УДК 517.982.22

©2006 р. Н.В.Сніжко

Запорізький національний університет, Запоріжжя

ПРО КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ В УЗАГАЛЬНЕНИХ ПРОСТОРАХ ГЕЛЬДЕРА

В роботі встановлюються необхідні й достатні умови компактності множин в узагальнених просторах Гельдера функцій двох комплексних змінних, заданих на замкнених контурах Ляпунова. Умови сформульовані в термінах модулів неперервності, які є структурною характеристикою вказаних просторів.

Necessary and sufficient conditions for compactness of sets in generalized Hölder spaces of two variables functions which defined on closed Lyapunov contours, are established. The conditions are formulated in terms of moduli of continuity which are structure characteristics of the mentioned spaces.

Задача дослідження компактності тієї чи іншої множини в метричному просторі виникає доволі часто. Але використання для цієї мети універсальних критеріїв компактності не завжди зручне й доцільне, оскільки такі критерії не враховують специфіку кожного конкретного простору, в якому досліджується компактність різноманітних множин. Для класичних просторів відомі критерії компактності, наприклад, теорема Арцела – Асколі для простору неперервних функцій, теорема Колмогорова для просторів сумовних функцій L_p, $p \geqslant 1$. В даній роботі встановлюється критерій компактності для часто використовуваних (зокрема, при розв'язанні бісингулярних інтегральних рівнянь) узагальнених просторів Гельдера функцій двох комплексних змінних.

Нехай $\gamma = \gamma_1 \times \gamma_2$ – довільний замкнений кістяк Ляпунова (γ_1 і γ_2 – замкнені контури Ляпунова на комплексній площині), $t \in \gamma_1$, $\tau \in \gamma_2$. Далі, нехай $\omega(\delta_1, \delta_2)$ – деякий модуль неперервності, $\Omega_1(\delta)$, $\Omega_2(\delta)$ – відповідні йому прості модулі неперервності [1], які задовольняють умови Зигмунда – Барі – Стєчкіна. Позначимо через $H_\omega(\gamma) \equiv H_\omega$ узагальнений простір Гельдера, тобто простір неперервних на γ комплекснозначних функцій $\varphi(t,\tau)$, що задовольняють умови:

$$H(\varphi;\omega) = \sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0} \frac{\omega(\delta_1,\delta_2;\varphi)}{\omega(\delta_1,\delta_2)} \leqslant C_1(\varphi),$$

$$H^{t\tau}(\varphi;\omega) = \sup_{\delta_1^2+\delta_2^2\neq 0} \frac{\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;\varphi)}{\Omega_1(\delta_1)\Omega_2(\delta_2)} \leqslant C_2(\varphi),$$

де $\omega(\delta_1,\delta_2;\varphi)$ і

$$\omega_{1,1}(\delta_1,\delta_2;\varphi) = \sup_{\substack{|t_1-t_2|\leqslant\delta_1\\|\tau_1-\tau_2|\leqslant\delta_2}} |\varphi(t_1,\tau_1)-\varphi(t_1,\tau_2)-$$

$$-\varphi(t_2,\tau_1)+\varphi(t_2,\tau_2)|$$

– модуль неперервності і мішаний модуль неперервності другого порядку відповідно функції $\varphi(t,\tau)$; $C_1(\varphi)$, $C_2(\varphi)$ – цілком визначені сталі, що залежать тільки від функції $\varphi(t,\tau)$. Норма в H_ω визначається наступним чином:

$$\|\varphi(t,\tau)\|_{H_\omega} =$$

$$= \|\varphi(t,\tau)\|_C + H(\varphi;\omega) + H^{t\tau}(\varphi;\omega).$$

Відносно цієї норми простір H_ω є банаховим [2].

В даній роботі встановлюються необхідні та достатні умови компактності множини в просторі H_ω.

Позначимо через Q множину тих точок $((t_1,\tau_1),(t_2,\tau_2))$ декартового добутку $\gamma\times\gamma$, для яких $t_1 \neq t_2$ і $\tau_1 \neq \tau_2$.

