УДК 517.95+511.2

©2007 р. І.О.Бобик[1], М.М.Симотюк[1,2,3]

[1]Національний університет „Львівська Політехніка“,
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України,
[3]Львівський національний університет імені Івана Франка

ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ВИЗНАЧНИКІВ ЗАДАЧ З ДВОМА КРАТНИМИ ВУЗЛАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Встановлено оцінки знизу для характеристичних визначників задач з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

The estimates from below for characteristic determinants of the two-point problems for linear factorized partial differential equations with constant coefficients are established.

1. Вступ

Нехай $Q_p^T=(0,T)\times\Omega_p$, де Ω_p — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $T>0$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_p$, $D_x=(-i\partial_{x_1},\ldots,-i\partial_{x_p})$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\ldots+k_px_p$; $\Pi_n=\{\vec{\lambda}\equiv(\lambda_1,\ldots,\lambda_n):\lambda_1<\ldots<\lambda_n\}$, $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A\subset\mathbb{R}^n$; W_α^β, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k e^{(ik,x)}$ за нормою

$$\|\varphi(x);W_\alpha^\beta\|=\sqrt{\sum_{|k|\geq 0}|\varphi_k|^2w_k^2(\alpha,\beta)},$$
$$w_k(\alpha,\beta)=(1+|k|)^\alpha\exp(\beta|k|).$$

В області Q_p^T розглянемо таку задачу:

$$L\left(\partial_t,D_x\right)u\equiv\prod_{j=1}^n\left(\partial_t-\lambda_jA(D_x)\right)u=0, \quad (1)$$

$$\begin{cases}V_j[u]\equiv\partial_t^{j-1}u\,|_{t=0}=\varphi_j, j=\overline{1,r},\\ V_{r+j}[u]\equiv\partial_t^{j-1}u\,|_{t=T}=\varphi_{r+j}, j=\overline{1,l},\end{cases} \quad (2)$$

де $u\equiv u(t,x)$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Pi_n$, $\varphi_j\equiv\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, $1\leq r<n$, $l=n-r$, $A(D_x)$ — такий диференціальний вираз, що

$$\begin{gathered}\exists\, N\in\mathbb{N}\quad\exists\, a_1,a_2>0\quad\forall\, k\in\mathbb{Z}^p\\ a_1|k|^N\leq|A(k)|\leq a_2(1+|k|)^N.\end{gathered} \quad (3)$$

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) у просторах 2π-періодичних за змінними $x_1,\ldots,x_p$ функцій виникають визначники:

$$\Delta(k)\equiv\Delta(k,\vec{\lambda})=\det\left\|V_j\left[e^{\lambda_qA(k)t}\right]\right\|_{j,q=1}^n, \quad (4)$$

де $k\in\mathbb{Z}^p,\vec{\lambda}\in\Pi_n$. Якщо $\Delta(k,\vec{\lambda})\neq 0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$, то задача (1), (2) має єдиний формальний розв'язок $u=u(t,x)$, який зображується рядом

$$u=\sum_{|k|\geq 0}e^{(ik,x)}\sum_{j,q=1}^n\frac{\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})}{\Delta(k,\vec{\lambda})}e^{\lambda_qA(k)t}\varphi_{jk}, \quad (5)$$

де φ_{jk}, $k\in\mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, а $\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})$ — алгебричне доповнення елемента $V_j\left[e^{\lambda_qA(k)t}\right]$, $j,q=1,\ldots,n$, у визначнику $\Delta(k,\vec{\lambda})$. Якщо, крім того, існує стала $\gamma\in\mathbb{R}$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$ виконується нерівність

$$|\Delta(k,\vec{\lambda})|\geq\begin{cases}|k|^{-\gamma}\,e^{\delta_1(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)},\ k\in K_1,\\ |k|^{-\gamma}\,e^{\delta_2(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)},\ k\in K_2,\end{cases} \quad (6)$$

де

$$\delta_1(\vec{\lambda})=\lambda_{r+1}+\ldots+\lambda_n,\delta_2(\vec{\lambda})=\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-r},$$
$$K_1=\{k\in\mathbb{Z}^p:\mathrm{Re}\,A(k)\geq 0\},K_2=\mathbb{Z}^p\backslash K_1,$$

то на основі оцінок для функцій $e^{\lambda_qA(k)t}$, $q=1,\ldots,n$, та алгебричних доповнень $\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})$,

$j, q = 1, \ldots, n$, можна встановити збіжність ряду (5) у шкалі просторів $C^n([0,T]; W^{\beta}_{\alpha})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_j \in W^{\beta_0}_{\alpha_0}$, $j = 1, \ldots, n$, для деяких $\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{R}$. Тому важливим є дослідження питання про можливість виконання нерівності (6). Це і є метою даної роботи. Її основними результатами є наступні твердження.

Теорема 1. *Якщо для виразу $A(D_x)$ виконується умова* (3), *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) $\vec{\lambda} \in \Pi^n$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > \gamma_0$,*

$$\gamma_0 = p(n-r)(n+r-1)/2 - NC_r^2.$$

Відзначимо, що в теоремі 1 формулювання „*для майже всіх* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$“, взагалі кажучи, не можна замінити на формулювання „*для всіх* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$“, про що свідчить приклад 1 з розділу 6 цієї роботи. Таке уточнення теореми 1 можна здійснити в окремих випадках, якщо амплітуди $A(k) \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, диференціального виразу $A(D_x)$ є дійсними.

