УДК 517.925

©2006 р. Н.В. Шарай, Г.Є.Самкова

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НАПІВ'ЯВНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для задач Коші, лінеалізована частина яких містить змінний сингулярний жмуток матриць, одержані достатні умови існування аналітичних розв'язків в області з особливою точкою на межі та одержана їх оцінка.

The sufficient conditions of the analytical solutions existence are found in the domain with the special point on the border and their estimation is obtained for Cauchy problems, the linearized part of their systems contains the variable singular matrix pencil.

1. Постановка задачі и формулювання основних результатів.

Розглянемо сингулярну задачу Коші

$$\begin{cases} A(z)W' = B(z)W + F(z,W), & (1.1) \\ W(z) \longrightarrow 0, z \longrightarrow 0, & (1.2) \end{cases}$$

де однозначні матриці $A, B : D \longrightarrow G_1 \times G_2$ розміру $m \times n$ аналітичні в області $D \subseteq \subseteq C, 0 \in D$ або $0 \in \partial D, G_1 \times G_2 \subseteq \subseteq C^{m\times n}, (0,0) \in G_1 \times G_2$ або $(0,0) \in \in \partial(G_1 \times G_2)$, однозначна вектор-функція $F : D \times G_2 \longrightarrow G_1$ аналітична в $D \times G_2$. Припустимо, що $m \neq n$, тобто жмуток матриць $A(z)\lambda + B(z)$ є сингулярним.

Метою цієї роботи є дослідження питань про існування аналітичних розв'язків задачі Коші (1.1)-(1.2), коли z змінюється в деякій області, у якій точка $z = 0$ знаходиться або на межі, або всередині області, які задовольняють умову $W' \longrightarrow 0$, якщо $z \longrightarrow 0$.

В роботі [8] приведена лема про ранг, у відповідністю з якою, якщо матриця $A(z)$ аналітична в однозв'язній області $D \subset C$, $0 \in D, A : D \longrightarrow C^{m\times n}$ і $rangA(0) = k$, $0 < k \leq \min(m,n)$, то існує або область $D_{10} = \{z : 0 < |z| < R_1\}$, або $D_1 = \{z : |z| < < R_1\}$ з D, така, що ранг матриці $A(z)$ залишається сталим або при $z \in D_{10}$, або при $z \in D_1$ і дорівнює k_1, де $k \leq k_1 \leq \min(m,n)$.

У роботі [7] розглянуто випадок $m > n$, $rangA(z) = \min(m,n)$ при $z \in D_1 = \{z : |z| < R_1\}$ при деяких додатніх умовах на матриці $A(z)$,$B(z)$ та вектор $F(z,W)$.В данній роботі продовжуються дослідження роботи [7].

Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що матриці $A(z)$,$B(z)$ та вектор $F(z,W)$ подані у вигляді:

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_1(z) \\ A_2(z) \end{pmatrix}; B(z) = \begin{pmatrix} B_1(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix};$$

$$F(z,W) = \begin{pmatrix} F_1(z,W) \\ F_2(z,W) \end{pmatrix}, \qquad (1.3)$$

де $A_1 : D \longrightarrow C^{n\times n}, detA_1(z) \neq 0$ при $z \in D_1; B_1 : D \longrightarrow C^{n\times n}, F_1 : D \times G_2 \longrightarrow C^n$.

Система (1.1) після домноження на A_1^{-1} приймає вигляд:

$$\begin{cases} W' = A_1^{-1}(z)B_1(z)W + A_1^{-1}(z)F_1(z,W), & (1.4) \\ A_2(z)W' = B_2(z)W + F_2(z,W). & (1.5) \end{cases}$$

Систему (1.4)-(1.5) розглянемо у випадку, коли матриця $B_1(z)$ аналітична в області D_{10} і в точці $z = 0$ має полюс q-того порядку, $q \in N, q \geq 2$, причому вектор-функція $F(z,W)$ аналітична в області $D_{10} \times G_{20}$, $G_{20} = G_2 \backslash \{0\}$, і в точці $(z,W) = (0,0)$ має ізольовану особливу точку. У відповідності з цим матрицю $B_1(z)$ подамо у вигляді:

$$B_1(z) = z^{-q}\overline{B_1}(z), \qquad (1.6)$$

де матриця $\overline{B_1}(z)$ аналітична в області $D_{11} \subseteq D_1, 0 \in D_{11}$. Система (1.4)-(1.5) може бути переписана у вигляді:

$$\begin{cases} z^q W' = P(z)W + z^q f(z, W), & (1.7) \\ \\ A_2(z)W' = B_2(z)W + F_2(z, W). & (1.8) \end{cases}$$

де $P(z) = (p_{ij}(z))_{i,j=1}^n = A_1^{-1}(z)\overline{B_1}(z)$; $f(z, W) = (f_i(z, W))_{i=1}^n = A_1^{-1}(z)F_1(z, W)$.

Введемо деякі поняття.

Нехай на множині

$$A = \{(t, \nu) : t \in (0, t_1], \nu \in [\nu_1, \nu_2], \nu_1 < \nu_2\}$$

визначені невід'ємні функції $p(t, \nu)$ та $g(t, \nu)$.

