УДК 517.95

©2006 р. П.Я. Пукач

Національний університет "Львівська політехніка", Львів

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Праця присвячена дослідженню першої мішаної задачі для нелінійного рівняння п'ятого порядку в обмеженій за часовою та необмеженій за просторовими змінними області. Розглянуте рівняння узагальнює рівняння коливань балки в середовищі з опором, що вивчається в теорії пружності, на випадок довільної скінченної кількості просторових змінних. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку. Вказані класи існування та єдиності є просторами локально інтегровних функцій.

The paper is devoted to investigation of the first mixed problem for nonlinear fifth order equation in domain bounded with respect to time variable and unbounded with respect to space variables. Described equation generalizes the equation of beam vibrations in medium with resistance, which is studied in elasticity theory, for a case of any finite number of space variables. The conditions of the existence and uniqueness of generalized solution have been obtained. The classes of the existence and uniqueness are the spaces of local integrable functions.

У цій праці досліджено першу мішану задачу в необмеженій за просторовими змінними області для нелінійного рівняння

$$\mathcal{A}(u) \equiv u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^{\beta}\left(a_{\alpha\beta}(x,t)D^{\alpha}u_t\right) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(a_{1,i}(x,t)|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}\right)_{x_i} + a_{00}(x,t)u_t +$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le 2}(-1)^{|\alpha|}D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x)D^{\alpha}u\right)+b_{00}(x,t)u+$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u+g(x,u_t)=f(x,t), \qquad (1)$$

де $D^{\alpha} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1}...\partial {x_n}^{\alpha_n}}$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $i=1,...,n$, $|\alpha| = \alpha_1+...+\alpha_n$. Рівняння та системи вигляду (1), які узагальнюють модель коливання балки у середовищі з опором, вивчають у теорії пружності. Актуальність вивчення крайових задач для таких рівнянь та систем пояснюється проблемою зношування контактних поверхонь [1]. Зокрема, у праці [1] досліджено існування слабких розв'язків мішаних задач в обмеженій області D для системи двох лінійних еволюційних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною, одна з невідомих функцій у якій описує вертикальне зміщення балки. Відповідне рівняння такої системи $u_{tt}+au_{txxxx}+bu_{xxxx}=f$ є частинним випадком рівняння (1) за умов $n=1$, $a_{1,i}=0$, $i=1,...,n$, $a_{00}=0$, $b_{\alpha\beta}=0$, $|\alpha|=|\beta|\le 1$, $c_{\alpha}=0$, $1\le|\alpha|\le 2$, $g=0$. Формулювання загальних математичних моделей динамічних контактів пружних структур, які описуються вищезгаданими рівняннями та системами, є сучасною та актуальною інженерно – технічною проблемою [2–4]. Зокрема, задача динамічного в'язкопружного тертя зі зношуванням вперше була сформульована в праці [2], у [3] досліджено динамічний контакт між балкою та рухомою поверхнею, термопружний контакт вивчено в [4].

Задачі для лінійних та нелінійних еволюційних рівнянь і систем з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною в необмежених областях розглядали багато дослідників (див. для прикладу [5–22]). Деякі результати існування єдиного розв'язку у цих працях отримані в припущенні якісної поведінки розв'язку, початкових даних та правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати (для певних класів нелінійних рівнянь)– без таких припущень. Першими у цьому плані були праці [17, 18], в яких розглянуто задачі для параболічного рівняння в необмеженій області. У [20] вивчено мішану задачу для слабко нелінійної системи гіперболічних рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними. Праця [21] присвячена дослідженню першої мішаної задачі для слабко нелінійної гіперболічної системи другого порядку в необмеженій за просторовими змінними області. Нелінійна гіперболічна варіаційна нерівність другого порядку в такій області вивчена у праці [22].

Ця праця розвиває та узагальнює ідеї і методи дослідження мішаної задачі в необмеженій області, викладені в [21], на випадок рівняння п'ятого порядку (1), деякі коефіцієнти в якому можуть зростати степеневим чином при $|x| \to \infty$. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини рівняння та початкових даних.

В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < T < \infty$, розглядаємо для рівняння (1) мішану задачу з початковими умовами

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

$$u_t|_{t=0} = u_1(x) \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$u|_{S_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_T} = 0, \tag{4}$$

$S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до поверхні $\partial\Omega$.