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (3). *Якщо $A(k) \in \mathbb{R}$, $A(k) > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, то для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ нерівність* (6) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathbb{Z}^p$ при $\gamma > -N(C_r^2 + C_l^2)$.*

Зауважимо, що теореми 1, 2 є точними стосовно експоненційного множника у нерівності (6) в сенсі наступного твердження.

Теорема 3. *Для довільного $T > 0$ та довільної додатної функції $\psi : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ такої, що*

$$\lim_{|k|\to\infty} \psi(k)/\ln|k| = \infty, \tag{7}$$

нерівність

$$|\Delta(k)| \geq \begin{cases} |k|^{-\gamma} e^{\psi(k)+\delta_1(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}A(k)}, k \in K_1, \\ |k|^{-\gamma} e^{\psi(k)+\delta_2(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}A(k)}, k \in K_2, \end{cases} \tag{8}$$

не може виконуватися для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ при жодних $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ та $\gamma \in \mathbb{R}$.

Діофантові властивості характеристичних визначників крайових задач (2) для рівнянь із частинними похідними досліджувались у роботах [2, 3, 6, 8, 9]. Так, у праці [6] запропоновано методику доведення метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (2) для випадку гіперболічних рівнянь, які містять похідні за змінною t тільки парного порядку. За допомогою цієї методики у [6] встановлено результат про виконання степеневих оцінок знизу для визначників таких задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та значення правого вузла інтерполяції T. Із цитованого результату випливає розв'язність задач з умовами (2) для гіперболічних рівнянь у соболєвській шкалі просторів для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівняння та число T. Іншими словами, для „переважної“ більшості гіперболічних рівнянь задача з умовами (2) розв'язна у соболєвській шкалі у „переважній“ більшості областей Q_p^T.

У працях [2, 3] запропоновану у [6] методику узагальнено на випадок крайових задач (2) для безтипних рівнянь із частинними похідними, які містять похідні за змінною t як парного, так і непарного порядків. Із доведених у [2, 3] метричних оцінок знизу для визначників задач з умовами (2) для безтипних рівнянь випливає розв'язність цих задач у просторах періодичних функцій експоненційного типу для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених з коефіцієнтів рівняння та числа T.

У роботах [8, 9] запропоновано новий, порівняно з [2, 3, 6], метод доведення метричних теорем про оцінки знизу для визначників задач з умовами (2) для безтипних рівнянь із частинними похідними. На основі цього методу у [8, 9] встановлено розв'язність крайових задач (2) для майже всіх чисел $T > 0$ для довільного безтипного рівняння у просторах періодичних функцій експоненційного типу. Інакше кажучи, для кожного безтипного рівняння задача з умовами (2) розв'язна у шкалі просторів експоненційного типу у „переважній“ більшості областей Q_p^T.

Дана робота розвиває і доповнює дослідження, проведені у [2, 3, 6, 8, 9]. Її основною особливістю є результат про те, що для факторизованого рівняння (1) вдається встановити метричні оцінки вигляду (6) для будь-якого $T > 0$ і для майже всіх векторів $\vec{\lambda}$. Враховуючи, що з оцінки (6) випливає розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів $C^n([0,T]; W_\alpha^\beta)$ (факт, відзначений нами вище), з цього результату дістаємо твердження про розв'язність в кожній області Q_p^T задачі з умовами (2) для „переважної" більшості факторизованих рівнянь вигляду (1). Наведене твердження посилює (у плані розв'язності) результати робіт [2, 3, 6]. Крім того, твердження теореми 1 даної роботи є сильнішим (і стосовно точності оцінки, і стосовно кількості параметрів, задіяних у метричних оцінках) від метричних тверджень робіт [2, 3, 6].

Зауважимо, що для доведення сформульованої теореми 1 використано методику, відмінну від описаної у [2, 3, 6, 8, 9]. Нарешті відзначимо, що отримані у даній роботі результати для випадку дійснозначного вектора $\vec{\lambda}$ можна перенести на випадок, коли $\vec{\lambda} \in \mathbb{C}^n$.

2. Оцінки лебегових мір „виняткових" множин квазімногочленів

Для заданої на відрізку $[a,b]$ функції $f(t)$ символом $E(f, \varepsilon, [a,b])$, $\varepsilon > 0$, будемо позначати множину $\{t \in [a,b] : |f(t)| < \varepsilon\}$. Множину $E(f, \varepsilon, [a,b])$ називатимемо „ε-винятковою" для функції $f(t)$ на відрізку $[a,b]$. Для доведення теореми 1 нам знадобляться допоміжні твердження про оцінки зверху для лебегових мір „ε-виняткових" множин $E(f, \varepsilon, [a,b])$ гладких функцій $f(t)$.