Теорема. Для того, щоб множина $M \subset H_\omega(\gamma)$ була компактною, необхідно і достатньо виконання наступних умов:
а) існує стале число $k > 0$ таке, що

$$\|\varphi\|_{H_\omega} \leqslant k$$

для будь-якої функції $\varphi(t,\tau)$ із M;
б) для будь-якої замкненої множини Q_1, що міститься в Q, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, Q_1) > 0$ таке, що при будь-яких $((t_1', \tau_1'), (t_2', \tau_2')) \in Q_1$, $((t_1'', \tau_1''), (t_2'', \tau_2'')) \in Q_1$, які задовольняють нерівності

$$|t_1' - t_1''| < \delta, \ |t_2' - t_2''| < \delta,$$
$$|\tau_1' - \tau_1''| < \delta, \ |\tau_2' - \tau_2''| < \delta, \tag{1}$$

виконані співвідношення

$$\left|\frac{\varphi(t_1', \tau_1') - \varphi(t_2', \tau_2')}{\omega(|t_1' - t_2'|, |\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varphi(t_1'', \tau_1'') - \varphi(t_2'', \tau_2'')}{\omega(|t_1'' - t_2''|, |\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| < \varepsilon, \tag{2}$$

$$\left|\frac{\Delta(t_1', \tau_1', t_2', \tau_2'; \varphi)}{\Omega_1(|t_1' - t_2'|)\,\Omega_2(|\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta(t_1'', \tau_1'', t_2'', \tau_2''; \varphi)}{\Omega_1(|t_1'' - t_2''|)\,\Omega_2(|\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| < \varepsilon \tag{3}$$

для довільної $\varphi(t,\tau) \in M$. В нерівності (3) використано позначення

$$\Delta(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2; \varphi) = \varphi(t_1, \tau_1) - \varphi(t_2, \tau_1) -$$
$$- \varphi(t_1, \tau_2) + \varphi(t_2, \tau_2).$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай множина M компактна. Тоді вона обмежена. В силу теореми Гаусдорфа для M існує $\frac{\varepsilon}{3}$-сітка. Нехай ця сітка складається з функцій $\varphi_1(t,\tau)$, $\varphi_2(t,\tau)$, $\ldots$, $\varphi_n(t,\tau)$.

Нехай тепер Q_1 є будь-яка замкнена множина із Q. Тоді для $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, Q_1) > 0$ таке, що для всіх точок $((t_1', \tau_1'), (t_2', \tau_2')) \in Q_1$, $((t_1'', \tau_1''), (t_2'', \tau_2'')) \in Q_1$, що задовольняють умову (1), виконуються нерівності

$$\left|\frac{\varphi_i(t_1', \tau_1') - \varphi_i(t_2', \tau_2')}{\omega(|t_1' - t_2'|, |\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varphi_i(t_1'', \tau_1'') - \varphi_i(t_2'', \tau_2'')}{\omega(|t_1'' - t_2''|, |\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4}$$

$$\left|\frac{\Delta(t_1', \tau_1', t_2', \tau_2'; \varphi_i)}{\Omega_1(|t_1' - t_2'|)\Omega_2(|\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\Delta(t_1'', \tau_1'', t_2'', \tau_2''; \varphi_i)}{\Omega_1(|t_1'' - t_2''|)\Omega_2(|\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{5}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нехай $\varphi(t,\tau)$ – будь-яка функція із $H_\omega(\gamma)$. Оскільки функції $\varphi_1(t,\tau)$, $\varphi_2(t,\tau)$, ..., $\varphi_n(t,\tau)$ утворюють $\frac{\varepsilon}{3}$-сітку, то для $\varphi(t,\tau)$ знайдеться $\varphi_j(t,\tau)$ така, що

$$\|\varphi - \varphi_j\|_{H_\omega} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6}$$

Нехай $((t_1', \tau_1'), (t_2', \tau_2'))$, $((t_1'', \tau_1''), (t_2'', \tau_2''))$ – будь-які точки із Q_1, що задовольняють умову (1). Запровадимо позначення:

$$\psi_j(t,\tau) = \varphi(t,\tau) - \varphi_j(t,\tau).$$

Тоді з (4) і (6) одержуємо:

$$\left|\frac{\varphi(t_1', \tau_1') - \varphi(t_2', \tau_2')}{\omega(|t_1' - t_2'|, |\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varphi(t_1'', \tau_1'') - \varphi(t_2'', \tau_2'')}{\omega(|t_1'' - t_2''|, |\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{\psi(t_1', \tau_1') - \psi(t_2', \tau_2')}{\omega(|t_1' - t_2'|, |\tau_1' - \tau_2'|)}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\psi(t_1'', \tau_1'') - \psi(t_2'', \tau_2'')}{\omega(|t_1'' - t_2''|, |\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\varphi_j(t_1', \tau_1') - \varphi_j(t_2', \tau_2')}{\omega(|t_1' - t_2'|, |\tau_1' - \tau_2'|)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\varphi_j(t_1'', \tau_1'') - \varphi_j(t_2'', \tau_2'')}{\omega(|t_1'' - t_2''|, |\tau_1'' - \tau_2''|)}\right| < \varepsilon.$$

Аналогічно, на підставі (5) і (6), доводиться виконання нерівності (3) (викладки не наводятся з огляду на їхню громіздкість).

Достатність. Нехай для множини $M \subset H_\omega(\gamma)$ виконуються умови а) і б) теореми і $\{\varphi_n(t,\tau)\}$ – довільна послідовність із M. Тоді маємо:

$$\|\varphi_n(t,\tau)\|_C \leqslant k, \quad H(\varphi_n; \omega) \leqslant k,$$

$$H^{t\tau}(\varphi_n;\omega) \leqslant k, \quad n = 1, 2, ... \tag{7}$$

Звідси, згідно з теоремою Арцела – Асколі, послідовність $\{\varphi_n(t,\tau)\}$ є компактною в $C(\gamma)$. Без обмеження загальності можна вважати, що $\{\varphi_n(t,\tau)\}$ збігається в сенсі норми простору $C(\gamma)$.

Нехай $\left(\left(t_{1_1}^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right), \left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)\right)$ – зліченна щільна множина точок із Q. Тоді на підставі нерівностей (7)

$$\sup_i \left\{ \frac{\left|\varphi_n\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_n\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)\right|}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right\} \leqslant k,$$

$$\sup_i \left\{ \frac{\left|\Delta(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}; \varphi_n)\right|}{\Omega_1\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|\right)\Omega_2\left(\left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right\} \leqslant k.$$

Із цих нерівностей за допомогою діагонального процесу Кантора можна вибрати таку послідовність $\{\varphi_{n_k}(t,\tau)\}$, що послідовності

$$\left\{ \frac{\varphi_{n_k}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_k}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right\}, \tag{8}$$

$$\left\{ \frac{\Delta(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}; \varphi_{n_k})}{\Omega_1\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|\right)\Omega_2\left(\left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right\} \tag{9}$$

збігаються для кожної точки $\left(\left(t_{1_1}^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right), \left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)\right)$.

Далі, враховуючи щільність множини $\left\{\left(\left(t_{1_1}^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right), \left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)\right)\right\}$ в Q і умову б) теореми, для будь-якої точки $((t_1,\tau_1),(t_2,\tau_2)) \in Q$ маємо:

$$\left| \frac{\varphi_{n_k}(t_1,\tau_1) - \varphi_{n_k}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|, |\tau_1-\tau_2|)} - \frac{\varphi_{n_m}(t_1,\tau_1) - \varphi_{n_m}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|, |\tau_1-\tau_2|)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \frac{\varphi_{n_k}(t_1,\tau_1) - \varphi_{n_k}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|, |\tau_1-\tau_2|)} - \frac{\varphi_{n_k}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_k}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\varphi_{n_k}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_k}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} - \frac{\varphi_{n_m}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_m}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\varphi_{n_m}(t_1,\tau_1) - \varphi_{n_m}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|, |\tau_1-\tau_2|)} - \frac{\varphi_{n_m}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_m}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \left| \frac{\varphi_{n_k}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_k}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} - \frac{\varphi_{n_m}\left(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}\right) - \varphi_{n_m}\left(t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}\right)}{\omega\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|, \left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right|.$$