Припускаємо, що Ω – необмежена область з межею $\partial\Omega$ класу C^1, $\Omega^R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ – зв'язна множина для довільного $R > 1$ з регулярною за Кальдероном [23, с. 45] межею $\partial\Omega^R$. Зауважимо, зокрема, що опукла область Ω задовольняє усі зазначені умови [23, с.46, заув. 1.11]. Позначимо $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $Q_\tau^R = \Omega^R \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t |\, t = \tau\}$ для довільних $\tau \in [0,T]$, $R > 1$, $\partial\Omega^R = \Gamma_1^R \cup \Gamma_2^R$, $\Gamma_1^R = \partial\Omega \cap \partial\Omega^R$, $\Gamma_2^R = \partial\Omega^R \backslash \Gamma_1^R$.

У цій праці використовуємо такі функційні простори:

$$H^2_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \Big\{ u \in H^2(\Omega^R) : u|_{\Gamma_1^R} = 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_1^R} = 0 \Big\},$$

$$H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : u \in H^2_{0,\Gamma_1^R}\left(\Omega^R\right) \forall R > 1 \Big\},$$

$$H^4_{loc}(\overline{\Omega}) = \big\{ u : u \in H^4\left(\Omega^R\right) \forall R > 1 \big\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R) = \Big\{ u \in W^{1,p_1}(\Omega^R) : u|_{\Gamma_1^R} = 0 \Big\},$$

$$W^{1,p_1}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \Big\{ u : u \in W^{1,p_1}_{0,\Gamma_1^R}(\Omega^R)\ \forall R > 1 \Big\},$$

$$L^r_{loc}\left(\overline{\Omega}\right) = \big\{ u : u \in L^r(\Omega^R)\, \forall R > 1 \big\}, r \in (1, +\infty].$$

Стосовно коефіцієнтів, правої частини рівняння (1) та початкових даних припускаємо виконання таких умов.

(A2) $\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2} \operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T^R} |a_{\alpha\beta}(x,t)| \leqslant a_2 R^\omega$ для довільного $R > 1$, $0 \leqslant \omega < 1$, де $a_2 > 0$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant a_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел $\xi_\alpha, |\alpha| = 2$, та для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $a_{0,2} = \text{const}{>}0$; функції $a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| = |\beta| = 1)$, $a_{\alpha\beta,t}$ $(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $a_{00,t}$, $D^2 a_{\alpha\beta}(|\alpha|{=}|\beta|{=}2)$, $D^1 a_{\alpha\beta}(|\alpha|{=}|\beta|{=}1)$ належать до $L^\infty\left(Q_T\right)$; $a_{00} \in L^\infty\left((0,T)\,; L^\infty_{loc}(\overline{\Omega})\right)$, $a_{00}(x,t) \geq a_0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де $a_0 = \text{const}$; $a_{\alpha\beta}(x,t) = a_{\beta\alpha}(x,t)$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, $|\alpha| = |\beta| = 2$.

(A1) Функції $a_{1,i}$, $a_{1,i_{x_i}}$, a_{1,i_t} належать до простору $L^\infty(Q_T)$, причому $a_{1,i}(x,t) \geq a^1$ для майже всіх $(x,t) \in Q_T$, де a^1 - додатна стала, $i = 1,...,n$.

(B) функції $b_{\alpha\beta}(1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq 2)$, $D^2 b_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $D^1 b_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 1)$ належать до простору $L^\infty\left(\Omega\right)$, причому

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} b_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant b_{0,2} \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 2$, та для майже всіх $x \in \Omega$, де $b_{0,2} = \text{const}>0$;

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(x)\xi_\alpha\xi_\beta \geqslant b_{0,1} \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^2$$

для довільних дійсних чисел ξ_α, $|\alpha| = 1$, та для майже всіх $x \in \Omega$, де $b_{0,1} = \text{const} \geq 0$; функції b_{00}, $b_{00,t}$ належать до простору $L^\infty(Q_T)$; $b_{\alpha\beta}(x) = b_{\beta\alpha}(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $1 \leq |\alpha| = |\beta| \leq 2$.

(C) Функції c_α, $c_{\alpha,t}$ належать до $L^\infty(Q_T)$, $1 \leq |\alpha| \leq 2$.

(G) Функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, причому для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ та для майже всіх $x \in \Omega$: $(g(x,\xi) - g(x,\eta))(\xi - \eta) \geqslant g_0 |\xi - \eta|^p$, $|g(x,\eta)| \leqslant g_1 |\eta|^{p-1}$, де g_0, g_1 – додатні сталі, $p > 2$; функція g_ξ - неперервна за змінною ξ для майже всіх $x \in \Omega$.

(F) $f \in L^{p'}((0,T); L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$, $p' = p/(p-1)$, $f_t \in L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$.

(U) $u_0 \in H^4_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in H^4_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2p-2}_{loc}(\overline{\Omega})$, $u^{p_1-2}_{1,x_i} u_{1,x_ix_i} \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$.