Лема 1. [1, 7] *Нехай $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^n[a,b]$ і для всіх $t \in [a,b]$ виконується нерівність $|f^{(n)}(t)| > \delta$, $\delta > 0$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$*

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a,b]) \leq 2n(n!\varepsilon/\delta)^{1/n}.$$

Нехай $R(\lambda)$ — поліном степеня n вигляду

$$R(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda^{n-j}, \ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}. \quad (9)$$

Для $R(\lambda)$ покладемо: $A_R = 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} |a_j|^{1/j}$.

Нижче розглядатимемо квазімногочлени вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} e^{\mu_j t} p_j(t), \quad \mu_j \neq \mu_q, \quad j \neq q, \quad (10)$$

де $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$, а $p_1(t), \ldots, p_n(t)$ — многочлени степенів $n_1 - 1, \ldots, n_m - 1$ відповідно ($n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$). Для квазімногочлена $Q(t)$ позначимо: $M_Q = 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq m} |\mu_j|$.

Лема 2. *Нехай $R(\lambda)$, $Q(t)$ — многочлен і квазімногочлен, визначені рівностями* (9), (10) *відповідно. Якщо для всіх $t \in [a,b]$ виконується умова*

$$|R(d/dt)Q(t)| \geq \delta > 0,$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(Q, \varepsilon, [a,b]) \leq C_1 M_Q (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $C_1 = C_1(n, n_0, b-a)$, $n_0 \equiv n_1 + \ldots + n_m$.

Доведення. З умови леми випливає, що в кожній точці $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\max_{0 \leq j \leq n} \left\{ A_R^{n-j} |\mathrm{Re} Q^{(j)}(t)|, A_R^{n-j} |\mathrm{Im} Q^{(j)}(t)| \right\} \geq$$

$$\geq \delta/(2n+2). \quad (11)$$

Як і в доведенні теореми 2.5.6 у [10], можна встановити, що існує розбиття відрізка $[a,b]$ на відрізки J_q, $q = 1, \ldots, K$, кількість K відрізків якого не перевищує $C_2 M_Q$, $C_2 = C_2(n, n_0, b-a)$, що володіє такою властивістю: на кожному відрізку J_q цього розбиття деяка функція серед $(2n+2)$ функцій

$$A_R^{n-j} |\mathrm{Re} Q^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

$$A_R^{n-j} |\mathrm{Im} Q^{(j)}(t)|, \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

є максимальною. Тоді з (11) випливає, що для довільного $q \, (1 \leq q \leq K)$ існує $j(q)$ $(0 \leq$

$j(q) \le n)$ таке, що в кожній точці $t \in J_q$ виконується нерівність

$$A_R^{n-j(q)} \, |\mathrm{Re} Q^{(j(q))}(t)| \ge \delta/(2n+2) \qquad (12)$$

або нерівність

$$A_R^{n-j(q)} \, |\mathrm{Im} Q^{(j(q))}(t)| \ge \delta/(2n+2). \qquad (13)$$

З нерівностей (12), (13) випливає, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ відрізок J_q не містить точок множини $E(Q, \varepsilon, [a,b])$, якщо $j(q) = 0$. Якщо ж $j(q) \ne 0$, то з оцінок

$$(\varepsilon/(\delta A_R^{n-j}))^{1/j} \le (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \; j = 1, \ldots, n,$$

(які випливають з того, що $\varepsilon/\delta \in (0,1)$) та з нерівностей (12), (13) на підставі леми 1 дістаємо, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$ виконується хоча б одна з наступних оцінок

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \, E(\mathrm{Re} Q, \varepsilon, J_q) \le C_3 \left(\frac{\varepsilon}{\delta A_R^{n-j(q)}}\right)^{\frac{1}{j(q)}} \le$$

$$\le C_3 \, (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_3 = C_3(n),$$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \, E(\mathrm{Im} Q, \varepsilon, J_q) \le C_4 \left(\frac{\varepsilon}{\delta A_R^{n-j(q)}}\right)^{\frac{1}{j(q)}} \le$$

$$\le C_4 \, (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_4 = C_4(n).$$

З отриманих оцінок на підставі очевидних включень

$$E(Q, \varepsilon, J_q) \subset E(\mathrm{Re} Q, \varepsilon, J_q),$$

$$E(Q, \varepsilon, J_q) \subset E(\mathrm{Im} Q, \varepsilon, J_q),$$

дістаємо, що при $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R^n}\right]$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \, E(Q, \varepsilon, [a,b]) = \sum_{q=1}^{K} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \, E(Q, \varepsilon, J_q) \le$$

$$\le C_5 \, M_Q \, (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \quad C_5 = C_5(n, n_0, b-a).$$

Лему доведено.

Лема 3. *Нехай $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду (10), а $R(\lambda)$ — многочлен степеня n. Якщо виконується умова*

$$\forall \, t \in [a,b] \quad |R(d/dt)Q(t)| \ge \delta e^{\mu t} > 0, \; \mu \in \mathbb{R},$$

то для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_R(\mu)^n}\right]$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} \{t \in [a,b] : |Q(t)| \le \varepsilon e^{\mu t}\} \le$$

$$\le C_6 \, (M_Q + |\mu|) \, (\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}}, C_6 = C_6(n, n_0, b-a),$$

де $A_R(\mu) \equiv 1 + \max\limits_{0 \le j \le n-1} \left|\frac{R^{(j)}(\mu)}{j!}\right|^{\frac{1}{(n-j)}}$.