Аналогічним чином для будь-якої точки $((t_1,\tau_1),(t_2,\tau_2)) \in Q$ одержуємо

$$\left| \frac{\Delta(t_1, \tau_1, t_2, \tau_2; \varphi_{n_k})}{\Omega_1(|t_1-t_2|)\Omega_2(|\tau_1-\tau_2|)} - \frac{\Delta(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}; \varphi_{n_m})}{\Omega_1(|t_1-t_2|)\Omega_2(|\tau_1-\tau_2|)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon + \left| \frac{\Delta(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}; \varphi_{n_k})}{\Omega_1\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|\right)\Omega_2\left(\left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} - \frac{\Delta(t_1^{(i)}, \tau_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \tau_2^{(i)}; \varphi_{n_m})}{\Omega_1\left(\left|t_1^{(i)} - t_2^{(i)}\right|\right)\Omega_2\left(\left|\tau_1^{(i)} - \tau_2^{(i)}\right|\right)} \right|.$$

Отже, з урахуванням збіжності послідовностей (8) і (9) маємо:

$$\lim_{m,k\to\infty} \sup_{\substack{((t_1,\tau_1),\\ (t_2,\tau_2))\in Q}} \left| \frac{\varphi_{n_k}(t_1,\tau_1) - \varphi_{n_k}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|, |\tau_1-\tau_2|)} - \right.$$

$$
-\frac{\varphi_{n_m}(t_1,\tau_1)-\varphi_{n_m}(t_2,\tau_2)}{\omega(|t_1-t_2|,|\tau_1-\tau_2|)}\Bigg|=0,
$$

$$
\lim_{m,k\to\infty}\sup_{\substack{((t_1,\tau_1),\\(t_2,\tau_2))\in Q}}\left|\frac{\Delta(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2;\varphi_{n_k})}{\Omega_1(|t_1-t_2|)\,\Omega_2(|\tau_1-\tau_2|)}-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\Delta(t_1,\tau_1,t_2,\tau_2;\varphi_{n_m})}{\Omega_1(|t_1-t_2|)\,\Omega_2(|\tau_1-\tau_2|)}\right|=0.
$$

Таким чином, одержуємо

$$
\lim_{k,m\to\infty}\|\varphi_{n_m}-\varphi_{n_k}\|_{H_\omega}=0.
$$

Із повноти простору $H_\omega(\gamma)$ випливає збіжність послідовності $\{\varphi_{n_k}(t,\tau)\}$, що і треба було довести.

Слід зауважити, що критерій компактності для простору $H_\alpha^n[0,1]$ (тобто для банахового простору функцій однієї змінної, які визначені на відрізку $[0,1]$ та мають неперервні похідні до порядку n, причому n-а похідна задовольняє умову Гельдера з показником α) з нормою

$$
\|\varphi\|_{H_\alpha^n[0,1]}=\|\varphi\|_{C[0,1]}+\sum_{k=1}^{n}\left\|\varphi^{(k)}\right\|_{C[0,1]}+
$$

$$
+\sup_{\substack{0\leqslant x,y\leqslant 1\\x\neq y}}\frac{\left|\varphi^{(n)}(x)-\varphi^{(n)}(y)\right|}{|x-y|^\alpha}
$$

був доведений С.Р.Фірштейном в роботі [3]. Для узагальнених просторів Гельдера $H_\omega[a,b]$ функцій однієї змінної, заданих на відрізку $[a,b]$, з нормою

$$
\|\varphi\|_{H_\omega[a,b]}=\|\varphi\|_{C[a,b]}+
$$

$$
+\sup_{\substack{a\leqslant x,y\leqslant b\\x\neq y}}\frac{|\varphi(x)-\varphi(y)|}{\omega(|x-y|)},
$$

аналогічна теорема була встановлена в монографії [4]. І нарешті, випадок функцій двох змінних, очевидно, принципово відрізняється від випадку функцій однієї змінної (це пов'язано з тим, що в означенні норми з'являються додаткові доданки, які включають мішані модулі неперервності вищих порядків, і як наслідок оцінки, що провадяться за однією змінною, повинні бути рівномірними відносно іншої змінної); однак при цьому поширення одержаних результатів на випадок функцій багатьох комплексних змінних викликає, в основному, тільки технічні труднощі. Тому в даній роботі розглянутий саме випадок функцій двох змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1965. – 624 с.

2. *Сніжко Н.В.* Класифікація узагальнених просторів Гельдера функцій двох змінних // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 124 – 128.

3. *Фирштейн С.Р.* Об одном признаке компактности в банаховом пространстве $C_{[o,1]}^{\alpha+l}$ // Известия вузов. Математика. – 1969. – №8. – С. 117 – 118.

4. *Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 416 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.05.2006