УДК 517.956.4

©2006 р. Т.М.Балабушенко, С.Д.Івасишен, В.П.Лавренчук, Л.М.Мельничук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ І ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Для одного класу параболічних рівнянь зі зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^n$ при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами та оператором Бесселя за змінною $y \in \mathbb{R}$ доведені теореми про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші та визначених у відкритому півшарі розв'язків зі спеціальних вагових L_p-просторів.

For a class of parabolic equations with growing coefficients on a variable $x \in \mathbb{R}^n$ as $|x| \to \infty$ and with Bessel operator with respect to variable $y \in \mathbb{R}$ theorems of representation as Poisson integrals of solutions of the Cauchy problem and of solutions, determined in an open half-sphere, from special weight L_p-spaces are proved.

Дана стаття є безпосереднім продовженням праць [1, 2]. У ній доводяться теореми про зображення у вигляді інтегралів Пуассона розв'язків задачі Коші та розв'язків, визначених у відкритому півшарі, для рівнянь, які розглядалися в [1, 2]. Результати, які тут наводяться, аналогічні результатам із [3] для параболічних систем з оператором Бесселя та обмеженими коефіцієнтами. У випадку $n = 1$ вони доведені в [4]. У статті використовуються позначення та означення з [2].

1. Розглянемо рівняння

$$(Lu)(t,X) \equiv \Big(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}\Big)u(t,X) - \\ - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,X)) - B_y u(t,X) = 0, \\ (t,X) \in \Pi, \qquad (1)$$

де $X \equiv (x,y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$; $a_{jl} \in \mathbb{R}$, причому матриця $A \equiv (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична й додатно визначена; B_y – оператор Бесселя порядку $\nu \geq 0$; $\Pi \equiv (0,T] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Нехай $G(t,X;\tau,\Xi)$, $t > \tau$, $\{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}$, $\Xi \equiv (\xi,\eta)$, – фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для рівняння (1), який знайдений в [1]. Для нього справджуються, зокрема, оцінки

$$|\partial_x^k \partial_y^l \partial_\xi^m \partial_\eta^r G(t,X;\tau,\Xi)| \leq C_{klmr}\beta(t-\tau)\times \\ \times(\alpha(t-\tau))^{-(|k|+|m|)/2}(t-\tau)^{-(l+r)/2}\times \\ \times E(t-\tau,X,\Xi)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t-\tau,X,\Xi), \quad t > \tau, \\ \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \{l,r\} \subset \mathbb{Z}_+, \qquad (2)$$

де використані позначення з [2].

ФРЗК G породжує інтеграли Пуассона відповідно функції φ та узагальненої міри μ за формулами

$$u(t,X) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi) \begin{cases} \varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), & (3) \\ d\mu(\Xi), & (4) \end{cases}$$

$$(t,X) \in \Pi.$$

Теорема 1. *Нехай $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \leq p \leq \infty$, і $\mu \in M^{k(0,a)}$. Тоді правильні такі твердження:*

1) розв'язок u рівняння (1), який задовольняє умови

$$\partial_y u(t,X)|_{y=0} = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$\exists C > 0 \ \forall t \in (0,T] : \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \leq C, \quad (6_p)$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t,a)} = 0, \qquad (7)$$

а при $p=\infty$

$$\forall \eta \in L_1^{-k(T,a)} : \lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X) u(t,X) d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X) d\lambda(X), \qquad (8)$$

зображується у вигляді (3);

2) для розв'язку u рівняння (1), для якого виконуються умова (5), нерівність (6_1) *і співвідношення*

$$\forall \eta \in C_0^{-k(T,a)} : \lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X) u(t,X) d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X) d\mu(X), \qquad (9)$$

правильне зображення (4).

Доведення. 1) Нехай u – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (5), (6_p), (7) або (8); $Q_R \equiv (0,T] \times C_R$, $C_R \equiv K_R \times (0,R]$, $K_R \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x| \le R\}$, $R > 0$; θ – функція з простору $C^\infty([0,\infty))$ така, що $\theta = 1$ на $[0,1/2]$, $\theta = 0$ на $[3/4,\infty)$ і $\theta' \le 0$; (t,X) – фіксована точка з $Q_{\overline{R}/4}$, де $\overline{R}$ – задане число.

