, 7, 37, 187, 937, 4687



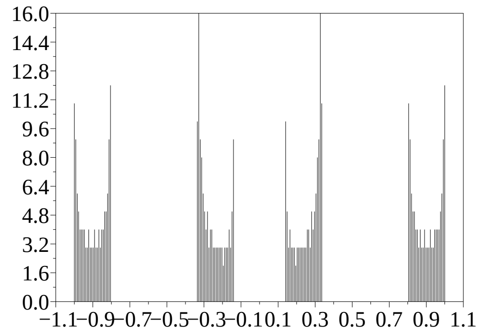
Автомат номер 739



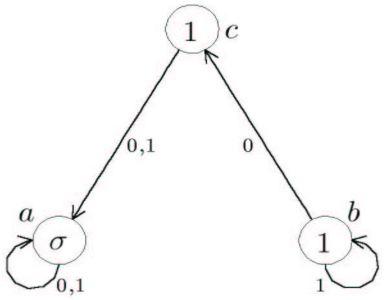
$a = \sigma(a,a)$ Група: $C_2 \ltimes \left(C_2 \wr \mathbb{Z}\right)$
$b = (b,a)$ Стискуючість: *так*
$c = (a,a)$ Рекурентність: *ні*

СГ: a^2, b^2, c^2, $acac$, $acbabcabab$, $acbabacbab$, $abacbcacbcab$, $acbacbabcabc$, $acbcbabcabcbab$, $acbcbabacbcbab$, $acbacbcacbcabc$, $abcbacbcacbcbcab$, $acbcbacbabcbcabc$, $acbcbcbabcabcbcbab$, $acbcbcbabacbcbcbab$, $abcbacbcbabcbcabcb$, $acbcbacbcacbcbcabc$

РФ: 2^0,2^1,2^3,2^6,2^8,2^{10},2^{12},2^{14},2^{16}
РГ: 1, 4, 9, 17, 30, 47, 68, 93, 122, 155, 192



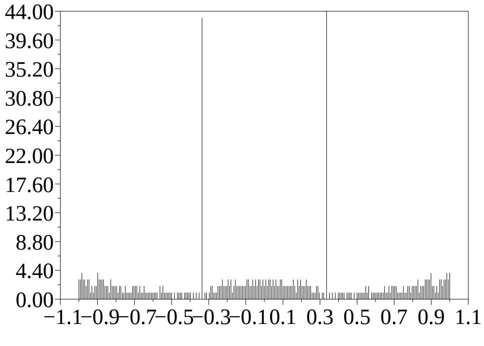
Автомат номер 775



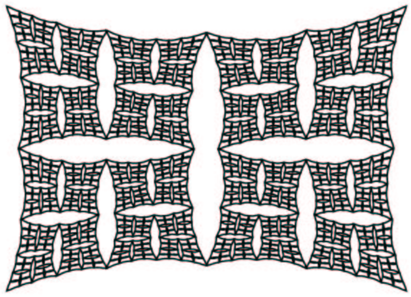
$a = \sigma(a, a)$	Група: $C_2 \ltimes IMG\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right)$
$b = (c, b)$	Стискуючість: *так*
$c = (a, a)$	Рекурентність: *так*

СГ: a^2, b^2, c^2, $acac$, $acbcbabcbcabcbabcb$, $acbcbabcbacbcbabcb$, $abcbacbcbcacbcbcabcb$, $acbcbacbcbabcbcabcbc$, $acbcbacbcbcacbcbcabcbc$

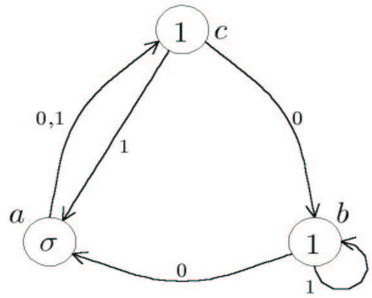
РФ: 2^0,2^1,2^2,2^4,2^6,2^9,2^{15},2^{26},2^{48}
РГ: 1, 4, 9, 17, 30, 51, 85, 140, 229, 367, 579