Доведення. Очевидно, для всіх $t \in [a,b]$ виконується нерівність $|S(d/dt)G(t)| \ge \delta$, де $S(\lambda) \equiv R(\lambda + \mu)$, а $G(t) = Q(t)e^{-\mu t}$. Оскільки $S(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \ldots + b_n$, де

$$b_j = R^{(n-j)}(\mu)/(n-j)!, \quad j = 1, \ldots, n,$$

то $A_S \equiv 1 + \max\limits_{1 \le j \le n} |b_j|^{1/j} = A_R(\mu)$. Застосовуючи до многочлена $S(\lambda)$ та квазімногочлена $G(t)$ лему 2, дістанемо, що для всіх $\varepsilon \in \left(0, \frac{\delta}{(2n+2)A_S^n}\right]$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} E(G, \varepsilon, [a,b]) \le C_1 \, M_G \, (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $M_G \equiv 1 + \max\limits_{1 \le j \le m} |\mu_j - \mu|$. Для завершення доведення залишається врахувати нерівність $M_G \le M_Q + |\mu|$ і те, що $E(G, \varepsilon, [a,b]) = \{t \in [a,b] : |Q(t)| \le \varepsilon e^{\mu t}\}$. Лему доведено.

3. Доведення теореми 1

Нехай $P_n = \prod\limits_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ — довільний паралелепіпед такий, що $P_n \subset \Pi_n$. Для кожного $k \in K_1 \bigcup K_2$ запровадимо такі множини:

$$E_\gamma(k) = \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| <$$

$$< |k|^{-\gamma} \, e^{\delta_1(\vec{\lambda}) T \mathrm{Re}\, A(k)}\}, \; \text{якщо } k \in K_1,$$

$$E_\gamma(k) = \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta(k, \vec{\lambda})| <$$

$$< |k|^{-\gamma} \, e^{\delta_2(\vec{\lambda}) T \mathrm{Re}\, A(k)}\}, \; \text{якщо } k \in K_2.$$

Нехай E_γ — множина векторів $\vec{\lambda}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\gamma(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми 1 досить перевірити, що для довільного паралелепіпеда $P_n \subset \Pi_n$ $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\gamma = 0$, якщо $\gamma > \gamma_0$, де $\gamma_0 = p(n-r)(n+r-1)/2 - NC_r^2$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі [5, с. 13], для цього досить встановити збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\gamma(k)$. Доведемо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ виконується оцінка

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\gamma(k) \le C_7|k|^{-p-\varepsilon}, \qquad (14)$$

де додатні сталі ε, C_7 не залежать від k. З оцінки (14), очевидно, випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} E_\gamma(k)$.

Встановимо оцінку (14) для випадку, коли $k\in K_1\backslash\{\vec{0}\}$. Через $\Delta_j(k,\vec{\lambda})$, $j=1,\dots,n$, позначимо визначник, який одержується з визначника $\Delta(k,\vec{\lambda})$ викреслюванням останніх $(n-j)$ рядків та останніх $(n-j)$ стовпців. Для кожного $k\in K_1\backslash\{\vec{0}\}$ розглянемо множини:

$$F_\gamma(k)=\{\vec{\lambda}\in P_n : |\Delta_n(k,\vec{\lambda})|<\nu_n(k,\vec{\lambda})\},$$

$$F_\gamma(j,k)=\{\vec{\lambda}\in P_n : |\Delta_j(k,\vec{\lambda})|<\nu_j(k,\vec{\lambda}),$$

$$|\Delta_{j-1}(k,\vec{\lambda})|\ge\nu_{j-1}(k,\vec{\lambda})\},\ j=r+1,\dots,n,$$

де числа $\nu_j(k,\vec{\lambda})$, $k\in K_1$, $j=r,\dots,n$, визначаються таким способом:

$$\nu_r(k,\vec{\lambda})=|A(k)|^{C_r^2}\prod_{r\ge j>q\ge 1}|\lambda_j-\lambda_q|,$$

$$\nu_j(k,\vec{\lambda})=\nu_r(k,\vec{\lambda})\xi_j(k)\prod_{q=r+1}^{j}e^{\lambda_q \mathrm{Re}A(k)T},\ j>r,$$

$$\xi_j(k)=\frac{\xi_{j-1}(k)}{|k|^{p(j-1)+\varepsilon_j}},\quad j>r,\quad \xi_r(k)=1,$$

$\varepsilon_j=\varepsilon_0/2^{n-j+1}$, $r+1\le j\le n$, $\varepsilon_0=\gamma-\gamma_0$. Зауважимо, що для всіх $k\in K_1\backslash\{\vec{0}\}$ множина $F_\gamma(k)$ міститься в об'єднанні множин $\bigcup_{j=r+1}^{n}F_\gamma(j,k)$. Дійсно, нехай $\vec{\lambda}\in F_\gamma(k)$. Якщо $\vec{\lambda}\notin F_\gamma(j,k)$ для всіх $j\in\{r+1,\dots,n\}$, то, згідно з вибором множин $F_\gamma(j,k)$, $r+1\le j\le n$, виконується суперечлива нерівність

$$\nu_r(k,\vec{\lambda})\equiv|\Delta_r(k,\vec{\lambda})|<\nu_r(k,\vec{\lambda}).$$