Скористаємося такою формулою Гріна-Остроградського, наведеною в [1]:

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_{C_R} (vLu - uL^*v)(\tau,\Xi) d\lambda(\Xi) =$$

$$= \int\limits_{C_R} (vu)(\tau,\Xi) d\lambda(\Xi)\Big|_{\tau=t_0}^{t_1} -$$

$$-\sum_{j=1}^n \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_{S_R} \int\limits_0^R \Bigg(\sum_{l=1}^n a_{jl}(v\partial_{\xi_l}u - u\partial_{\xi_l}v) +$$

$$+\xi_j vu\Bigg)(\tau,\Xi)\eta^{2\nu+1}\mu_j dS_\xi d\eta - \int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_{K_R} \eta^{2\nu+1} \times$$

$$\times (v\partial_\eta u - u\partial_\eta v)(\tau,\Xi) d\xi\Big|_{\eta=0}^R, \qquad (10)$$

де $t_0 < t_1$, S_R – межа кулі K_R, $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ – орт зовнішньої нормалі до S_R, L – диференціальний вираз із (1), а

$$L^* \equiv -\partial_\tau - \sum_{j,l=1}^n a_{jl}\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} + \sum_{j=1}^n \xi_j \partial_{\xi_j} - B_\eta.$$

У формулі (10) покладемо замість t_0, t_1, $u(\tau,\Xi)$ і $v(\tau,\Xi)$ відповідно h, $t-\varepsilon$, $u(\tau,\Xi)$ і $\theta_R(\Xi)G^*(\tau,\Xi;t,X)$, де $\theta_R(\Xi) \equiv \theta(|\xi|/R)\theta(\eta/R)$, $R \ge \overline{R}$, $0 < h < t/2$, $0 < \varepsilon < t/2$, u – взятий нами розв'язок рівняння (1), а G^* – ФРЗК для спряженого рівняння $L^*v = 0$. Використавши властивість нормальності ФРЗК G [1] і властивості функції θ_R, одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;t-\varepsilon,\Xi)\theta_R(\Xi)u(t-\varepsilon,\Xi)d\lambda(\Xi) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;h,\Xi)\theta_R(\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) - \int\limits_h^{t-\varepsilon} d\tau \times$$

$$\times \int\limits_{C_{3R/4}\setminus C_{R/2}} L^*(\theta_R(\Xi)G^*(\tau,\Xi,t,X))u(\tau,\Xi)d\lambda(\Xi).$$

Після переходу в цій рівності до границі при $\varepsilon \to 0$ та використання властивостей ФРЗК прийдемо до рівності

$$u(t,X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;h,\Xi)\theta_R(\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) -$$

$$-\int\limits_h^t d\tau \int\limits_{C_{3R/4}\setminus C_{R/2}} L^*(\theta_R(\Xi)G^*(\tau,\Xi,t,X))u(\tau,\Xi)d\lambda(\Xi) \equiv$$

$$\equiv I_1^{(R)} - I_2^{(R)}. \qquad (11)$$

Перейдемо тепер в (11) до границі при $R \to \infty$. Доведемо, що при цьому $I_1^{(R)}$ прямує до

$$I_1 \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi).$$

За допомогою оцінки (2) та нерівності (47) з [2] маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{R/2}}\beta(t-h)(E(t-h,X,\Xi)\times$$

$$\times\Phi_1(h,\Xi))\hat{E}_{\hat{c}_1/2,\hat{c}_2/2}(t-h,X,\Xi)\exp\{-\hat{c}_1\times$$
$$\times|x-e^{-(t-h)}\xi|^2/(2\alpha(t-h))-\hat{c}_2\times$$
$$\times(y-\eta)^2/(2(t-h))\}(|u(h,\Xi)|\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi).\tag{12}$$

Використовуватимемо нерівності

$$E(t-h,X,\Xi)\Phi_1(h,\Xi)\le\Phi_1(t,X)\le A,$$
$$0<h<t\le T, X\in C_{\overline{R}/4},\Xi\in\mathbb{R}_+^{n+1};\tag{13}$$

$$|x-e^{-(t-h)}\xi|^2\ge e^{-2(t-h)}||\xi|-e^{t-h}|x||^2\ge e^{-2t}\times$$
$$\times(|\xi|-e^t|x|)^2\ge e^{-2t}\Big(\frac{R}{2}-e^T\frac{\overline{R}}{4}\Big)^2\ge e^{-2t}\frac{R^2}{16},$$
$$0<h<t\le T,x\in K_{\overline{R}/4},\xi\in\mathbb{R}^n\setminus K_{R/2};\tag{14}$$

$$(y-\eta)^2\ge(|\eta|-|y|)^2\ge\Big(\frac{R}{2}-\frac{\overline{R}}{4}\Big)^2\ge\frac{R^2}{16},$$
$$y\in[0,\overline{R}/4],\eta\in[R/2,\infty),\tag{15}$$

де $A>0$, R – досить велике число, $\overline{R}$ – фіксоване число, причому $0<\overline{R}<e^{-T}R$. Нерівність (13) випливає із нерівності (8) із [2].