Означення 1.1. *Скажемо, що функція $p(t, \nu)$ має властивість Q відносно функції $g(t, \nu)$ на множині A,якщо для кожного $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ функція $p(t, \nu)$ є функцією більш високого порядку малості порівняно з $g(t, \nu)$ при $t \longrightarrow +0$.*

Означення 1.2. *Скажемо, що функція $p(t, \nu)$ має властивість $Q_1(t_0)$ відносно функції $g(t, \nu)$ на множині A,якщо для кожного $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ існують сталі $c_1, c_2 > 0$, що $c_1|g(t, \nu)| \leq |p(t, \nu)| \leq c_2|g(t, \nu)|$ при $t \in (0, t_0], t_0 \in (0, t_1]$.*

Означення 1.3. *Нехай вектор-функція $\varphi(z) = col(\varphi_1(z), ..., \varphi_n(z)), \varphi : D \longrightarrow C^n$, аналітична в D і подана у вигляді:*

$$\varphi_i(z(t, \nu)) = \psi_i(t, \nu)e^{i\eta_i(t,\nu)}, i \in \overline{1, n},$$

де $z(t, \nu) = te^{i\nu}, t \in (0, t_1], \nu \in (0, 2\pi]$,причому в D $\psi_i(t, \nu) > 0, (\psi_i(t, \nu))'_t > 0$, $(\psi_i(t, \nu))'_\nu > 0, \psi_i(+0, \nu) = 0$.

Скажемо, що система (1.7) має властивість A_2 відносно $\varphi(z(t, \nu))$,якщо виконуються наступні умови:

1)$|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j(t, \nu) = O(t^p(\psi_j(t, \nu))'_t$, $(j = \overline{1, n})$ при $t \longrightarrow +0$ рівномірно відносно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$; (1.9)

2)$|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j(t, \nu)$ $(j = \overline{1, n})$ має властивість $Q_1(t_0)$ відносно $t^{p-1}(\psi_j(t, \nu))'_\nu$ на множині A; (1.10)

3а)$|p_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k(t, \nu) = O(|p_{jj}(z(t, \nu))| \cdot \psi_j(t, \nu)_t$, $(j, k = \overline{1, n}, j \neq k)$ при $t \longrightarrow +0$ рівномірно відносно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

3б)функції $|p_{jk}(z(t, \nu))|\psi_k(t, \nu)$ $(j, k = \overline{1, n}, j \neq k)$ мають властивість Q відносно $|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j(t, \nu)$ на множині A.

При фіксованному $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$ покладемо

$$F(z(t, \nu), W(z(t, \nu))) = F_{1\nu}(t, W_1(t), W_2(t)) +$$

$$+ iF_{2\nu}(t, W_1(t), W_2(t)),$$

де $W(z(t, \nu)) = W_1(t) + iW_2(t)$. При фіксованному $t \in (0, t_1]$:

$$F(z(t, \nu), W(z(t, \nu))) = F_{1t}(\nu, W_1(\nu), W_2(\nu)) +$$

$$+ iF_{2t}(\nu, W_1(\nu), W_2(\nu)),$$

де $W(z(t, \nu)) = W_1(\nu) + iW_2(\nu)$.

Розглянемо множину $\Omega(t, W, \tau)$:

$$\Omega(t, W, \tau) = \{(t, W) : W_{1j}^2(t) + W_{2j}^2(t) <$$

$$< \tau_j^2|\varphi_j(z(t, \nu))|^2, \tau_j > 0, j = \overline{1, n}, t \in (0, t_1)\}.$$

Означення 1.4. *Скажемо, що система (1.7) має властивість P_2 відносно функції $F(z, W), F_j = F_{1j} + iF_{2j}, j = \overline{1, n}$, якщо виконуються наступні умови:*

1) для кожного фіксованного $W(z(t, \nu))$ з множини $\Omega(t, W, \tau)$

$$t^q F_{kj\nu}(t, W_1(t), W_2(t)) = o(|p_{jj}(z(t, \nu))||\varphi_j(z(t, \nu))|,$$

$j = \overline{1, n}, k = 1, 2, t \longrightarrow +0$ рівномірно відносно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$;

2) для кожного фіксованного $W(z(t, \nu))$ з множини $\Omega(\nu, W, \sigma)$ функція $t^q F_{kjt}(t, W_1(\nu), W_2(\nu))$ має властивість Q відносно $|p_{jj}(z(t, \nu))||\varphi_j(z(t, \nu))|, j = \overline{1, n}$, $k = 1, 2$ на множині A.

У випадку, коли система (1.7) має властивість A_2, відносно $\varphi(z(t, \nu))$ виконані умови (1.9) і (1.10). Перепишемо (1.9) і (1.10) в наступному вигляді:

$$\lim_{t \longrightarrow +0} \frac{t^{q-1}\psi_{j\rho}(t, \nu)}{|p_{jj}(z(t, \nu))|\psi_j(t, \nu)} = B_j^\rho$$

