УДК 517.929.8

©2007 р. **Я.Й.Бігун**

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ ПАРАМЕТРАМИ І ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Побудовано перше наближення розв'язку нелінійного диференціального рівняння з повільно змінними параметрами із лінійно перетвореним аргументом. Ефективність алгоритму проілюстрована на рівняннях типу Дуффінга із лінійно перетвореним аргументом.

In the present work for a nonlinear differential equation with slowly varying parameters and linearly transformed argument a construction of problem of an approximate solution to the first- order is constructed. Its efficiency is demonstrated by Duffing-type equations with linearly transformed argument as example.

Розвитку асимптотичного методу Крилова-Боголюбова [1] для рівнянь із повільно змінними параметрами присвячена монографія [2] та ін. Аналогічна задача для диференціально-різницевих рівнянь розглядалась в роботах [3 – 5] та ін. Зокрема, в [5] запропоновано алгоритм побудови асимптотичних наближень другого порядку в резонансному випадку для рівняння із повільно змінними частотами і запізненням.

У даній роботі розглядається рівняння із збуренням, що залежить від лінійно перетвореного аргументу. Такі рівняння активно вивчаються (див. [6, 7]) і служать математичними моделями процесів із післядією [8, 9]. На відміну від [5], в даній роботі рівняння для асимптотичних наближень залежать від аргументів із лінійно перетвореним аргументом, а в умові резонансу враховано вплив запізнення у фазовій змінній.

1. Постановка задачі. Розглядається диференціальне рівняння із запізненням вигляду

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2(\tau)x(t) =$$

$$= \varepsilon f(\tau, \theta, x(t), x(\lambda t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(\lambda t)}{dt}), \qquad (1)$$

де $t \geq 0$, $\lambda \in (0,1)$, ε – малий додатний параметр, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$,

$$f(\tau, \theta, x, z, u, v) = \sum_{|n| \leq N} e^{in\theta} f_n(\tau, x, z, u, v),$$

f_n – алгебраїчні многочлени по x, z, u, v;

$$\frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau), \qquad (2)$$

$\nu(\tau)$ – частота збурюючої сили.

Припустимо, що f_n, $\omega(\tau) > 0$ і $\nu(\tau) > 0$ – диференційовні функції за змінною τ.

У рівнянні (1) можуть спостерігатися резонансні явища, спричинені як дією зовнішньої періодичниої сили [1,4], так і впливом відхилення аргументу $(1-\lambda)t$ [10]. Умовою резонансу в точці τ є виконання рівності

$$\omega(\tau) \cong \frac{r}{q}\lambda\omega(\lambda\tau) + \frac{p}{q}\nu(\tau), \qquad (3)$$

де p, q, r – цілі, а p і q – взаємно прості числа.

Оскільки частоти $\omega(\tau)$, $\nu(\tau)$ в (2) і запізнення змінюються з часом, то для фіксованих p, r і q коливна система може неоднократно переходити із нерезонансного стану в резонансний або навпаки. Обгрунтування методу усереднення для багаточастотних систем із змінними частотами без запізнення дано в монографії [11], а для систем із лінійно перетвореним аргументом в [10, 12].

В роботі асимптотичним методом Крилова-Боголюбова побудовано перше наближення розв'язку рівняння (1) та проілюстровано одержаний результат на рівняннях типу Дуффінга із запізненням $(1-\lambda)t$.

2. Схема методу. Припустимо, що виконується умова резонансу (3) хоча б для одного $\tau \geq 0$ і деяких цілих p, q і r.

Наближений розв'язок (1) будується у вигляді формального ряду

$$x(t,\varepsilon) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) +$$
$$+\varepsilon^2 u_2(\tau, a, a_\lambda, a_{\lambda^2}, \psi, \psi_\lambda, \psi_{\lambda^2}, \theta, \theta_\lambda) + \varepsilon^3 \ldots, \tag{4}$$