Тому $\vec{\lambda}\in F_\gamma(j_0,k)$ для деякого номера $j_0\in\{r+1,\dots,n\}$, а, отже, потрібне включення встановлено. Таким чином,

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}F_\gamma(k)\le\sum_{j=r+1}^{n}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}F_\gamma(j,k). \qquad (15)$$

Для кожної з множин $F_\gamma(j,k)$, $r+1\le j\le n$, за теоремою Фубіні маємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n}F_\gamma(j,k)=\int\limits_{\overline{P}_j}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}}F_\gamma(j,k,\vec{\lambda}_j)d\vec{\lambda}_j, \quad (16)$$

де $\overline{P}_j=\prod\limits_{q=1,q\ne j}^{n}[a_q,b_q]$,

$$\vec{\lambda}_j=(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\dots,\lambda_n),$$

$$F_\gamma(j,k,\vec{\lambda}_j)=\{\lambda_j\in[a_j,b_j] :$$

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_{j-1},\lambda_j,\lambda_{j+1},\dots,\lambda_n)\in F_\gamma(j,k)\}.$$

Щоб оцінити зверху лебегові міри множин $F_\gamma(j,k,\vec{\lambda}_j)$, $r+1\le j\le n$, застосуємо лему 3. Для цього запровадимо такі многочлени:

$$R_j(\mu,k)=\mu^r(\mu-A(k)T)^{j-r-1};\ r+1\le j\le n.$$

Визначник $\Delta_j(k,\vec{\lambda})$, $j=r+1,\dots,n$, розвинемо за елементами його останнього стовпця, а до одержаного розвинення застосуємо диференціальний вираз $R_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j},k\right)$. У результаті дістанемо співвідношення

$$R_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j},k\right)\Delta_j(k,\vec{\lambda})=(j-r-1)!A^{j-1}(k)\times$$

$$\times e^{\lambda_j A(k)T}T^r\Delta_{j-1}(k,\vec{\lambda}),\ r+1\le j\le n. \quad (17)$$

Зазначимо, що для фіксованих λ_q, $q\ne j$, визначник $\Delta_j(k,\vec{\lambda})$ при $j=r+1,\dots,n$ є квазімногочленом змінної λ_j, модулі показників експонент якого не перевищують $|A(k)|T$. Якщо $\vec{\lambda}\in F_\gamma(j,k)$, то з формул (17) та означення множини $F_\gamma(j,k)$ випливає, що

$$\left|R_j\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_j},k\right)\Delta_j(k,\vec{\lambda})\right|\ge|A(k)|^{j-1}T^r\times$$

$$\times e^{\lambda_j\mathrm{Re}\,A(k)T}\nu_{j-1}(k,\vec{\lambda}),\ r+1\le j\le n. \quad (18)$$

Степінь многочлена $R_j(\mu,k)$, $j=r+1,\dots,n$, за змінною μ дорівнює $(j-1)$, а

$$|\partial^s R_j(A(k)T,k)/\partial\mu^s|\le C_8|A(k)|^s,$$

$$0\le s\le j-1,\quad C_8>0,$$

де стала C_8 не залежить від k. Тому з оцінок (18) на підставі леми 3 отримуємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ справджується нерівність

$$\begin{gathered}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_\gamma(j,k,\vec{\lambda}_j) \le C_9 |A(k)| \times \\ \times \left(\frac{\xi_j(k)}{|A(k)|^{j-1} \xi_{j-1}(k)} \right)^{1/(j-1)} \le \\ \le C_{10} |k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}_j},\ j = r+1, \ldots, n,\end{gathered} \tag{19}$$

де $\widetilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_0 / ((j-1) 2^{n-j+2})$, а стала $C_{10} > 0$ не залежить від вибору значень $\lambda_q \in [a_q, b_q]$, $q = 1, \ldots, n$, $q \ne j$. Інтегруючи оцінки (19), з рівностей (16) отримаємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\gamma(j,k) \le C_{11} |k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}}, r+1 \le j \le n, \tag{20}$$

де $\widetilde{\varepsilon} = \min\limits_{r+1 \le j \le n} \widetilde{\varepsilon}_j$. Тоді з оцінок (20) на підставі нерівностей (15) дістаємо, що для всіх $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\gamma(k) \le (n-r) C_{11} |k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}}. \tag{21}$$

Враховуючи, що

$$\forall \vec{\lambda} \in P_n \prod_{r \ge j > q \ge 1} |\lambda_j - \lambda_q| \ge \prod_{r \ge j > q \ge 1} |a_j - b_q|,$$

і те, що $\varepsilon_{r+1} + \ldots + \varepsilon_n < \varepsilon_0$, а

$$\nu_n(k,\vec{\lambda}) = e^{(\lambda_{r+1} + \ldots + \lambda_n) \mathrm{Re} A(k) T} \prod_{r \ge j > q \ge 1} |\lambda_j - \lambda_q| \times$$

$$\times \frac{|A(k)|^{C_r^2}}{|k|^{p(r+\ldots+n-1)+\varepsilon_{r+1}+\ldots+\varepsilon_n}}, \quad k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\},$$

з оцінок (3) дістаємо, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$ виконується включення $E_\gamma(k) \subset F_\gamma(k)$, якщо $\gamma > \gamma_0$. Тому з оцінки (21) випливає істинність оцінки (14) для $k \in K_1 \setminus \{\vec{0}\}$.