рівномірно відносно $\nu \in [\nu_1, \nu_2]$,де $\rho = t$ $(l = 0)$ або $\rho = \nu (l = 1)$ і сталі $B_j^\rho \neq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Введемо множину $\Phi_{2j.klp}(t_1) =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (t,\nu): \cos((q-1)\nu - \alpha_{jj\nu}(t)) < \\ < B_j^t, |B_j^t| < 1, j = \overline{1,p_1}, \cos((q-1)\nu - \\ -\alpha_{jj\nu}(t)) > B_j^t, |B_j^t| < 1, j = \overline{p_1+1,p_2}, \\ |B_j^t| > 1, j = \overline{p_2+1,n}, \sin((q-1)\nu - \\ -\alpha_{iit}(\nu)) < B_i^\nu, |B_i^\nu| < 1, i = \overline{1,l_1}, \\ \sin((q-1)\nu - \alpha_{iit}(\nu)) > B_i^\nu, |B_i^\nu| < 1, \\ i = \overline{l_1+1,l_2}, |B_i^\nu| > 1, i = \overline{l_2+1,n}, \\ t \in (0,t_1], \nu \in [\nu_1,\nu_2] \end{array} \right\}$$

де $t \in (0,t_1], \nu \in (0,2\pi]$ і символами $\alpha_{ik\nu}(t)$ та $\alpha_{ikt}(\nu)$ позначимо функції, косинуси і синуси яких відповідно дорівнюють:

$$\cos\alpha_{ik\nu}(t) = \frac{Rep_{ik\nu}(t)}{\sqrt{(Rep_{ik\nu}(t))^2 + (Imp_{ik\nu}(t))^2}};$$

$$\sin\alpha_{ik\nu}(t) = \frac{Imp_{ik\nu}(t)}{\sqrt{(Rep_{ik\nu}(t))^2 + (Imp_{ik\nu}(t))^2}};$$
$$i,k \in \overline{1,...,n}, \tag{1.11}$$

де $p_{ik\nu}(t) = p_{ik}(z(t,\nu)) = Rep_{ik}(t) + iImp_{ik}(t)$ при фіксованому $\nu \in (0,2\pi]$;

$$\cos\alpha_{ikt}(\nu) = \frac{Rep_{ikt}(\nu)}{\sqrt{(Rep_{ikt}(\nu))^2 + (Imp_{ikt}(\nu))^2}};$$

$$\sin\alpha_{ikt}(\nu) = \frac{Imp_{ikt}(\nu)}{\sqrt{(Rep_{ikt}(\nu))^2 + (Imp_{ikt}(\nu))^2}};$$
$$i,k \in \overline{1,...,n}, \tag{1.12}$$

де $p_{ikt}(\nu) = p_{ik}(z(t,\nu)) = Rep_{ik}(\nu) + iImp_{ik}(\nu)$ при фіксованому $t \in (0,t_1]$, $j,k,l \in \{1,2,3\}$, $p \in \{+,-\}$.

Означення 1.5. *У випадку, якщо виконується одна з трьох умов:*

$1) p_i = 0, i = 1,2; B_j^t < 0, j = \overline{1,n};$

$2) p_1 = n;$

$3) p_1 = 0, 1 \le p_2 < n, B_j^t < 0, j = \overline{p_2+1,n};$

скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких відповідно виконується одна з умов $\Phi_{21.1lp}(t_1)$, $\Phi_{21.2lp}(t_1)$, $\Phi_{21.3lp}(t_1)$*;*

якщо при цьому для цих множин виконується одна з трьох наступних умов:

$1) l_i = 0, i = 1,2; B_j^\nu < 0, j = \overline{1,n}; (l_i = 0,$

$B_j^\nu > 0), j = \overline{1,n};$

$2) l_1 = n (l_1 = 0, l_2 = n);$

$3) l_2 = 0, 1 \le l_1 < n, B_j^\nu < 0, j = \overline{l_1+1,n}$

$(l_1 = 0, 1 \le l_2 < n, B_j^\nu > 0, j = \overline{l_2+1,n});$

скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких відповідно виконується одна з умов $\Phi_{21.l1+}(t_1) (\Phi_{21.l1-}(t_1))$, $\Phi_{21.l2+}(t_1) (\Phi_{21.l2-}(t_1))$; $\Phi_{21.l3+}(t_1)$ $(\Phi_{21.l3-}(t_1))$.

Означення 1.6. *У випадку, якщо виконується одна з трьох умов:*

$1) p_i = 0, i = 1,2; B_j^t > 0, j = \overline{1,n};$

$2) p_1 = 0, p_2 = n;$

$3) p_2 = 0, 1 \le p_1 < n, B_j^t > 0, j = \overline{p_1+1,n};$

скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких відповідно виконується одна з умов $\Phi_{22.1lp}(t_1)$, $\Phi_{22.2lp}(t_1)$, $\Phi_{22.3lp}(t_1)$*;*

якщо при цьому для цих множин виконується одна з трьох наступних умов:

$1) l_i = 0, i = 1,2; B_j^\nu < 0, j = \overline{1,n}; (l_i = 0,$

$B_j^\nu > 0), j = \overline{1,n};$

$2) l_1 = n (l_1 = 0, l_2 = n);$

$3) l_2 = 0, 1 \le l_1 < n, B_j^\nu < 0, j = \overline{l_1+1,n}$

$(l_1 = 0, 1 \le l_2 < n, B_j^\nu > 0, j = \overline{l_2+1,n});$

скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких *відповідно виконується одна з умов* $\Phi_{22.l1+}(t_1)$ *(*$\Phi_{22.l1-}(t_1)$*)*, $\Phi_{22.l2+}(t_1)$ *(*$\Phi_{22.l2-}(t_1)$*)*; $\Phi_{22.l3+}(t_1)$ *(*$\Phi_{22.l3-}(t_1)$*)*.