де $a_{\lambda^2}(t) = a(\lambda^2 t)$, функції u_n 2π-періодичні за змінними ψ, θ, ψ_λ, $\ldots$ і не містять гармонік $\sin\psi$, $\cos\psi$ [1]. Функції a і ψ визначаються із системи рівнянь з лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, a_\lambda, \varphi) +$$
$$+\varepsilon^2 A_2(\tau, a, a_\lambda, a_{\lambda^2}, \varphi, \varphi_\lambda) + \varepsilon^3 \ldots, \tag{5}$$
$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, a_\lambda) +$$
$$+\varepsilon^2 B_2(\tau, a, a_\lambda, a_{\lambda^2}, \varphi, \varphi_\lambda) + \varepsilon^3 \ldots. \tag{6}$$

Тут
$$\varphi = \psi - \frac{r}{q}\psi_\lambda - \frac{p}{q}\theta \tag{7}$$

є різницею між фазою ψ власних коливань і фазою ψ_λ, спричиненою запізненням, та фазою θ зовнішнього збурення.

У першому наближенні потрібно знайти функції A_1, B_1 і u_1 так, щоб вираз

$$x_1(t,\varepsilon) = a\cos\psi + \varepsilon u_1(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) \tag{8}$$

задовольняв рівняння (1) з точністю до величин $O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Аналогічно, в другому наближенні будуються функції A_2, B_2, u_2, але при цьому збільшується число аргументів із запізненням для цих функцій.

3. Перше наближення. Введемо такі позначення:

$$D_1 = \omega\frac{\partial}{\partial\psi} + \lambda\omega_\lambda\frac{\partial}{\partial\psi_\lambda} + \nu\frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$\Delta_1 = A_1\cos\psi - aB_1\sin\psi + a\frac{d\omega}{d\tau}\sin\psi,$$

$$\Omega(\tau) = \omega(\tau) - \frac{r}{q}\lambda\omega(\lambda\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau),$$

$$f_0(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) = f(\tau, \theta, a\cos\psi, a_\lambda\cos\psi_\lambda,$$
$$-a\omega\sin\psi, -a_\lambda\omega_\lambda\sin\psi_\lambda).$$

Запишемо розклад Фур'є

$$f_0 = \sum_{k,l,m} f_{klm}^{(0)}(\tau, a, a_\lambda) e^{i(k\psi + l\psi_\lambda + m\theta)}, \tag{9}$$

де

$$f_{klm}^{(0)}(\tau, a, a_\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i(k\psi + l\psi_\lambda + m\theta)} \times$$
$$\times f_0(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta)\, d\psi\, d\psi_\lambda\, d\theta.$$

Із (5) – (8) з точністю до величин $O(\varepsilon^2)$ маємо

$$\frac{dx}{dt} = -a\omega\sin\psi + \varepsilon\Delta_1,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\cos\psi + \varepsilon\Bigg\{\left(\Omega\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - 2a\omega B_1\right) \times$$
$$\times\cos\psi - \left(a\Omega\frac{\partial B_1}{\partial\varphi} + 2\omega A_1 + a\frac{d\omega}{d\tau}\right)\sin\psi +$$
$$+D_1^2 u_1\Bigg\} + \varepsilon^2.$$

Підставивши другу похідну і вираз для $x_1(t,\varepsilon)$в рівняння (1) та прирівнявши коефіцієнти при ε^1, одержимо рівняння для знаходження u_1, A_1 і B_1:

$$(D_1^2 + \omega^2)u_1 = f_0(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) -$$
$$-\left(\Omega\frac{\partial A_1}{\partial\varphi} - 2a\omega B_1\right)\cos\psi +$$
$$+\left(a\Omega\frac{\partial B_1}{\partial\varphi} + 2\omega A_1 + a\frac{d\omega}{d\tau}\right)\sin\psi. \tag{10}$$

Оскільки u_1 не містить гармонік $\cos\varphi$, $\sin\psi$, то

$$u_1(\tau, a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) = \sum_{\substack{k,l,m \\ k\neq\pm1}} u_{klm}^1(\tau, a, a_\lambda) \times$$

$$\times e^{i(k\psi+l\psi_\lambda+m\theta)}. \qquad (11)$$

На підставі (7) маємо

$$(k\pm1)\psi+l\psi_\lambda+m\theta=(k\pm1)\varphi+((k\pm1)\frac{p}{q}+m)\theta+$$

$$+((k\pm1)\frac{r}{q}+l)psi_\lambda=s\varphi,$$

де s – деяке ціле число,

якщо виконуються рівності

$$(k\pm1)p+qm=0,(k\pm1)r+ql=0. \qquad (12)$$

Припустимо, що на проміжку $[0,L]$

$$(k\pm1)(r\lambda\omega(\lambda\tau)+p\nu(\tau))+$$

$$+(lq\lambda\omega(\lambda\tau)+qm\nu(\tau))\neq0, \qquad (13)$$

де p, q і r визначені згідно з (3), k, l, m – множини індексів в (9), крім тих, що задовольняють умови (12).