З (12) – (15) одержуємо, що

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le CAK_{\hat{c}}(t,R)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t-h)\times$$

$$\times\hat{E}_{\hat{c}_1/2,\hat{c}_2/2}(t-h,X,\Xi)(|u(h,\Xi)|\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi),\tag{16}$$

де $K_{\hat{c}}(t,R)$ дорівнює $\exp\{-\hat{c}e^{-2t}R^2/(32\alpha(t))\}$ або $\exp\{-\hat{c}R^2/(32t)\}$, $\hat{c}\equiv\min(\hat{c}_1,\hat{c}_2)$.

Якщо $p=1$, то з (16) зразу випливає, що при фіксованому h

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le CA\beta(t-h)\|u(h,\cdot)\|_1^{k(h,a)}\times$$
$$\times K_{\hat{c}}(t,R)\to0,R\to\infty.$$

Якщо $1<p<\infty$, то за допомогою нерівності Гельдера та рівності (9) з [2] одержуємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le CAK_{\hat{c}}(t,R)(\beta(t-h))^{1/p}\times$$

$$\times\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t-h)\hat{E}_{p'\hat{c}_1/2,p'\hat{c}_2/2}(t-h,X,\Xi)\times$$

$$\times d\lambda(\Xi)\Big)^{1/p'}=CA(\beta(t-h))^{1/p}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)}\times$$
$$\times K_{\hat{c}}(t,R)\to0,\quad R\to\infty,$$

при фіксованому h. Для $p=\infty$ при фіксованому h маємо

$$|I_1-I_1^{(R)}|\le CA\|u(h,\cdot)\|_\infty^{k(h,a)}K_{\hat{c}}(t,R)\to0,$$
$$R\to\infty.$$

Тепер доведемо, що $I_2^{(R)}\to0$, $R\to\infty$. Для цього зауважимо, що

$$L^*(\theta_RG^*)=\theta_RL^*G^*-\sum_{j,l=1}^n a_{jl}(\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l}\theta_RG^*+$$

$$+2\partial_{\xi_j}\theta_R\partial_{\xi_l}G^*)+\sum_{j=1}^n\xi_j\partial_{\xi_j}\theta_RG^*-(B_\eta\theta_R)G^*-$$
$$-2\partial_\eta\theta_R\partial_\eta G^*.\tag{17}$$

Оскільки при $\tau<t$ $L^*G^*(\tau,\Xi;t,X)=0$, то перший доданок із (17) дорівнює нулеві, і на підставі властивостей функції θ_R весь вираз дорівнює нулю в $\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus(C_{3R/4}\setminus C_{R/2})$, причому $\partial_\eta\theta_R(\Xi)=0$ і $B_\eta\theta_R(\Xi)=0$ при $|\eta|<R/2$. Використовуючи те, що для $\Xi\in C_{3R/4}\setminus C_{R/2}$

$$|\partial_{\xi_j}\theta_R(\Xi)|\le C/R,\quad|\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l}\theta_R(\Xi)|\le C/R^2,$$
$$|\partial_\eta\theta_R(\Xi)|\le C/R,\quad|B_\eta\theta_R(\Xi)|\le C/R^2,$$

нормальність ФРЗК та оцінки (2), при $R\ge1$ одержуємо

$$|L^*(\theta_R(\Xi)G^*(\tau,\Xi;t,X))|\le C\beta(t-\tau)\times$$
$$\times((\alpha(t-\tau))^{-1/2}+(t-\tau)^{-1/2})E(t-\tau,X,\Xi)\times$$
$$\times\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t-\tau,X,\Xi).$$

За допомогою цієї оцінки так само, як і вище для $I_1-I_1^{(R)}$, встановлюємо, що

$$\Big|\int\limits_{C_{3R/4}\setminus C_{R/2}}L^*(\theta_R(\Xi)G^*(\tau,\Xi;t,X))u(\tau,\Xi)d\lambda(\Xi)\Big|\le$$

$$\le C\|u(\tau,\cdot)\|_p^{k(\tau,a)}K_{\hat{c}}(t-\tau,R)(\beta(t-\tau))^\lambda\times$$

$$\times((\alpha(t-\tau))^{-1/2}+(t-\tau)^{-1/2}),$$

де $\lambda=1/p$ при $1\le p<\infty$ і $\lambda=0$ при $p=\infty$. Звідси, використовуючи оцінку (6_p) і те, що для деякого $\delta>0$ справджуються нерівності $t\le\alpha(t)\le 2t$, $t\in(0,\delta)$, а також що $K_{\hat c}(t-\tau,R)(\beta(t-\tau))^\lambda\le CK_{\hat c/2}(t-\tau,R)$, $0\le\tau<t$, $R\ge 1$, одержуємо