Означення 1.7. *У випадку, якщо* $1 \leq p_1 < p_2 < p_3 \leq n, B_j^t < 0$, *при* $j = \overline{p_2+1, p_3}$ *і* $B_j^t > 0, j = \overline{p_3+1, n}$

скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких відповідно виконується умова $\Phi_{23.1lp}(t_1)$*; якщо при цьому для цих множин виконується одна з трьох наступних умов:*

$$1) l_i = 0, i = 1,2; B_j^\nu < 0, j = \overline{1,n}; (l_i = 0,$$

$$B_j^\nu > 0), j = \overline{1,n};$$

$$2) l_1 = n (l_1 = 0, l_2 = n);$$

$$3) l_2 = 0, 1 \leq l_1 < n, B_j^\nu < 0, j = \overline{l_1+1, n}$$

$$(l_1 = 0, 1 \leq l_2 < n, B_j^\nu > 0, j = \overline{l_2+1, n});$$

то скажемо, що означені множини точок комплексної площини, для яких відповідно виконується одна з умов $\Phi_{23.l1+}(t_1)(\Phi_{23.l1-}(t_1))$, $\Phi_{23.l2+}(t_1)(\Phi_{23.l2-}(t_1))$; $\Phi_{23.l3+}(t_1)$ $(\Phi_{23.l3-}(t_1))$, $l \in \{1,2,3\}$.

Означення 1.8. *Скажемо, що система (1.7) належить класу* $K_{2r}, r = 1,2,3$, *якщо матриця* $P(z) = P(te^{i\nu})$ *така, що* $(t,\nu) \in \Phi_{2j.rlk}(t)$, $j,r,l \in \{1,2,3\}$, $k \in \{+,-\}$.

Теорема 1.j.(j=1,2,3) *Нехай для системи (1.1) виконуються наступні умови:*

1) однозначна матриця $A : D \longrightarrow C^{m\times n}, m > n$, *аналітична в області* D*;*

2)існує область $D_1 \subseteq D$, *така, що* $rang A(z) = n$ *при* $z \in D_1$*;*

3)матриці $A(z), B(z)$ *та вектор-функція* $f(z,Y)$ *подані у вигляді (1.3), причому, матриця* $B_1(z)$ *аналітична в області* D_{10}, *в точці* $z = 0$ *має полюс q-го порядку* $(q \geq 2)$ *і подана у вигляді (1.6); а вектор-функція* $f_1(z,W)$ *аналітична в* $D_{10} \times G_{20}$ *і в точці (0,0) має ізольовану особливу точку;*

4)система (1.7)-(1.8) задовольняє умови:
а)система (1.7) має властивість A_2 *відносно функцій* $\varphi(z(t,\nu))$ *при* $t \in (0,t_1]$ *рівномірно відносно* $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$*;*

б)система (1.7) належить класу K_{2j}*;*

в)система (1.7) має властивість P_2 *відносно вектор-функцій* $F(z,Y)$, $F_j = F_{1j} + iF_{2j}, j = \overline{1,n}$, *при* $t \in (0,t_1]$, $\nu \in [\nu_1,\nu_2]$*;*

г)$B_2(z)$ *і* $F_2(z,W)$ *такі, що вздовж розв'язків системи (1.7) виконується умова сумісності (1.8) в області* $D_2 \subseteq D_1$, $D_2 \cap G_{2j.rlk}(\rho) \neq \varnothing$, $j,r,l \in \{1,2,3\}$, $k \in \{+,-\}$, $0 \in D_2$.

Тоді: при $j = 1$

знайдеться таке $\rho > 0, \rho \in (0,t_1]$, *для якого кожний розв'язок системи (1.1)* $W(z) = col(W_1,...,W_n(z))$ *з початковими даними* (z_0, W_0) *такими, що*

$$z_0 \in G_{21.rlk}(\rho), r,l \in \{1,2,3\}, k \in \{+,-\},$$

$$W_0 \in \{W : |W_{kj}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1,n},$$

$$k = 1,2\}, W_j(z) = W_{1j}(z) + iW_{2j}(z), \quad (1.13)$$

де $0 < \delta_i, i = \overline{1,n}$ *сталі; є аналітичним в області* $G_{21.rlk}(\rho) \cap D_2$ *і задовольняє умову*

$$|W_i(z)|^2 < \delta_i^2|\varphi_i(z)|^2, i = \overline{1,n}; \quad (1.14)$$

при $j = 2,3$

знайдеться таке $\rho > 0, \rho \in (0,t_1]$, *що задача Коші (1.1)-(1.2) з початковими даними* (z_0, W_0)*:*

$$z_0 \in G_{2j.rlk}(\rho), r,l \in \{1,2,3\}, k \in \{+,-\},$$

$$W_0 \in \{W : |W_{kj}(z_0)| < \delta_j|\varphi_j(z_0)|, j = \overline{1,n},$$

$$k = 1,2\}, W_j(z) = W_{1j}(z) + iW_{2j}(z), \quad (1.15)$$

при $z \in G_{2j.rlk}(\rho) \cap D_2$, $r,l \in \{1,2,3\}$, $k \in \{+,-\}$, *має хоча б один аналітичний розв'язок, який задовольняє (1.14).*

2. Доведення основних результатів.