(P1) $1 < p_1 < 2$, якщо $n = 1$, $n = 2$; $\dfrac{2n}{n+2} < p_1 < 2$, якщо $n \geq 3$.

Означення. Узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) в області Q_T називаємо функцію $u \in C([0,T]; H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ таку, що $u_t \in C\left([0,T]; L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap L^2\left((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$, яка задовольняє умову (2) та інтегральну тотожність

$$\int_{Q_\tau} \Big[- u_t v_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t D^\beta v +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) |u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} v_{x_i} \Big] dxdt +$$
$$+ \int_{Q_\tau} \Big[\sum_{1\leq|\alpha|=|\beta|\leq 2} b_{\alpha\beta} D^\alpha u D^\beta v - f(x,t)v +$$
$$+ \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u v + a_{00}(x,t) u_t v \Big] dxdt +$$
$$+ \int_{Q_\tau} g(x,u_t) v dxdt + \int_\Omega u_t(x,\tau) v(x,\tau) dx -$$
$$+ \int_{Q_\tau} b_{00}(x,t) uv dxdt - \int_\Omega u_1(x) v(x,0) dx = 0 \quad (5)$$

для довільного $\tau \in (0,T]$ і для довільної функції $v \in C^1([0,T]; C_0^\infty(\Omega))$.

Лема. Нехай виконуються умови **(A2)** – **(G)**, **(P1)** і u та u^0 – узагальнені розв'язки відповідно задачі (1)–(4) та задачі (2)–(4) для рівняння $\mathcal{A}(u) = f^0$. Тоді для довільних τ, R, R_0 таких, що $\tau \in (0,T]$, $1 < R_0 < R$, правильна оцінка

$$\int_{\Omega^{R_0}} \Big[\left|u_t(x,\tau) - u_t^0(x,\tau)\right|^2 +$$
$$+ \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha \left(u(x,\tau) - u^0(x,\tau)\right)\right|^2 \Big] dx +$$
$$+ \int_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha \left(u_t - u_t^0\right)\right|^2 + \left|u_t - u_t^0\right|^p \Big] dxdt +$$
$$+ \int_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i}\right) \times$$
$$\times \left(u_{tx_i} - u^0_{tx_i}\right) dxdt \leq \left(\frac{R}{R - R_0}\right)^\gamma \times$$
$$\times \Bigg(M_1 R^{n - \frac{\beta}{q-2}} + M_2 R^{n - \frac{2p_1}{2-p_1}} +$$
$$+ M_3 \int_{Q_\tau^R} \left|f - f^0\right|^{p'} dxdt \Bigg), \quad (6)$$

де $q \in (2,p)$ – довільне число, $\gamma > \dfrac{4q}{q-2}$, $\beta = \min((1-\omega)4q; 2q)$, M_1, M_2, M_3 – додатні сталі, які не залежать від u, u^0, f, f^0.

Д о в е д е н н я. Нехай $R > 1$, $\tau \in (0,T]$, $\gamma > 2$ – довільні числа. Розглянемо функцію $\varphi_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{R}, |x| \leqslant R, \\ 0, |x| > R. \end{cases}$ Оскільки $\varphi_{R,x_i}(x) = -\frac{2x_i}{R}$, $\varphi_{R,x_ix_j}(x) = -\frac{2}{R}\delta_i^j$, $|x| \leqslant R$, $i,j = 1,...,n$, де δ_i^j – символ Кронекера, то правильні оцінки $\left|(\varphi_R^\gamma(x))_{x_i}\right| \leqslant 2\gamma\varphi_R^{\gamma-1}(x)$, $\left|(\varphi_R^\gamma(x))_{x_ix_j}\right| \leqslant 6\gamma^2\varphi_R^{\gamma-2}(x)$. Зауважимо також, що

$$R - |x| \leqslant \varphi_R(x) \leqslant 2(R - |x|). \quad (7)$$

Позначимо $w = u - u^0$. Покладемо $v = w_t\varphi_R^\gamma$ та віднімемо від інтегральної рівності (5) для функцій u, f відповідну інтегральну рівність для u^0, f^0, аналогічну до (5). Використовуючи умови леми та результати [24, теор. 2], робимо висновок, зокрема, що $w_{tt} \in L^2\left((0,T); L^2\left(\Omega^R\right)\right)$ для довільного $R > 1$. Тому одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[w_{tt}w_t + a_{00}(x,t)w_t^2 + b_{00}(x,t)ww_t\Big]\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha w_t D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n a_{1,i}(x,t)\left(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\right)\times$$

$$\times\left((u_t - u_t^0)\varphi_R^\gamma\right)_{x_i} dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\sum_{1\le|\alpha|=|\beta|\le 2} b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right) +$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|\le 2} c_\alpha(x,t)D^\alpha w w_t\varphi_R^\gamma\Big]dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\left(g(x,u_t) - g(x,u_t^0)\right)(u_t - u_t^0) -$$