Граничний простір



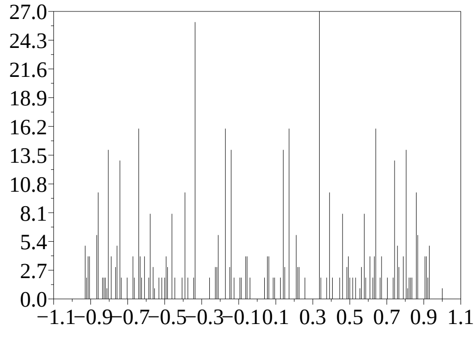
Автомат номер 846



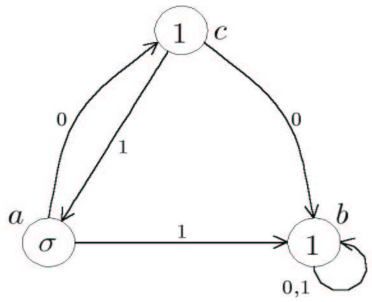
$a = \sigma(c, c)$	Група: $C_2 * C_2 * C_2$
$b = (a, b)$	Стискуючість: *ні*
$c = (b, a)$	Рекурентність: *ні*

СГ: a^2, b^2, c^2

РФ: 2^0,2^1,2^3,2^5,2^7,2^{10},2^{13},2^{16},2^{19}
РГ: 1, 4, 10, 22, 46, 94, 190, 382, 766, 1534



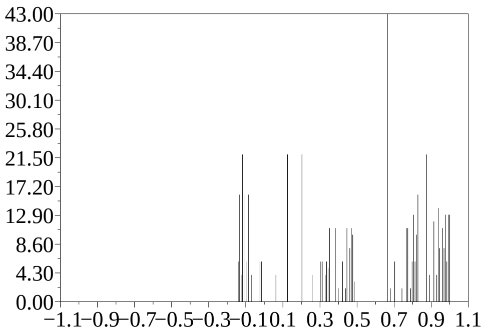
Автомат номер 852



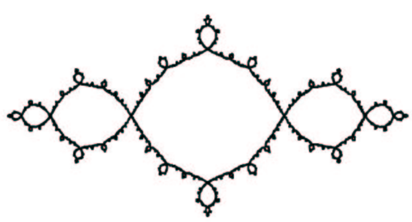
$a = \sigma(c, b)$ Група: *Basilica* $\mathcal{B} = IMG(z^2 - 1)$
$b = (b, b)$
$c = (b, a)$ Стискуючість: *так*
Рекурентність: *так*

СГ: b, $a^{-1}c^{-1}ac^{-1}a^{-1}cac$, $a^{-1}c^{-2}ac^{-1}a^{-1}c^2ac$, $a^{-1}c^{-1}ac^{-2}a^{-1}cac^2$, $a^{-2}c^{-1}a^{-2}ca^2c^{-1}a^2c$, $a^{-1}c^{-3}ac^{-1}a^{-1}c^3ac$, $a^{-1}c^{-2}ac^{-2}a^{-1}c^2ac^2$, $a^{-1}c^{-1}ac^{-3}a^{-1}cac^3$

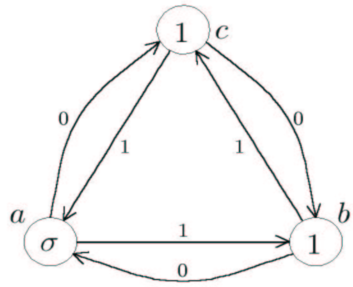
РФ: 2^0,2^1,2^3,2^6,2^{12},2^{23},2^{45},2^{88},2^{174}
РГ: $1, 5, 17, 53, 153, 421, 1125, 2945, 7545$



Граничний простір



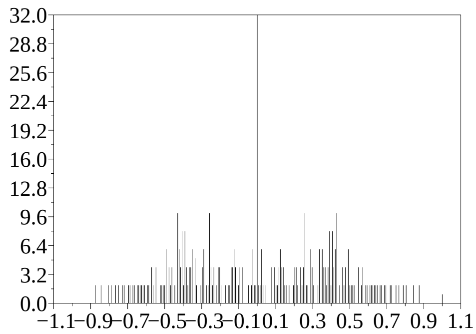
Автомат номер 870



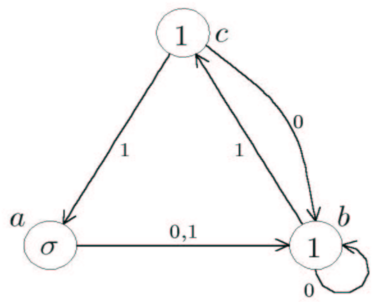
$a = \sigma(c, b)$ Група: *Баумслага-Солітера* $BS(1, 3)$
$b = (a, c)$
$c = (b, a)$ Стискуючість: *ні*
Рекурентність: *так*