Для випадку, коли $k \in K_2 \setminus \{\vec{0}\}$, оцінку (14) можна встановити аналогічними міркуваннями. Теорему доведено.

4. Доведення теореми 2

Для доведення використаємо таку лему.

Лема 4. *Якщо $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ для деякого $k \in \mathbb{Z}^p$, то для всіх векторів $\vec{\lambda} \in \Pi^n$ виконується нерівність $\Delta(k,\vec{\lambda}) \ne 0$.*

Доведення. Використаємо метод математичної індукції за n — кількістю координат вектора $\vec{\lambda}$. Щоб відобразити залежність визначника $\Delta(k,\vec{\lambda})$ від $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ та кратності r лівого вузла в умовах (2), використовуватимемо для $\Delta(k,\vec{\lambda})$ також позначення $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

При $n = 2$ кратність r лівого вузла може дорівнювати лише 1, адже $1 \le r < n$. У цьому випадку

$$\Delta_1(k, \lambda_1, \lambda_2) = e^{\lambda_2 A(k) T} - e^{\lambda_1 A(k) T} \ne 0,$$

якщо $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і $\lambda_1 < \lambda_2$.

Припустимо, що для деякого $m \ge 2$

$$\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ne 0$$

для кожного r такого, що $1 \le r < m$, якщо $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ і $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Доведемо, що для довільних дійсних чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ таких, що $\lambda_1 < \ldots < \lambda_{m+1}$, нерівність $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}) \ne 0$ виконується для кожного r, $1 \le r < m+1$, якщо $A(k) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для фіксованих чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ таких, що $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ визначник $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda)$ як функція від λ на проміжку $[\lambda_1, +\infty)$ перетворюється в нуль в m різних точках $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Припустимо, що існує точка $\theta \in [\lambda_1, +\infty)$, відмінна від $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, така, що $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \theta) = 0$. Якщо $1 \le r < m$, то, згідно з припущенням індукції, $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ne 0$; якщо ж $r = m$, то

$$\Delta_m(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \prod_{m \ge j > q \ge 1} (\lambda_j - \lambda_q) \ne 0.$$

Тоді для всіх $\lambda \in [\lambda_1, +\infty)$ при $1 \le r < m+1$ виконується співвідношення

$$\begin{gathered}\left(\tfrac{\partial}{\partial \lambda}\right)^r \left(\tfrac{\partial}{\partial \lambda} - A(k) T\right)^{m-r} \times \\ \times \Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda) = (m-r)! T^r \times \\ \times A^m(k) e^{\lambda A(k) T} \Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ne 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Оскільки визначник $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda)$ як функція змінної λ має на проміжку $[\lambda_1, +\infty)$ принаймні $(m+1)$ різних нулів $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \theta$, многочлен $R(\mu, k) \equiv \mu^r (\mu - A(k) T)^{m-r}$ має степінь m, а його обидва нулі є дійсними, то за узагальненою теоремою Ролля (див. задачу 92 у [4, с. 63]) існує точка $\xi \in (\lambda_1, +\infty)$ така, що $R\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, k\right) \Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda)\,|_{\lambda=\xi} = 0$, що суперечить виконанню співвідношення (22). Отже, $\Delta_r(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda)$ при фіксованих $\lambda_1 < \ldots < \lambda_m$ як функція від λ на проміжку $(\lambda_m, +\infty)$ не перетворюється в нуль.

Зауваження 1. Якщо $r = 1$ або $r = n-1$ твердження леми 4 можна встановити іншими міркуваннями. Наведемо їх.

Розкриваючи визначник $\Delta_1(k, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ за елементами першого рядка, дістаємо, що

$$\Delta_1(k, \vec{\lambda}) = A^{C^2_{n-1}}(k) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j - \lambda_q) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\mu_j A(k) T}}{\prod\limits_{q=1, q\neq j}^{n} (\mu_j - \mu_q)}, \tag{23}$$

де $\mu_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n - \lambda_j$, $j = 1, \ldots, n$. Згідно із задачею 97 у [4, с. 64], існує точка ξ, яка лежить всередині найменшого інтервалу, що містить точки $\mu_1, \ldots, \mu_n$, така, що

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\mu_j A(k) T}}{\prod\limits_{q=1, q\neq j}^{n} (\mu_j - \mu_q)} = \frac{(A(k)T)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\xi A(k) T}.$$

Звідси та з формули (23) випливає твердження леми для випадку $r = 1$.

Якщо ж $r = n-1$, то твердження леми отримуємо із розвинення

$$\Delta_{n-1}(k, \vec{\lambda}) = A^{C^2_{n-1}}(k) \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j - \lambda_q) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\lambda_j A(k) T}}{\prod\limits_{q=1, q\neq j}^{n} (\lambda_j - \lambda_q)}$$

та твердження задачі 97 у [4, с. 64].