$$|I_2^{(R)}|\le CK_{\hat c/2}(t,R)\to 0, R\to\infty.$$

Отже, після переходу в (11) до границі при $R\to\infty$ матимемо

$$u(t,X)=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi). \quad (18)$$

У рівності (18) перейдемо до границі при $h\to 0$, використовуючи при цьому нерівність

$$|\Delta_h^0 G|\equiv|G(t,X;h,\Xi)-G(t,X;0,\Xi)|\le$$
$$\le Ch(1+|x|)\beta(t)((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})E(t,X,\Xi)\times$$
$$\times\hat E_{\hat c_0,\hat c_2/2}(t,X,\Xi), \hat c_0\in(0,\hat c_1/2), \quad (19)$$

яка правильна для довільної фіксованої точки $(t,X)\in\Pi$, будь-якої точки $\Xi\in\mathbb{R}_+^{n+1}$ і досить малого $h>0$.

Доведемо нерівність (19). Маємо

$$|\Delta_h^0 G|=|h\partial_\tau G(t,X;\tau,\Xi)|_{\tau=\theta h}|, 0<\theta<1.$$

Використовуючи нормальність ФРЗК G і те, що G^* задовольняє рівняння $L^*v=0$ та умову $\partial_\eta G^*|_{\eta=0}=0$, за допомогою оцінок (2) одержуємо

$$|\partial_\tau G(t,X;\tau,\Xi)|=|\partial_\tau G^*(\tau,\Xi;t,X)|=$$
$$=|(L^*+\partial_\tau)G^*(\tau,\Xi;t,X)|\le$$
$$C(1+|\xi|)\beta(t-\tau)((\alpha(t-\tau))^{-1}+(t-\tau)^{-1})\times$$
$$\times E(t-\tau,X,\Xi)\hat E_{\hat c_1,\hat c_2/2}(t-\tau,X,\Xi),$$

звідки, якщо скористатися нерівностями

$$|\xi|\le e^{t-\tau}(|x-e^{-(t-\tau)}\xi|+|x|)\le$$
$$\le e^T(|x-e^{-(t-\tau)}\xi|+|x|),$$
$$|x-e^{-(t-\tau)}\xi|\hat E_{\hat c_1,\hat c_2/2}(t-\tau,X,\Xi)\le$$
$$\le C(\alpha(t-\tau))^{1/2}\hat E_{\hat c_1/2,\hat c_2/2}(t-\tau,X,\Xi),$$

випливає оцінка

$$|\partial_\tau G(t,X;\tau,\Xi)|\le C(1+|x|)\beta(t-\tau)((\alpha(t-\tau))^{-1}+$$
$$+(t-\tau)^{-1})E(t-\tau,X,\Xi)\hat E_{\hat c_1/2,\hat c_2/2}(t-\tau,X,\Xi).$$

Тоді

$$|\Delta_h^0 G|\le Ch(1+|x|)\beta(t)((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})\times$$
$$\times E(t-\theta h,X,\Xi)\hat E_{\hat c_1/2,\hat c_2/2}(t-\theta h,X,\Xi)\le$$
$$\le Ch(1+|x|)\beta(t)((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})\times$$
$$\times\exp\{-(c_1+\hat c_1/2)|x-e^{-(t-\theta h)}\xi|^2/\alpha(t)-$$
$$-c_2(y-\eta)^2/t\}T_y^\eta[\exp\{-(\hat c_2/2)y^2/t\}], \quad (20)$$

якщо вважати, що $0<h<t/2$, бо для таких h $t/2<t-\theta h<t$ і $\alpha(t)/2<\alpha(t-\theta h)<\alpha(t)$. Оскільки

$$|x-e^{-(t-\theta h)}\xi|^2=e^{2\theta h}|(x-e^{-t}\xi)-(1-e^{-\theta h})x|^2\ge$$
$$\ge|(x-e^{-t}\xi)-(1-e^{-\theta h})x|^2$$

та існують сталі $M>0$ і $\hat c_0\in(0,\hat c_1/2)$ такі, що для всіх $\{u,v\}\subset\mathbb{R}^n$, $|v|\le 1$,

$$\exp\{-(c_1+\hat c_1/2)|u-v|^2\}\le M\exp\{-(c_1+\hat c_0)|u|^2\},$$

то

$$\exp\{-(c_1+\hat c_1/2)|x-e^{-(t-\theta h)}\xi|^2/\alpha(t)\}\le$$
$$\le\exp\{-(c_1+\hat c_1/2)|(x-e^{-t}\xi)/\sqrt{\alpha(t)}-$$
$$-(1-e^{-\theta h})x/\sqrt{\alpha(t)}|^2\}\le M\exp\{-(c_1+\hat c_0)\times$$
$$\times|x-e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)\},$$

якщо h брати таким, щоб $(1-e^{-\theta h})|x|/\sqrt{\alpha(t)}\le 1$. Враховуючи це, із нерівності (20) випливає нерівність (19).