СГ: $a^{-1}ca^{-1}b$, $(b^{-1}a)^b(b^{-1}a)^{-3}$

РФ: 2^0,2^1,2^3,2^4,2^6,2^8,2^{10},2^{12},2^{14}
РГ: $1, 7, 33, 127, 433, 1415$



Автомат номер 878

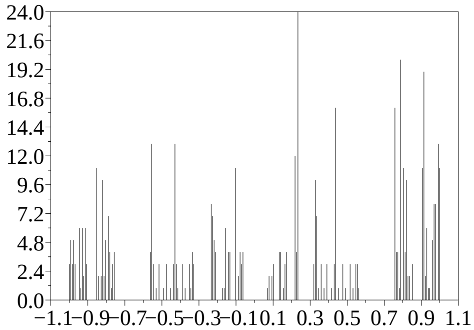


$a = \sigma(b, b)$ Група: $C_2 \ltimes IMG(1 - \frac{1}{z^2})$
$b = (b, c)$ Стискуючість: *так*
$c = (b, a)$ Рекурентність: *так*

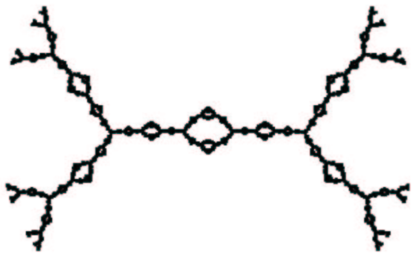
СГ: a^2, b^2, c^2, $abcabcacbacb$, $abcbcabcacbcbacb$

РФ: $2^0, 2^1, 2^3, 2^7, 2^{13}, 2^{24}, 2^{46}, 2^{89}, 2^{175}$

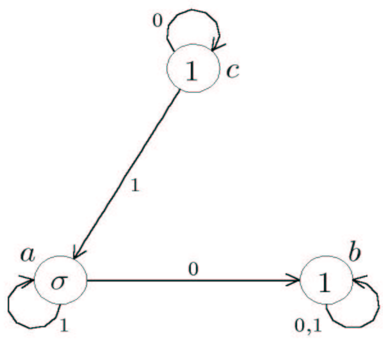
РГ: 1, 4, 10, 22, 46, 94, 184, 352, 664, 1244, 2296, 4198, 7612



Граничний простір



Автомат номер 929



$a = \sigma(b, a)$ Група:

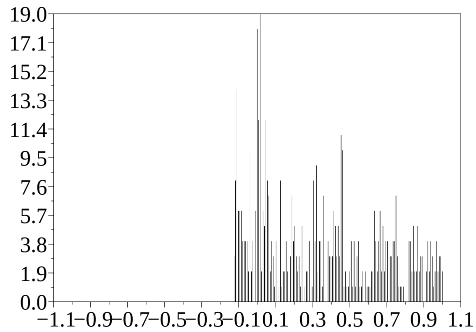
$b = (b, b)$ Стискуючість: *ні*

$c = (c, a)$ Рекурентність: *так*

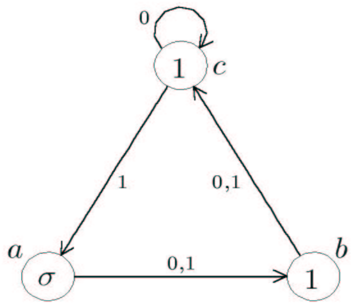
СГ: b, $a^{-3}cac^{-1}ac^{-1}ac$

РФ: $2^0, 2^1, 2^3, 2^6, 2^{12}, 2^{23}, 2^{45}, 2^{88}, 2^{174}$

РГ: $1, 5, 17, 53, 161, 475, 1387$



Автомат номер 968



$a = \sigma(b, b)$ Група: містить $\mathbf{Z}^5$ як

$b = (c, c)$ підгрупу індексу 16

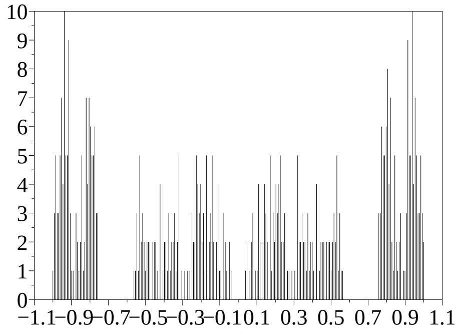
$c = (c, a)$ Стискуючість: *так*

Рекурентність: *ні*

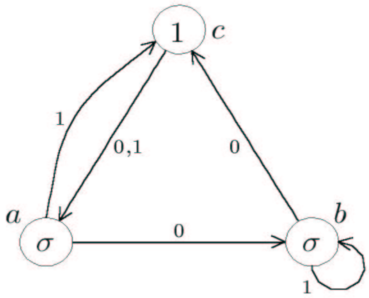
СГ: a^2, b^2, c^2, $abcabcacbacb$, $acbcbabacbcbab$, $acacbcbacacbcb$, $abcbcabcacbcbacb$, $acabacbabacabacbab$, $acbabacacacbacacab$, $acacacacbacacacacb$, $acbcbabcbacbcbabcb$, $acbcacbcbacbcacbcb$