Доведення теореми 1.1 проводимо аналогічно доведенню теореми 2.1 у роботі [7].

Доведення теореми 1.2. Доведення проведемо в три етапи у відповідності з методом аналітичних продовжень розв'язків.

1 етап. Нехай z змінюється вздовж довільного фіксованного променя з сім'ї

$$L_\nu : z = z(t,\nu) = te^{i\nu}, t \in (0,t_1],$$

$\nu \in (0, 2\pi]$фіксовано.

При $z \in L_\nu$ покладемо $W(z(t,\nu)) = W_1(t)+$ $+iW_2(t)$, $P(z(t,\nu)) = P_1(t) + iP_2(t)$, $f(z(t,\nu), W_1(t), W_2(t)) = f_1(t, W_1, W_2)+$ $+if_2(t, W_1, W_2)$.

Відносно дійсної вектор-функції $W(t) = col(W_1(t), W_2(t)), W_i(t) =$ $= (W_{i1}, W_{i2}, ..., W_{in}), i = 1, 2$, вздовж променя одержуємо систему

$$t^q(W_1'(t) + iW_2'(t)) = (P_1(t) + iP_2(t))(W_1(t)+$$
$$+iW_2(t))e^{i(1-q)\nu} + t^q e^{i\nu}(f_1(t, W_1, W_2)+$$
$$+if_2(t, W_1, W_2)) \tag{2.1}$$

Порівнюючи дійсні і уявні частини, одержуємо дійсну систему вигляду:

$$t^q W'(t) = \widetilde{P}(t)Q_1(\nu)W(t) + t^q Q_2(\nu)F(t, W) \tag{2.2}$$

де

$$\widetilde{P}(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) - P_2(t) & \\ P_2(t) & P_1(t) \end{pmatrix};$$

$$Q_1(\nu) = \begin{pmatrix} q_1(\nu) & q_2(\nu) \\ -q_2(\nu) & q_1(\nu) \end{pmatrix};$$

$$Q_2(\nu) = \begin{pmatrix} q_3(\nu) & -q_4(\nu) \\ q_4(\nu) & q_3(\nu) \end{pmatrix};$$

$$F(t, W) = \begin{pmatrix} f_1(t, W_1, W_2) \\ f_2(t, W_1, W_2) \end{pmatrix};$$

$q_1(\nu) = E \cdot \cos((q-1)\nu)$,
$q_2(\nu) = E \cdot \sin((q-1)\nu)$,
$q_3(\nu) = E \cdot \cos\nu$,$q_1(\nu) = E \cdot \sin\nu$, E-одинична матриця розміру $n \times n$.

Побудуємо область

$$\Omega_1 = \{(t, W) : W_{1i}^2 + W_{2i}^2 < \delta_i^2 |\varphi_i(z(t,\nu))|^2,$$
$$i = \overline{1,n}, t \in (0, t_1)\},$$

де $\delta > 0, i = \overline{1,n}$ сталі, $\nu \in (0, 2\pi]$,
ν фіксовано.

Частину межі області Ω_1 позначимо

$$\Omega_{10} = \{(t, W) : W_{1i}^2 + W_{2i}^2 = \delta_i^2 |\varphi_i(z(t,\nu))|^2,$$
$$i = \overline{1,n}, t \in (0, t_1)\}.$$

Вивчимо розподіл знаку функції $\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_i}}{2}\right) = (p_{ii}^2(t)\cos((q-1)\nu)+$

$$+p_{ii}^2(t)\sin((q-1)\nu))\delta_i^2|\varphi_i(z(t,\nu))|^2+$$

$$+\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (p_{ij}^1(t)\cos((q-1)\nu) + p_{ij}^2\sin((q-1)\nu))\cdot$$

$$\cdot(W_{1j}W_{1i} + W_{2j}W_{2i}) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (p_{ij}^1(t)\sin((q-1)\nu)-$$

$$-p_{ij}^2\cos((q-1)\nu))(W_{2j}W_{1i} - W_{1j}W_{2i})+$$

$$+t^q(f_{1i}\cos\nu - f\nu_{2i}\sin\nu)W_{1i} + t^q(f_{1i}\sin\nu+$$

$$+f_{2i}\cos\nu)W_{2i} - \delta_i^2|\varphi_i|\psi_{it}',$$

де $\overline{T}$-вектор поля напрямків системи (2.2), означений у точці $(z, W_1, W_2) \in \partial\Omega_{10}$, а $\overline{N_i}, i = \overline{1,n}$, – вектор нормалі до поверхні Ω_1 у тій же точці.

У відповідності з тим, що в області Ω_1 система (1.7) має властивість A_2 відносно функцій $\varphi(z(t,\nu))$ при $t \in (0, t_1]$ рівномірно відносно $\nu \in (0, 2\pi]$, і у відповідності з (1.11), знак скалярного добутку

$$\text{sign}\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_i}}{2}\right) = \text{sign}(\cos((q-1)\nu - \alpha_{jj\nu})-$$
$$-\frac{B_j^t}{|p_{jj\nu}(t)|}), j = \overline{1,n}.$$