Використовуючи нерівності (2), (19) та аналогічну (8) із [2] нерівність

$$E(t,X,\Xi)\Phi_1(h,\Xi)\le\Phi_1(t+h,X), \quad (21)$$

маємо

$$|\Delta_h|\equiv\Big|\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi)-$$

$$-\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi)\Big| \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\Delta_h^0 G(t,X;h,\Xi)|\,|u(h,\Xi)|d\lambda(\Xi)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |G(t,X;0,\Xi)|\,|u(h,\Xi)-\varphi(\Xi)|d\lambda(\Xi) \le$$

$$\le Ch(1+|x|)\beta(t)((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}(E(t,X,\Xi)\times$$

$$\times\Phi_1(h,\Xi))\hat{E}_{\hat{c}_0,\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)(|u(h,\Xi)|\times$$

$$\times\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi)+C\beta(t)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}(E(t,X,\Xi)\times$$

$$\times\Phi_1(h,\Xi))\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)(|u(h,\Xi)-\varphi(\Xi)|\times$$

$$\times\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi) \le C\beta(t)(h(1+|x|)\times$$

$$\times((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})J_1^{(h)}+J_2^{(h)})\Phi_1(t+h,X), \quad (22)$$

де

$$J_1^{(h)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \hat{E}_{\hat{c}_0,\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)(|u(h,\Xi)|\times$$

$$\times\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi),$$

$$J_2^{(h)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)(|u(h,\Xi)-\varphi(\Xi)|\times$$

$$\times\Phi_{-1}(h,\Xi))d\lambda(\Xi).$$

Для $p=1$ маємо

$$J_1^{(h)} \le \|u(h,\cdot)\|_1^{k(h,a)},\, J_2^{(h)} \le \|u(h,\cdot)-\varphi\|_1^{k(h,a)}, \quad (23)$$

а для $1<p<\infty$ за допомогою нерівності Гельдера та рівності (9) із [2] одержуємо

$$J_1^{(h)} \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{p'\hat{c}_0,p'\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times(\beta(t))^{-1/p'}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)} \le$$

$$\le C(\beta(t))^{-1/p'}\|u(h,\cdot)\|_p^{k(h,a)},$$

$$J_2^{(h)} \le \Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{p'\hat{c}_1,p'\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Big)^{1/p'}\times$$

$$\times(\beta(t))^{-1/p'}\|u(h,\cdot)-\varphi\|_p^{k(h,a)} \le C(\beta(t))^{-1/p'}\times$$

$$\times\|u(h,\cdot)-\varphi\|_p^{k(h,a)}. \quad (24)$$

З (22) – (24) на підставі (6_p) і (7) для фіксованої точки $(t,X)\in\Pi$ і $1\le p<\infty$ випливає співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), \quad (25)$$

яке з урахуванням (18) приводить до формули (3) для заданого розв'язку. Співвідношення (25) є правильним і для $p=\infty$. Справді, розглянемо різницю

$$\Delta_h = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Delta_h^0 G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi)+$$

$$+\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi)-\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi)\Big) \equiv L_1^{(h)}+L_2^{(h)}. \quad (26)$$

Так само, як у (22), маємо

$$|L_1^{(h)}| \le C\beta(t)((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})h(1+|x|)\times$$

$$\times\Phi_1(t+h,X)J_1^{(h)}. \quad (27)$$

На підставі умови (6_∞) одержуємо

$$J_1^{(h)} \le C(\beta(t))^{-1}\|u(h,\cdot)\|_\infty^{k(h,a)} \le C(\beta(t))^{-1},$$

$$h>0.$$

Звідси та із (27) випливає співвідношення

$$\lim_{h\to 0} L_1^{(h)} = 0. \quad (28)$$

Оскільки при $0<t\le T_0<\min\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{c_1+k_1(T,a_1)}{k_1(T,a_1)}, \dfrac{c_2}{k_2(T,a_2)}\right)$, $T_0\le T$, функція

$$\eta(\Xi) \equiv G(t,X;0,\Xi), \quad \Xi\in\mathbb{R}_+^{n+1}, \quad (29)$$

внаслідок оцінки (2) та нерівності (21), в якій h замінено на T, задовольняє нерівність

$$|\eta(\Xi)|\,\Phi_1(T,\Xi) \le C\beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times \\ \times\Phi_1(T,X) \qquad (30)$$

й, отже, $\eta \in L_1^{-k(T,a)}$, то на підставі умови (8) при $0 < t \le T_0$ одержуємо, що $\lim\limits_{h\to 0} L_2^{(h)} = 0$. Звідси та із (26), (28) випливає співвідношення (25) для довільної точки $(t,X) \in (0,T_0] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$ і $p = \infty$, а тоді за допомогою (18) одержуємо формулу (3) для $(t,X) \in (0,T_0] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$.