РФ: $2^0, 2^1, 2^3, 2^6, 2^9, 2^{13}, 2^{17}, 2^{21}, 2^{25}$

РГ: 1, 4, 10, 22, 46, 94, 184, 338, 600, 1022, 1682



Автомат номер 2240

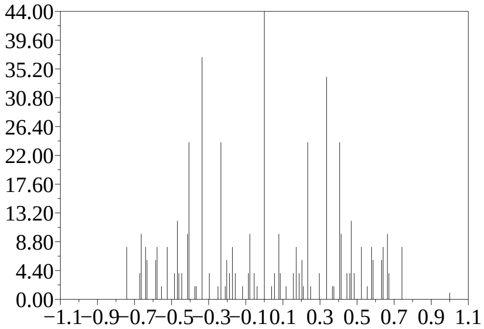


$a = \sigma(b, c)$
$b = \sigma(c, b)$
$c = (a, a)$

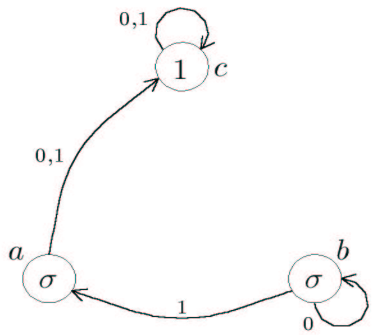
Група: F_3 — вільна рангу 3 (Альошин-Воробець)
Стискуючість: *ні*
Рекурентність: *ні*

СГ:

РФ: 2^0,2^1,2^2,2^4,2^7,2^{10},2^{14},2^{21},2^{34}
РГ: 1, 7, 37, 187, 937, 4687



Автомат номер 2853

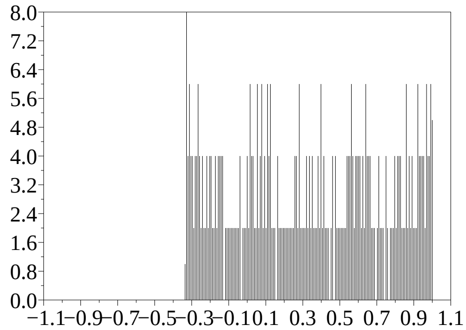


$a = \sigma(c, c)$
$b = \sigma(b, a)$
$c = (c, c)$

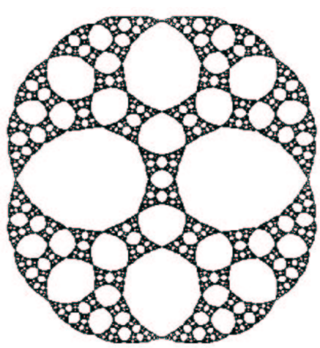
Група: $IMG\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2\right)$
Стискуючість: *так*
Рекурентність: *так*

СГ: c, a^2, $ab^{-1}ab^{-2}ab^{-1}abab^2ab$

РФ: 2^0,2^1,2^2,2^3,2^5,2^8,2^{14},2^{25},2^{47}
РГ: 1, 4, 10, 22, 46, 94, 190, 375, 731, 1422, 2752, 5246, 9908



Граничний простір



СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Алешин С.В.* Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Матем. заметки. — 1972. — **11**. — С. 319–328.

2. *Алешин С.В.* A free group of finite automata // Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. — 1983. — **4**. — С. 12–14.

4. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I.* On the spectrum of Hecke type operators related to some fractal groups // Tr. Mat. Inst. Steklova (Din. Sist., Avtom. i Beskon. Gruppy). — 2000. — **231**. — P. 5–45.

5. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Nekrashevych V.V.* From fractal groups to fractal sets // Fractals in Graz 2001, Trends Math., Birkhäuser, Basel. — 2003. — P. 25–118.

6. *Bartholdi L., Grigorchuk R.I., Šunić Z.* Branch groups // Handbook of algebra, North-Holland, Amsterdam. — 2003. — **3**. — P. 989–1112.