Оскільки система (1.7) означена в класі $K_{22}, (t,\nu) \in \Phi_{22.jlk}(t_1)$, отримуємо, що існує таке достатньо мале $t_0 \in (0, t_1)$ для ν по всьому проміжку $[\nu_1, \nu_2]$, що при $t \in (0, t_0]$ $(\partial\Omega_1(t, W, \delta))_{t\in(0,t_0]}$ є поверхнею без контакту для системи (2.2) і, оскільки $\text{sign}\left(t^q\overline{T}, \frac{\overline{N_j}}{2}\right) <$ $< 0, j = \overline{1,n}$ при $t \in (0, t_0]$, то отримуємо хоча б один розв'язок з початковими даними $\overline{\Omega_1}(t, W, \delta)\bigcap(t = t_0)$, який залишається в області $(\Omega_1(t, W, \delta))_{t\in(0,t_0]}$,$(t_0, \nu) \in$ $\Phi_{22.jlk}(t_0)$,ν-фіксовано, при спадані t з інтервалу $(0,t_0]$, причому

$$|W_{kj}(z(t,\nu))| < \delta_j|\varphi_j(z(t,\nu))|, j=\overline{1,n},$$

$$k=1,2,(t,\nu)\in\Phi_{22.jlk}(t_0), k\in\{+,-\}. \quad (2.3)$$

2 етап. Нехай z змінюється вздовж довільного фіксованої дуги околу з сім'ї

$$O_r : z=z(r,\theta),(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}, r - \text{фіксовано}.$$

При $z\in O_r$ покладемо $W(z(r,\theta))=W_1(\theta)+$ $+iW_2(\theta)$, $P(z(r,\theta))=P_1(\theta)+iP_2(\theta)$, $f(z(r,\theta),W_1(\theta),W_2(\theta)) = f_1(\theta,W_1,W_2)+$ $+if_2(\theta,W_1,W_2)$.

Відносно дійсної вектор-функції $W(\theta) =$ $= col(W_1(\theta),W_2(\theta)),W_i(\theta) =$ $= (W_{i1},W_{i2},...,W_{in})$, $i=1,2$, одержуємо систему вигляду:

$$r^{q-1}W'(\theta)=\widetilde{P}(\theta)\widetilde{Q_1}(\theta)W(\theta)+$$

$$+r^q\widetilde{Q_2}(\theta)F(\theta,W(\theta)), \qquad (2.4)$$

де

$$\widetilde{P}(\theta)=\begin{pmatrix} P_1(\theta) & -P_2(\theta)\\ P_2(\theta) & P_1(\theta)\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{Q_1}(\theta)=\begin{pmatrix} q_5(\theta) & -q_6(\theta)\\ q_6(\theta) & q_5(\theta)\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{Q_2}(\theta)=\begin{pmatrix} -q_7(\theta) & -q_8(\theta)\\ q_8(\theta) & -q_7(\theta)\end{pmatrix};$$

$$\widetilde{f}(\theta,W)=\begin{pmatrix} f_1(\theta,W_1,W_2)\\ f_2(\theta,W_1,W_2)\end{pmatrix};$$

$q_5(\theta)=E\cdot\sin((q-1)\theta)$,
$q_6(\theta)=E\cdot\cos((q-1)\theta)$,
$q_7(\theta)=E\cdot\sin\theta$,$q_8(\theta)=E\cdot\cos\theta$.

Вивчимо поводження інтегральних кривих системи (2.4) відносно знаку функції

$$\Omega_{11}=\{(\theta,W): W_{1i}^2+W_{2i}^2<\eta_i^2|\varphi_i(z(r,\theta))|^2,$$

$$i=\overline{1,n},(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}\}$$

Вивчимо розподіл знаку функції

$$\left(r^{q-1}\overline{T},\frac{\overline{N_i}}{2}\right)=(p_{ii}^1(\theta)\sin((q-1)\theta)+$$

$$+p_{ii}^2(\theta)\cos((q-1)\theta))\eta_i^2|\varphi_i(z(r,\theta))|^2+$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(p_{ij}^1(\theta)\sin((q-1)\theta)-p_{ij}^2\cos((q-1)\theta))\cdot$$

$$\cdot(W_{1j}W_{1i}+W_{2j}W_{2i})+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(p_{ij}^1(\theta)\cos((q-$$

$$-1)\theta)+p_{ij}^2\sin((q-1)\theta))(W_{2j}W_{1i}-W_{1j}W_{2i})+$$

$$+r^q(-f_{1i}\sin\theta-f_{2i}\cos\theta)W_{1i}+r^q(f_{1i}\cos\theta-$$

$$-f_{2i}\sin\theta)W_{2i}-\eta_i^2|\varphi_i|\psi'_{i\theta},$$

Оскільки система (2.5) має властивість A_2 відносно функцій $\varphi(z(r,\theta))$ для деякого r_1,$r_1=\min(t_0,t_2)$,$0<r_1\le t_0$,$\theta\in[\nu_1,\nu_2]$; має властивість P_1 відносно функції $F(z,W)$ для деякого r_2,$0<r_2\le t_0$, і у відповідності з (1.12); то існує таке достатньо мале число $r_0\in(0,\min(r_1,r_2))$, що для кожного фіксованого $r\in(0,r_0)$ $(\partial\Omega_1)_{(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}(r)}$ є поверхнею без контакту для системи (2.4) і $\operatorname{sign}(r^{q-1}\overline{T},\overline{N}_j/2)=$
$\operatorname{sign}(\sin((q-1)\theta-\alpha_{jjt}(\theta))-\frac{B_j^\theta}{|p_{jjr}(\theta)|}), j=\overline{1,n}$