Щоб переконатися у правильності цієї формули для будь-якої точки $(t,X) \in \Pi$, скористаємося формулами (18) при $h \le T_0$, (3) для $t = h$ і формулою згортки для ФРЗК G.

2) Якщо розв'язок рівняння (1) задовольняє умову (6_1), то, як встановлено при доведенні першої частини теореми, для нього правильна формула (18). Перейдемо в ній до границі при $h \to 0$. Для цього розглянемо різницю

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\times \\ \times d\mu(\Xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Delta_h^0 G(t,X;h,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) + \\ +\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)u(h,\Xi)d\lambda(\Xi) - \\ - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi)\Big) \equiv K_1^{(h)} + K_2^{(h)}. \quad (31)$$

Для $K_1^{(h)}$ справджується нерівність (27), а для $J_1^{(h)}$ – нерівність (23). Звідси на підставі умови (6_1) одержуємо, що

$$\lim_{h\to 0} K_1^{(h)} = 0. \qquad (32)$$

З нерівності (30) випливає, що при $0 < t \le T_0$ функція (29) належить до простору $C_0^{-k(T,a)}$. Тому згідно з умовою (9) правильне співвідношення $\lim\limits_{h\to 0} K_2^{(h)} = 0$, з якого та із (31), (32) і (18) випливає правильність формули (4) для $(t,X) \in (0,T_0] \times \mathbb{R}_+^{n+1}$. Ця формула правильна для будь-якої точки $(t,X) \in \Pi$. Це випливає із формул (18), (4) для $t \le T_0$ і формули згортки для ФРЗК G.

2. З теореми 1 випливає єдиність розв'язків задачі Коші, що завершує доведення теореми 1 із [2]. Наведемо теорему, в певному розумінні обернену до цієї теореми.

Теорема 2. *Нехай u – розв'язок рівняння (1) в Π, який задовольняє умову (5) та умову*

$$\exists C > 0 \;\; \exists p \in [1,\infty] \;\; \forall t \in (0,T]: \\ \|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C. \qquad (33)$$

Тоді при $1 < p \le \infty$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, а при $p = 1$ – єдина узагальнена міра $\mu \in M^{k(0,a)}$ такі, що розв'язок u зображується відповідно у вигляді (3) і (4).

Доведення. Нехай спочатку $1 < p \le \infty$. З умови (33) випливає, що послідовність

$$\{u(1/m,X)\Phi_{-1}(1/m,X), X \in \mathbb{R}_+^{n+1}, m \ge 1\}, \qquad (34)$$

обмежена в просторі $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$. Цей простір ізометричний простору, спряженому до $L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$. Згідно з теоремою про слабку компактність обмеженої множини в спряженому просторі послідовність (34) слабко компактна в $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$. Отже, існує її підпослідовність

$$\{u(1/m(r),X)\Phi_{-1}(1/m(r),X), X \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ r \ge 1\}, \qquad (35)$$

яка слабко збігається до деякої функції $\psi \in L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$, тобто для будь-якої функції $\eta \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)u(1/m(r),\Xi)\times \\ \times d\lambda(\Xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\psi(\Xi)d\lambda(\Xi). \qquad (36)$$

Покладемо $\varphi(\Xi) \equiv \psi(\Xi)\Phi_1(0,\Xi)$, $\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Тоді $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ і співвідношення (36) записується у вигляді

$$\forall \eta \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda) : \lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\times$$

$$\times\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\Phi_{-1}(0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi). \qquad (37)$$

Візьмемо фіксовану точку $(t,X) \in \Pi$ і розглянемо функцію

$$\eta(\Xi) \equiv G^*(0,\Xi;t,X)\Phi_1(0,\Xi), \Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}. \quad (38)$$

З оцінки

$$|\eta(\Xi)| \le C\beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\Phi_1(t,X),$$

$$\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \qquad (39)$$

яка одержується за допомогою властивості нормальності ФРЗК G, оцінки (2) та нерівності (8) з [2], випливає, що $\eta \in L_{p'}(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$. Тому на підставі властивості нормальності G та рівності (37) маємо

$$\lim_{r\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\Phi_1(0,\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) =$$

$$=\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi). \qquad (40)$$

Можна припускати, що $1/m(r) \le t/2$, $r \ge 1$. Згідно з формулою (18)

$$u(t,X) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;1/m(r),\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi). \qquad (41)$$