7. *Bartholdi L., Kaimanovich V., Nekrashevych V., Virág B.* Amenability of automata groups // preprint, 2005.

8. *Bondarenko I., Nekrashevych V.* Growth of Schreier graphs of groups generated by bounded automata // in preparation.

9. *Bartholdi L., Nekrashevych V.* Thurston equivalence of topological polynomials // Acta Math. — 2006. — **197**, N1. — P. 1–51.

11. *Bartholdi L., Šunić Z.* Some solvable automaton groups // Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI. — 2006. — **394**. — P. 11–29.

12. *Day M.M.* Amenable semigroups // Illinois J. Math. — 1957. — **1**. — P. 509–544.

13. *Erschler A.* Boundary behavior for groups of subexponential growth // Ann. of Math. — 2004. — **160**, N3. — P. 1183–1210.

14. *Fabrykowski J., Gupta N.* On groups with subexponential growth functions II // J. Indian Math. Soc. (N.S.) — 1991. — **56**, N1-4. — P. 217–228.

15. *Grigorchuk R.I., Linnell P., Schick T., Żuk A.* On a question of Atiyah // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. — 2000. — **331**, N9. — P. 663–668.

16. *Глушков В.М.* Абстрактная теория автоматов // Успехи матем. наук. — 1961. — **16**, N5. — С. 3–62.

17. *Григорчук Р.И., Некрашевич В.В., Сущанский В.И.* Автоматы, динамические системы и группы // Труды мат. института им. Стеклова. — 2000. — **231.** — С. 134–214.

18. *Greenleaf F.P.* Invariant means on topological groups and their applications // Van Nostrand Mathematical Studies, No. 16. Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1969.

19. *Григорчук Р.И.* К проблеме Бернсайда о периодических группах // Функциональный анализ и приложения. — 1980. — **14**, N1. — С. 53–54.

20. *Grigorchuk R.I.* Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — 1984. — **48**, N5. — P. 939–985.

21. *Grigorchuk R.I.* Just infinite branch groups // In Markus P. F. du Sautoy Dan Segal and Aner Shalev, editors, *New horizons in pro-p groups*, Birkhäuser Boston, Boston, MA. — 2000. — P. 121–179.

22. *Gupta N., Sidki S.* Some infinite p-groups // Algebra i Logika. — 1983. — **22**, N5. — P. 584–589.

23. *Gupta N.D., Sidki S.* On the Burnside problem for periodic groups // Math. Z. — 1983. — **182**, N3. — P. 385–388.

24. *Grigorchuk R.I., Šunić Z.* Asymptotic aspects of Schreier graphs and Hanoi Towers groups // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2006. — **342**, N8. — P. 545–550.

25. *Grigorchuk R.I., Savchuk D., Šunić Z.* The spectral problem, substitutions and iterated monodromy // to appear.

26. *Grigorchuk R.I., Żuk A.* The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum // Geom. Dedicata. — 2001. — **87**, N1-3. — P. 209–244.

27. *Hořejš J.* Transformations defined by finite automata // Problemy Kibernet. — 1963. — **9**. — P. 23–26.

28. *Kaloujnine L.* Sur le p-groupes de sylow du groupe symetriques de degre p^m // C.R. Acad. Sci. Paris — 1945. — **221**. — P. 222–224.

29. *Kaloujnine L.* Sur le p-groupes de sylow des groupes symetriques finis // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. — 1948. — **65**. — P. 239–279.

30. *Milnor J.W.* Problem 5603 // Amer. Mat. Monthly. — 1968. — **75**. — P. 685–686.

31. *Nekrashevych V.V.* Self-similar groups // volume 117 of *Mathematical Surveys and Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

32. *Reznikov I.I., Sushchansky V.I.* Two-state Mealy automata of intermediate growth over a two-letter alphabet // Mat. Zametki. — 2002. — **72**, N1. — P. 102-117.

33. *Sidki S.* Finite automata of polynomial growth do not generate a free group // Geom. Dedicata. — 2004. — **108**. — P. 193–204.

34. *Sushchansky V.I.* Periodic p-groups of permutations and the unrestricted Burnside problem // Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1979. — **247**, N3. — P. 557–561.

35. *John von Neumann.* Zur allgemeinen Theorie des Masses // Fund. Math. — 1929. — **13**. — P. 73–116, 333.

36. *Vorobets M., Vorobets Y.* On a free group of transformations defined by an automaton // to appear in Geometriae Dedicata, 2007.