Отже, сумування в (11) здійснюється по тих k, l, m, для яких не виконуються умови (12). Позначимо таку суму через Σ'. Таким чином, функцію u_1 знайдемо як частинний розв'язок рівняння

$$(D_1^2+\omega^2)u_1=$$

$$=\sum{}' f^{(0)}_{klm}(\tau,a,a_\lambda)e^{i(k\psi+l\psi_\lambda+m\theta)}. \qquad (14)$$

Після підстановки (11) в (14) одержимо

$$u_1(\tau,a,a_\lambda,\psi,\psi_\lambda,\theta)=\sum{}'[\omega^2(\tau)-(k\omega(\tau)+$$

$$+\lambda l\omega(\lambda\tau)+m\nu(\tau))^2]^{-1}\times$$

$$\times f^{(0)}_{klm}(\tau,a,\omega_\lambda)e^{i(k\psi+l\psi_\lambda+m\theta)}. \qquad (15)$$

Знаменники в (15) відмінні від нуля на підставі умови (13).

При виконанні умов (12)

$$k\psi+l\psi_\lambda+m\theta=(k\frac{p}{q}+m)\theta+(k\frac{r}{q}+l)\psi_\lambda+$$

$$+k\varphi=\mp\frac{p}{q}\theta\mp\frac{r}{q}\psi_\lambda+k\varphi=\mp\psi+(k\pm1)\varphi.$$

Оскільки $k\pm1$ ділиться на q, то $k\pm1=q\sigma$, σ – ціле число. Тому

$$e^{i(k\psi+l\psi_\lambda+m\theta)}=(\cos\psi\mp i\sin\psi)e^{iq\sigma}.$$

Функції A_1 і B_1 визначаються із системи рівнянь

$$a\Omega\frac{\partial B_1}{\partial\varphi}+2\omega A_1+a\frac{d\omega}{d\tau}=G_1(\tau,a,a_\lambda,\varphi),$$

$$-\Omega\frac{\partial A_1}{\partial\varphi}+2a\omega B_1=H_1(\tau,a,a_\lambda,\varphi), \qquad (16)$$

де G_1 і H_1 – суми доданків у розкладі Фур'є функції f_0, для яких виконуються умови (12), відповідно при $\sin\psi$ і $\cos\psi$. Функції G_1 і H_1 набувають вигляду

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ H_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{4\pi^3}\sum_\sigma e^{i\sigma\varphi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau,a,$$

$$a_\lambda,\psi,\psi_\lambda,\theta)e^{i(q\psi-r\psi_\lambda-p\theta)}\begin{pmatrix}\sin\psi\\ \cos\psi\end{pmatrix}d\psi d\psi_\lambda d\theta.$$

Коефіцієнти Фур'є функцій A_1 і B_1 знаходяться із системи лінійних рівнянь після підстановки відповідних розкладів в (16). В підсумку одержимо:

$$A_1(\tau,a,a_\lambda,\varphi)=$$

$$=\omega(\tau)\sum_\sigma\frac{2C_{1,\sigma}-iH_{1,\sigma}}{4\omega^2(\tau)-\sigma^2\Omega^2(\tau)}e^{i\sigma q\varphi},$$

$$B_1(\tau,a,a_\lambda,\varphi)=$$

$$=\frac{2\omega(\tau)}{a}\sum_\sigma\frac{H_{1,\sigma}+i\sigma G_{1,\sigma}}{4\omega^2(\tau)-\sigma^2\Omega^2(\tau)}e^{i\sigma q\varphi},$$

де $G_{1,\sigma}$, $H_{1,\sigma}$ - коефіцієнти Фур'є функцій G_1 і H_1 відповідно.