Перейдемо тепер до доведення теореми 2.

Через $C(n, m)$, $1 \leq m \leq n$, позначимо множину наборів $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$, складених з m натуральних чисел $i_1, \ldots, i_m$ таких, що $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$. Для набору $\omega = (i_1, \ldots, i_m)$ покладемо: $\operatorname{set}\omega = \{i_1, \ldots, i_m\}$, $\Lambda_\omega = \lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_m}$, $H_\omega = \prod\limits_{m \geq j > q \geq 1} (\lambda_{i_j} - \lambda_{i_q})$.

Доведення теореми 2. Розкриваючи визначник $\Delta(k, \vec{\lambda})$ за правилом Лапласа за мінорами перших r рядків, дістанемо, що

$$\Delta(k, \vec{\lambda}) = A^{C^2_r + C^2_l}(k) \times$$
$$\times \sum_{\omega \in C(n,r)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{\Lambda_{\sigma(\omega)} A(k) T}, \tag{24}$$

де набір $\sigma(\omega) \in C(n, l)$ однозначно визначається за набором $\omega = (i_1, \ldots, i_r) \in C(n, r)$ умовою $\operatorname{set}\sigma(\omega) \cap \operatorname{set}\omega = \emptyset$, а $s_\omega = C^2_{r+1} + i_1 + \ldots + i_r$. Оскільки $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, то

$$\forall \omega \in C(n, r)\ \forall \sigma \in C(n, l) \quad H_\omega H_\sigma \neq 0, \tag{25}$$

а з оцінок (3) випливає, що

$$\forall \sigma \in C(n, l) \backslash \sigma_0$$
$$\lim_{|k| \to \infty} e^{(\Lambda_\sigma - \Lambda_{\sigma_0}) A(k) T} = 0, \tag{26}$$

де $\sigma_0 \equiv (r+1, \ldots, n) \in C(n, l)$. Із співвідношень (25), (26) випливає, що знайдеться $N_1 > 0$ таке, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > N_1$, виконується оцінка

$$\left| \sum_{\omega \in C(n,r) \backslash \sigma_0} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{(\Lambda_{\sigma(\omega)} - \Lambda_{\sigma_0}) A(k) T} \right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \left| H_{\omega_0} H_{\sigma_0} \right|,$$

де $\omega_0 \equiv (1, \ldots, r) \in C(n, r)$. Звідси дістаємо, що $\forall\, k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > N_1$,

$$\left| \sum_{\omega \in C(n,r)} (-1)^{s_\omega} H_\omega H_{\sigma(\omega)} e^{\Lambda_{\sigma(\omega)} A(k) T} \right| \geq$$
$$\geq \frac{1}{2} |H_{\omega_0} H_{\sigma_0}| e^{\Lambda_{\sigma_0} A(k) T}. \tag{27}$$

Оскільки $A(k) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, $\vec{\lambda} \in \Pi_n$, то, згідно з лемою 4, $\Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Враховуючи нерівності (3), (27), звідси дістаємо, що існує стала $C_{12} > 0$ така, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується оцінка

$$|\Delta(k, \vec{\lambda})| \geq C_{12} |k|^{N(C^2_r + C^2_l)} e^{\Lambda_{\sigma_0} A(k) T}$$

З отриманої оцінки випливає твердження теореми.

5. Доведення теореми 3

Припустимо, що існує вектор $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ такий, що для деякого $\gamma \in \mathbb{R}$ нерівність (8) виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$. Легко перевірити, що при виконанні умови (3) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \{\vec{0}\}$, справджується оцінка

$$|\Delta(k)| \leq \begin{cases} C_{13}|k|^{\xi} e^{\delta_1(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}A(k)}, k \in K_1, \\ C_{13}|k|^{\xi} e^{\delta_2(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}A(k)}, k \in K_2, \end{cases} \tag{28}$$

де $C_{13} > 0$, $\xi = N(C_r^2 + C_l^2)$. З оцінок (8), (28) випливає, що для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $C_{13}|k|^{\xi+\gamma} \geq e^{\psi(k)}$, а, отже, й нерівність

$$\ln C_{13} + (\xi + \gamma)\ln|k| \geq \psi(k), \tag{29}$$

яка суперечить умові (7). З отриманої суперечності випливає твердження теореми 3.

6. Приклади

Наведемо приклади, які доповнюють основний зміст роботи і демонструють точність теорем, доведених вище.