В силу того, що система (1.7)належить класу K_{22},$(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}(r_0)$, кожна інтегральна крива системи (2.4), яка проходить через точку множини $\overline{\Omega}_{11}(\theta,W,\eta)\cap(\theta=\theta_0)$, $\theta_0\in\Phi_{22.jl+}(r_0)$ $(\theta_0\in\Phi_{22.jl-}(r_0))$, залишається у області $\Omega_{11}(\theta,W,\eta)$, якщо спадає (зростає) θ і задовольняє умову

$$|W_{kj}(z(r,\theta))|<\eta_j|\varphi_j(z(r,\theta))|, j=\overline{1,n}, k=1,2,$$
$$(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}(r_0), k\in\{+,-\} \qquad (2.5)$$

3 етап. Покладемо

$$0<r_0<t_0, \delta_j^2\le\eta_j^2, j=\overline{1,n}. \qquad (2.6)$$

Позначимо $\rho=r_0$.

а)Розглянемо довільну фіксовану криву $L_\nu(0,z_1]\subset G_{22.jlk}(r_0)$, де $z_1\in O_{r_0}(\Phi_{22.jlk}(t_0))$.

На 1 етапі доведено, що вздовж неї існує хоча б один неперервний розв'язок $W_\nu^0(z(t,\nu))$ системи (1.7), який задовольняє умову

$$|W_{\nu_{kj}}(z(r,\theta))| < \delta_j|\varphi_j(z(r,\theta))|, j=\overline{1,n},$$
$$k=1,2,(r,\theta)\in\Phi_{22.jlk}(r_0), k\in\{+,-\}. \quad (2.7)$$

Отже, множина $\{W_\nu(z)\}$ містить хоча б один елемент $W_\nu^0(z)$.

Аналогічно доведенню етапа 3а) теореми 2.1 [7] здійснимо аналітичне продовження вибраного в $\{W_\nu(z)\}$ розв'язку $W_\nu^0(z)$ системи (1.7) на область, яка містить криву $L_\nu(0,z_1]$ так, щоб

$$|W_{\nu_{kj}}(z)|^2 < \delta_j^2|\varphi_j(z)|, j=\overline{1,n}, k=1,2, \quad (2.8)$$

В силу єдиності аналітичного розв'язку задачі Коші при $z\in U(z(t,\nu),\Delta_t^0)\cap L_\nu$,$\Delta_t^0>0$,$W_U^0(z)\equiv W_\nu^0$ є аналітичним продовженням $W_U^0(z)$ з кривої $U(z(t,\nu),\Delta_t^0)\cap L_\nu$ на область $U(z(t,\nu),\Delta_t^0)$, причому окіл $U(z(t,\nu),\Delta_t^0)$ виберемо так, щоб при $z\in U(z,\Delta_t^0)$ виконувалась нерівність (2.8).

Околи $U(z(t,\nu),\Delta_t^0)$ утворюють нескінченне відкрите покриття компакту $L_\nu(\xi,z_1],\xi>0$. У відповідності з лемою Гейне-Бореля з нього виділяємо скінченне покриття U_ν^0, яке містить компакт $L_\nu(\xi,z_1]$.

З довільності вибору в сім'ї L_ν одержуємо, що яку бікриву $L_\nu(0,z_1]\subset G_{22.jkl}(\rho)$ ми не взяли, існує непорожня область $U_\nu^0\supset L_\nu(0,z_1]$ з точкою $z=0$ на межі, на яку зі зберіганням оцінки (2.8) аналітично продовжується розв'язок $W_\nu^0(z)$ системи (1.7).

Отже, показано, що для кожного $\nu\in\Phi_{22.jlk}(r_0)$ існує хоча б один розв'язок $W_\nu^0(z)$ системи (1.7), аналітичний в області $U_\nu^0\supset L_\nu(0,|z_1(r_0,\nu)|]$,$0\in\partial U_\nu\setminus U_\nu$, який задовольняє (2.2).

в) Розглянемо тепер фіксовану криву $L_{\theta_0}(0,|z_1|$. З етапу 2 одержуємо, що кожний розв'язок системи (1.7) з початковими значеннями з множини $\overline{\Omega}_{11}\cap(\theta=\theta_0)$ продовжується вздовж кожної з кривих сім'ї $O_r(\Phi_{22.jlk}(r_0)),r\in(0,r_0]$ при спаданні (зростанні) θ на замкненому проміжку $\Phi_{22.jlk}(r_0)$, якщо $k\in\{+\}$ $(k\in\{-\})$; тобто продовжується вздовж кожної з кривих з сім'ї $O_r(\Phi_{22.jlk}(r_0)),r\in(0,r_0]$. Причому у відповідності зі зміненою θ розв'язок залишається на кожному з вказаних проміжків області вигляду Ω_{11}.

З нерівностей (2.6) для кожного $r\in(0,r_0]$ множина значень функції $Y^0(z)$ при $z\in L_{\theta_0}(0,|z_1|$ міститься у множині $\overline{\Omega}_{11}\cap(\theta=\theta_0)$ і, т.ч., твердження з в) є вірним для розв'яку $Y_{\theta_0}^0(z)$.