На підставі цієї рівності маємо

$$u(t,X) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \Delta^0_{1/m(r)}G(t,X;1/m(r),\Xi)u(1/m(r),\Xi)\times$$

$$\times d\lambda(\Xi) + \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)(1-\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\times$$

$$\times\Phi_1(0,\Xi))u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi)+$$

$$+\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\Phi_1(0,\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)\times$$

$$\times d\lambda(\Xi)\Big) \equiv \sum_{j=1}^{3} P_j^{(r)}, r \ge 1. \qquad (42)$$

Щоб одержати зображення (3), досить довести, що

$$\lim_{r\to\infty} P_j^{(r)} = 0, j \in \{1,2,3\}. \qquad (43)$$

Зі співвідношення (40) випливає (43) для $j = 3$.

Доведемо (43) для $j = 2$. За допомогою нерівності Гельдера та оцінки (33) маємо

$$|P_2^{(r)}| \le \|u(1/m(r),\cdot)\|_p^{k(1/m(r),a)}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_r(\Xi)\times$$

$$\times d\lambda(\Xi)\Big)^{1/p'} \le C\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_r(\Xi)d\lambda(\Xi)\Big)^{1/p'}, \quad (44)$$

де $F_r(\Xi) \equiv |G(t,X;0,\Xi)|^{p'}|\Phi_1(1/m(r),\Xi) - \Phi_1(0,\Xi)|^{p'}$, $\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, $r \ge 1$.

Вивчимо властивості функцій F_r, $r \ge 1$. З оцінки (2) та нерівності (8) із [2] випливають нерівності

$$(F_r(\Xi))^{1/p'} \le C\beta(t)E(t,X,\Xi)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times$$

$$\times(\Phi_1(1/m(r),\Xi) + \Phi_1(0,\Xi)) \le C\beta(t)\times$$

$$\times(\Phi_1(t+1/m(r),X)+\Phi_1(t,X))\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi),$$

$$\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, r \ge r_0,$$

де число r_0 взято досить великим. Оскільки

$$\Phi_1(t+1/m(r),X) \le \Phi_1(t+1/m(r_0),X), r \ge r_0,$$

то

$$(F_r(\Xi))^{1/p'} \le C\beta(t)(\Phi_1(t+1/m(r_0),X)+$$

$$+\Phi_1(t,X))\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi), \Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}, r \ge r_0,$$

звідки випливає існування у послідовності $\{F_r,\, r \ge r_0\}$ інтегровної мажоранти. А врахувавши те, що для кожного $\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ $\lim_{r\to\infty} F_r(\Xi) = 0$, на підставі теореми Лебега про мажорантну збіжність одержимо, що $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} F_r(\Xi)d\lambda(\Xi) = 0$. Звідси та із (44) випливає (43) для $j = 2$.

Доведемо, нарешті, співвідношення (43) для $j = 1$. Так само, як у (22) і (24), з урахуванням умови (33) маємо

$$|P_1^{(r)}| \le (C/m(r))(\beta(t))^{1-1/p'}((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})\times$$

$$\times(1+|x|)\Phi_1(t+1/m(r_0),X)\times$$

$$\times\|u(1/m(r),\cdot)\|_p^{k(1/m(r),a)} \le (C/m(r))(\beta(t))^{1/p}\times$$

$$\times((\alpha(t))^{-1}+t^{-1})(1+|x|)\Phi_1(t+1/m(r_0),X) \to 0,$$

$$r \to \infty.$$

Нехай тепер $p = 1$. З умови (33) випливає, що послідовність (34) обмежена в просторі $L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$. Цей простір не є спряженим до жодного іншого банахового простору, але він вкладається у простір M всіх скінченних узагальнених мір, визначених на σ-алгебрі $\mathcal{B}$ борельових множин півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$. Простір M ізометричний простору, спряженому до простору $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ неперервних у $\mathbb{R}_+^{n+1}$ функцій, які прямують до нуля на нескінченності. З обмеженості в $L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$ послідовності (34) випливає обмеженість відповідної послідовності узагальнених мір в M і, отже, слабка компактність останньої. Тому існують підпослідовність (35) та узагальнена міра $\nu \in M$ такі, що

$$\forall\eta \in C_0(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)d\nu(\Xi). \quad (45)$$

Для обмежених множин $A \in \mathcal{B}$ покладемо

$$\mu(A) \equiv \int_A \Phi_1(0,X)d\nu(X)$$

і тоді

$$\int_A \Phi_{-1}(0,X)d\mu(X) = \nu(A).$$

Якщо A – необмежена множина із $\mathcal{B}$, то розглянемо монотонно неспадну послідовність обмежених множин $A_k \in \mathcal{B}$, $k \ge 1$, таку, що $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A$, і покладемо

$$\int_A \Phi_{-1}(0,X)d\mu(X) \equiv \lim_{k\to\infty} \int_{A_k} \Phi_{-1}(0,X)d\mu(X) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \nu(A_k) = \nu(A).$$