Приклад 1. Для задачі

$$\prod_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial t} - j\alpha\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x) = 0, \quad \alpha \in (0,1),$$

$$u\,|_{t=0} = \varphi_1, \quad u_t\,|_{t=0} = \varphi_2, \quad u\,|_{t=2} = \varphi_3,$$

де $(t,x) \in Q_1^2$, безпосереднім підрахунком отримуємо, що при $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$$|\Delta(k)| = 4|\alpha k|\sin^2(k\alpha) \leq$$
$$\leq 4|k||\sin(k\alpha - m\pi)| \leq 4\pi k^2\left|\tfrac{\alpha}{\pi} - \tfrac{m}{k}\right|,$$

де m — таке ціле число, що $|k\alpha - m\pi| \leq \frac{1}{2}$. За теоремою про існування ірраціональних чисел, які як завгодно добре наближаються раціональними [11, с. 48], для довільної додатної функції $\psi(k)$ знайдеться таке ірраціональне число $\alpha/\pi \in (0,\pi)$, для якого нерівність $\left|\frac{\alpha}{\pi} - \frac{m}{k}\right| < \frac{\psi(k)}{4\pi k^2}$, має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k, m. Для вибраного у такий спосіб числа α/π нерівність

$$|\Delta(k)| \leq \psi(k)$$

має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах k. Це означає, що в загальному випадку у теоремі 1 формулювання „для майже всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$“ не можна замінити на формулювання „для всіх $\vec{\lambda} \in \Pi_n$“.

Приклад 2. Для задачі

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi_j\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1\right)\right)u(t,x) = 0, \tag{30}$$

$$\begin{cases} \partial_t^{j-1}u\,|_{t=0} = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\ \partial_t^{j-1}u\,|_{t=T} = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \end{cases} \tag{31}$$

де $(t,x) \in Q_1^2$, $\xi_1,\ldots,\xi_n > 0$, твердження леми 4 можна встановити не безпосереднім обчисленням відповідного визначника і наступною перевіркою відмінності його від нуля, а іншими міркуваннями. Наведемо їх. Відомо [3, 10], що $\Delta(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ тоді і тільки тоді, коли задача (30), (31) має лише тривіальний розв'язок $u(t,x)$. Припустимо, що k-ий коефіцієнт Фур'є функції $u(t,x)$, який позначимо через $u_k(t)$, є відмінним від тотожного нуля. Функція $u_k \in C^{2n}[0,T]$ є розв'язком такої задачі:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{d^2}{dt^2} - \xi_j(k^2+1)\right)u_k(t) = 0, \tag{32}$$

$$\begin{cases} u_k^{(j-1)}(0) = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \\ u_k^{(j-1)}(T) = 0, \quad j = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{33}$$

Домножимо рівняння (32) на $\overline{u}_k(t)$ і отриману рівність проінтегруємо на відрізку $[0,T]$. У результаті дістанемо, що

$$\int_0^T u_k^{(2n)}(t)\overline{u}_k(t)dt + \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{n-j}a_j\times$$
$$\times(k^2+1)^{n-j}\int_0^T u_k^{(2j)}(t)\overline{u}_k(t)dt = 0, \tag{34}$$

де $a_0,\ldots,a_{n-1}$ — невід'ємні сталі, які виражаються через $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Інтегруючи частинами і враховуючи умови (33), легко переконатися, що для всіх $j = 0,1,\ldots,n$

$$\int_0^T u_k^{(2j)}(t)\overline{u}_k(t)dt = (-1)^j\int_0^T |u_k^{(j)}(t)|^2 dt.$$

Тому з рівності (34) одержуємо, що

$$\int_0^T |u_k^{(n)}(t)|^2 dt + \sum_{j=0}^{n-1} a_j (k^2+1)^{n-j} \times$$

$$\times \int_0^T |u_k^{(j)}(t)|^2 dt = 0. \qquad (35)$$

Оскільки $a_0 \geq 0, \ldots, a_{n-1} \geq 0$, а функція $u_k^{(n)}(t)$ — неперервна, то з (35) випливає, що $u_k^{(n)}(t) = 0$ в кожній точці $t \in [0,T]$. Отже, $u_k(t)$ — многочлен $(n-1)$-го степеня, який має нуль $(n-1)$-го порядку в точці $t=0$ та нуль $(n-1)$-го порядку в точці $t=T$. Тому $u_k(t) \equiv 0$, всупереч припущенню.

7. Перспектива наступних досліджень

Запровадимо наступні означення.

Означення 1. *Вектор* $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Pi_n$ *будемо називати* γ*-нормальним для задачі* (1), (2), *якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність* (6).

Означення 2. *Гладкий підмноговид* $M \subset \Pi_n$ *будемо називати* γ*-нормальним для задачі* (1), (2), *якщо майже всі (стосовно міри на* M*) його точки є* γ*-нормальними.*

У цій роботі встановлено, що n-вимірний многовид Π_n є γ-нормальним для задачі (1), (2), якщо $\gamma > \gamma_0$. Перспективним є вивчення питання про опис γ-нормальних підмноговидів в Π_n, розмірність яких є нижчою від n.

Робота частково підтримана Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 10.01/053).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения, 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.

2. *Бобик І.О., Пташник Б.Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн., 1994. – **46**, № 7.– С. 795–802.

3. *Бобик І.О.* Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів, 1994. – 130 с.

4. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

5. *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

6. *Пташник Б.И., Штабалюк П.И.* Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения, 1986. – **22**, № 4. – С. 669–678.

7. *Симотюк М.М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 1999.– **42**, № 4.– С. 90–95.

8. *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту, 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

9. *Симотюк М.М.* Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ, 2005. – Т. 2. – С. 199–212.

10. *Симотюк М.М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.–мат. наук. – Львів, 2005. – 193 с.

11. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.