с) Здійснимо аналітичне продовження розв'язків системи (1.7) на множину $G_{22.jlk}(\rho)$ так, щоб зберігалась оцінка

$$|Y_{kj}(z(t,\nu))|^2 < \delta_j|\varphi_j(z(t,\nu))|^2, j=\overline{1,n},$$

$$k=1,2,(t,\nu)\in\Phi_{22.jlk}(r_0), k\in\{+,-\}. \quad (2.9)$$

Аналогічно а) здійснюємо аналітичне продовження розв'язку системи (1.7) з кривої $L_\nu(0,|z_1|]$ на область, яка її містить.

Розв'язок $Y_{\theta_0}^0$ аналітично продовжується на область $G_{22.jlk}(\rho)$. Остання покривається системою відкритих областей $U_\nu^0(z)$.

Скінченне покриття $U^0=\bigcup_{n=1}^{I}U_{\nu_n}^0(z)$, $I\in N$ області $G_{22.jlk}(\rho)$ має властивості:

1)$G_{22.jlk}(\rho)\subset U^0$;

2)$0\in\partial U_0\setminus U_0$.

Не обмежуючи загальності, будемо вважати,що в області $G_{22.jlk}(\rho)$ існує хоч би один аналітичний розв'язок $Y^0(z)$ системи (1.7),який має властивість (2.9). Це випливає з існування вздовж кожної з кривих $L_\nu(0,|z_1|$ хоча б одного розв'язку системи (1.7) з такою оцінкою.

Таким чином, система (1.7) при $z\in$ $\in G_{22.jlk}(\rho)$ має хоча б один аналітичний розв'язок, який має асимптотичну оцінку (2.3).Теорема доведена.

Доведення теореми 1.3 відрізняється від теореми 1.2 на етапі 1. У відповідності з умовами теореми 1.3 маємо, що $\left(t^q\overline{T},\frac{\overline{N_j}}{2}\right)<0, j=\overline{1,p_1},\overline{p_3+1,n}$;
$\left(t^q\overline{T},\frac{\overline{N_j}}{2}\right)>0, j=\overline{p_1+1,p_2},\overline{p_2+1,p_3}$.

Для множин

$$\Omega_2^e=\Omega_2^{se}=\{(t,W):t=t_0,W_{1j}^2(t)+W_{2j}^2(t)=$$
$$=\delta_j^2|\varphi_j(z(t,\nu))|^2, j=\overline{1,p_1},\overline{p_3+1,n},t\in(0,t_1)\}$$

і

$$H_2 = \{(t,W) : t = t_0, W_{1j}^2(t) + W_{2j}^2(t) \le$$

$$\le \delta_j^2 |\varphi_j(z(t,\nu))|^2, j = \overline{1,p_1}, \overline{p_3+1,n}\},$$

множина $E_2 = H_2 \cap \Omega_2^{se} = \{(t,W) : t = t_0,$

$$W_{1j}^2(t) + W_{2j}^2(t) = \delta_j^2 |\varphi_j(z(t_0,\nu))|^2, j = \overline{1,p_1},$$

$$\overline{p_3+1,n}, W_{1j}^2(t) + W_{2j}^2(t) < \delta_j^2 |\varphi_j(z(t_0,\nu))|^2,$$

$$j = \overline{p_1+1,p_3}\}.$$

є ретрактом для Ω_2^{se} і не є ретрактом для H_2.

Відповідно топологічному принципу Важевського маємо, що існує хоча б один неперервно-диференційовний розв'язок системи (2.1), який лежить в області $(\Omega_1(t,W,\delta))_{t\in(0,t_0]}$,$(t_0,\nu) \in \Phi_{23.jlk}(t_0)$, при спаданні t з інтервалу $(0,t_0]$, причому справедлива оцінка (2.3).

5. Висновки. Ця робота є продовженням досліджень, які були проведені в [7]. Система (1.1) вивчається у припущенні, що $m > n, rangA(0) = n$ є сталим в деякій області D_1, коли матриця $A_1^{-1}(z)B_1(z)$ аналітична в D_{10} і в точці $z = 0$ має полюс q-го порядку, $q \in N, q \ge 2$.

Одержані достатні умови існування аналітичних розв'язків задачі (1.1)-(1.2) в області з особливою точкою $z = 0$ на межі. Вивчено питання про кількість таких розв'язків.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Шкиль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями-К.:Вища школа.—2000.—294с.
2. *Бояринцев Ю.Е.* Вырожденные системы дифференциальных уравнений. Н.:Наука— 1982.—312с.
3. *Campbell St.* Uniqueness of completions for linear time varing differention algebraic equations //Linear Algebra and Appl.—1992.–**161**.—c.55-67. — 144c.
4. *März R.* On the stability behaviour of systems obtained by index-reduction // Journal of Comp.Applied Math.— 1994. — **56**. — PP. 305-319
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. — 1967.— 472с.
6. *Самкова Г.Е.* Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных// Диф. уравнения. — 1991. — **27**, N 11. — С. 2012-2013.
7. *Самкова Г.Є., Шарай Н.В.* Об исследовании некоторой полуявной системы дифференциальных уравнений в случае переменного пучка матриц //Нелінійні коливання.–2002.-**5**,№2.—с.224-236.
8. *Шарай Н.В.* Об асимптотике решений полуявных систем дифференциальных уравнений //Нелінійні коливання.–2005.-8,№1.—с.132-144.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.2006