Так визначена функція μ належить до простору $M^{k(0,a)}$ і рівність (45) записується у вигляді

$$\forall\eta \in C_0(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(\Xi)\Phi_{-1}(0,\Xi)d\mu(\Xi). \quad (46)$$

З оцінки (39) випливає, що функція (38) належить до простору $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ для довільно фіксованої точки $(t,X) \in \Pi$. Тому на підставі (46) одержуємо, що

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\Phi_1(0,\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi). \quad (47)$$

Дальші міркування такі самі, як у випадку $p > 1$: за допомогою (41) записується рівність

$$u(t,X) - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi) =$$

$$= P_1^{(r)} + P_2^{(r)} + \tilde{P}_3^{(r)}, \quad r \geq 1, \qquad (48)$$

де $P_j^{(r)}$, $j \in \{1,2\}$ ті самі, що й в (42), а

$$\tilde{P}_3^{(r)} \equiv \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\Phi_{-1}(1/m(r),\Xi)\Phi_1(0,\Xi)\times$$

$$\times u(1/m(r),\Xi)d\lambda(\Xi) - \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi);$$

потім доводиться співвідношення (43) для $j \in \{1,2\}$. Оскільки згідно з (47) $\lim_{r\to\infty} \tilde{P}_3^{(r)} = 0$, то із (48) випливає зображення (4).

Отже, доведено існування функції $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$ при $1 < p \leq \infty$ та узагальненої міри $\mu \in M^{k(0,a)}$ при $p = 1$ таких, що заданий розв'язок рівняння (1), який задовольняє умови (5) і (33), є інтегралом Пуассона відповідно функції φ та узагальненої міри μ. Єдиність функції φ та узагальненої міри μ безпосередньо випливає з теореми 1 статті [2].

Наслідок. З теореми 2 та теореми 1 із [2] випливає, що простори $L_p^{k(0,a)}$, $1 < p \leq \infty$, і $M^{k(0,a)}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1), які задовольняють умову (5), тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (33) відповідно з $1 < p \leq \infty$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною та достатньою для зображуваності розв'язків у вигляді (3) або (4).

3. Теореми, аналогічні вищедоведеним теоремам для рівняння (1), правильні також для рівняння (2) із [2], тобто рівняння

$$\partial_t v(t,X) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\partial_{x_j}^2 + 2b_j(x_j)\partial_{x_j} + (\frac{1}{2} - \frac{x_j^2}{4} +$$

$$+ b_j^2(x_j) + b_j'(x_j))\Big)v(t,X) + B_y v(t,X),$$

$$(t,X) \in \Pi, \qquad (49)$$

в якому b_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – неперервно диференційовні функції в $\mathbb{R}$, b_j' – їхні похідні.

ФРЗК Z для рівняння (49) визначається формулою (4) із [2], а відповідні інтеграли Пуассона – формулами

$$v(t,X) = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times \begin{cases} \varphi(\Xi)d\lambda(\Xi) & (50) \\ d\mu(\Xi), & (51) \end{cases} \quad (t,X) \in \Pi.$$

Для рівняння (49) наведемо тільки теорему, аналогічну теоремі 2.

Теорема 3. *Якщо v – розв'язок рівняння (49), який задовольняє умову (5) та умову*

$$\exists C > 0 \ \exists p \in [1,\infty] \ \forall t \in (0,T]:$$

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{k(t,a),P} \leq C,$$

то при $1 < p \leq \infty$ існує єдина функція $\varphi \in L_p^{k(0,a),P}$, а при $p = 1$ – єдина узагальнена міра $\mu \in M^{k(0,a),P}$ такі, що розв'язок v зображується відповідно у вигляді (50) і (51).

З цієї теореми та з теореми 2 із [2] випливають для просторів $L_p^{k(0,a),P}$ і $M^{k(0,a),P}$ твердження, аналогічні наведеним у наслідку з п. 2.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.288. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С.5 – 11.

2. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314 – 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С.7 – 16.

3. *Івасишен С.Д., Лавренчук В.П.* Об интегральном представлении решений параболической системы линейных уравнений с оператором Бесселя // Нелинейн. граничн. задачи. – 1992. – Вип. 4. – С. 19 – 25.

4. *Ивасишин Л.М.* Интегральное представление и множества начальных значений решений параболических уравнений с оператором Бесселя и растущими коэффициентами. – Черновцы, 1992. – 62 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92, № 1731 - Ук92.