4. Приклади. Проілюструємо побудову рівнянь першого наближення для рівнянь типу Дуффінга [5], але з лінійно перетвореним аргументом.

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=$$

$$\varepsilon[E\cos\theta-\alpha x^3(\lambda t)+2\beta\frac{dx(\lambda t)}{dt}].$$

Нехай $\omega=\nu$ і $\lambda=0,5$. Маємо резонанс $\omega=\nu$, крім того, $\Omega=0$ і

$$f_0=E\cos\theta-\frac{\alpha a_\lambda^3}{4}(\cos3\psi_\lambda+3\cos\psi_\lambda)-$$

$$-2\beta a_\lambda \omega \sin\psi_\lambda.$$

Умови (12) виконуються для $k = l = 0$, $m = 1$. Отже,

$$u_1(t,\varepsilon) = u^1_{010}(a_\lambda)\cos\psi_\lambda +$$

$$+u^1_{030}(a_\lambda)\cos 3\psi_\lambda + u^2_{010}(a_\lambda) sin\psi_\lambda.$$

Для A_1 і B_1 маємо рівняння

$$E\cos\psi\cos\varphi + E\sin\psi\sin\varphi + 2\omega A_1 \sin\psi +$$

$$+2a\omega B_1\cos\psi = 0.$$

Таким чином,

$$x_1(t,\varepsilon) = a\cos\psi -$$

$$-\frac{\varepsilon\alpha a_\lambda^3}{20\omega^2}(4\cos 3\psi_\lambda + 15\cos\psi_\lambda) +$$

$$+\frac{8\varepsilon\beta a_\lambda}{3\omega}\sin\psi_\lambda,$$

де a і ψ є розв'язками рівняння

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon E}{4a}\sin\varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon E}{4a\omega}\cos\varphi.$$

Приклад 2. Нехай $\omega = 2\nu$, $\lambda = 0.5$,

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) =$$

$$\varepsilon[Ex_\lambda\cos\theta - \alpha x^3 + +2\beta\frac{dx}{dt}].$$

Маємо

$$f_0(a, a_\lambda, \psi, \psi_\lambda, \theta) = \frac{Ea_\lambda}{2}(\cos(\psi_\lambda + \theta) +$$

$$\cos(\psi_\lambda + \theta)) - \frac{\alpha a^3}{4}(\cos 3\psi + 3\cos\psi) +$$

$$2\beta a\omega\sin\psi.$$

Резонанс $\omega = \lambda\omega_\lambda + \nu$ досягається при k=0, l=m=1. У першому наближенні

$$x_1(t,\varepsilon) = a\cos\psi + \frac{\varepsilon}{32\omega^2}(16\cos(\psi - \theta) +$$

$$\alpha a^3\cos 3\psi),$$

де a і ψ задовольняють рівняння

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon(\frac{a_\lambda E\sin\varphi}{4\omega} - a\beta),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{\varepsilon}{2a\omega}(3\alpha a^3 - a_\lambda\cos\varphi).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974. — 504 с.

2. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний.— М.: Наука, 1964.— 431 с.

3. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1969. — 287 с.

4. *Митропольский Ю.А.* Нелинейная механика. Асимптотические методы.— К.: Инс-т математики НАН Украины, 1995. — 396 с.

5. *Mitropolskyi Yu.A., Samoylenko V.Gh., Matarazzo G.* On asymptotic solution to delay differential equations with slowly varying coefficients // Nonlinear Analysis.— 2003, N 52.— P.971—988.

6. *Ронто А.М.* Початкова та періодичні задачі для функціонально-диференцальних рівнянь: Дис... д-ра фіз.-мат. наук.— Київ, 2006.— 378 с.

7. *Пелюх Г.П., Бельский Д.В.* Об асимптотических свойствах решений дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом. // Нелінійні коливання. – 2007. **10**, № 1. – С. 144 – 159.

8. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations.— Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 648 p.

9. *Гребенщиков Б.Г., Ложников А.Б.* Стабилизация системы, содержащей постоянное и линейное запаздывание// Дифференц. уравн.— 2004.— **40**, N 12.— С.1587—1595.

10. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравн. — 1999. — 35, № 1. – С. 8 — 14.

11. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

12. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. — Чернівці: Рута, 2005. — С. 5 — 10.