$$-(f - f^0)w_t\Big]\varphi_R^\gamma dxdt = 0. \qquad (8)$$

Перетворимо інтеграли рівності (8). Зокрема, з умови **(P1)** випливає, що $V \subset H \subset V^*$, де $V = W_0^{1,p_1}\left(\Omega^R\right)$, $H = L^2(\Omega^R)$, причому простір V вкладений в H неперервно і щільно. Тому, застосовуючи формулу інтегрування частинами [23, с. 177, теор. 1.17], отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} w_{tt}w_t\varphi_R^\gamma dxdt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R} |w_t(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx.$$

Для наступних перетворень використаємо формулу Лейбніца похідної добутку функції багатьох змінних

$$D^\lambda(f_1f_2) = \sum_{\lambda^1\le\lambda} \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix} D^{\lambda^1}f_1 D^{\lambda-\lambda^1}f_2,$$

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda^1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_1^1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_n\\ \lambda_n^1\end{pmatrix},$$

причому підсумовування ведеться за всіма мультиіндексами $\lambda^1 = (\lambda_1^1, ..., \lambda_n^1)$ такими, що $0 \le \lambda_i^1 \le \lambda_i$ для всіх $i = 1, ..., n$. Таким чином, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha w_t D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha w_t D^\beta w_t\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} \sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta} \begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha w_t\times$$

$$\times D^\sigma w_t D^{\beta-\sigma}\varphi_R^\gamma dxdt + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha w_t\times$$

$$\times w_t D^\beta\varphi_R^\gamma dxdt = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3.$$

Інтеграли $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ оцінимо так:

$$\mathcal{I}_1 \geqslant a_{0,2}\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt;$$

$$\mathcal{I}_2 \leqslant a_2\delta_1\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\frac{C_1}{\delta_1}\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=1} |D^\alpha w_t|^2\varphi_R^{\gamma-2}R^{2\omega}dxdt,$$

$\delta_1 > 0$, додатна стала C_1 залежить від γ, a_2.

Використовуючи результати [17, с. 222], можемо отримати

$$\mathcal{I}_2 \leqslant \left(a_2\delta_1 + \frac{C_1\delta_2}{\delta_1}\right)\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+\frac{C_2}{\delta_1}\int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2\varphi_R^{\gamma-4}R^{4\omega}dxdt,$$

$\delta_2 > 0$, додатна стала C_2 залежить від γ, a_2, n, δ_2. Виберемо далі довільне число $q \in (2,p)$ та продовжимо оцінювання:

$$\int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2\varphi_R^{\gamma-4}R^{4\omega}dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma-4-\frac{2\gamma}{q}} \varphi_R^{\frac{2\gamma}{q}} R^{4\omega} dxdt \leq$$

$$\leq \delta_3 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^q \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ C_3(\delta_3) \int\limits_{Q_\tau^R} \left| \varphi_R^{\gamma-4-\frac{2\gamma}{q}} R^{4\omega} \right|^r dxdt,$$

$r = \frac{q}{q-2}$, $\delta_3 > 0$, $C_3 > 0$. Врахувавши очевидну нерівність $|w_t|^q \leq |w_t|^p + |w_t|^2$, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma-4} R^{4\omega} dxdt \leq \delta_3 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \delta_3 \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt + C_4 R^{\gamma+n+(\omega-1)\frac{4q}{q-2}},$$

причому додатна стала C_4 залежить від γ, T, n, δ_3.

Таким чином, одержимо для $\mathcal{I}_2$ оцінку

$$\mathcal{I}_2 \leqslant \left(a_2\delta_1 + \frac{C_1\delta_2}{\delta_1} \right) \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \frac{C_2\delta_3}{\delta_1} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \frac{C_2\delta_3}{\delta_1} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt + \frac{C_2C_4}{\delta_1} R^{\gamma+n+(\omega-1)\frac{4q}{q-2}}.$$

Оцінимо далі

$$\mathcal{I}_3 \leqslant a_2\delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \frac{C_5}{\delta_4} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma-4} R^{2\omega} dxdt,$$

$\delta_4 > 0$, додатна стала C_5 залежить від γ, a_2. Аналогічно до попередньої оцінки можна отримати

$$\mathcal{I}_3 \leqslant a_2\delta_4 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \frac{C_5\delta_5}{\delta_4} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^p \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \frac{C_5\delta_5}{\delta_4} \int\limits_{Q_\tau^R} |w_t|^2 \varphi_R^{\gamma} dxdt + C_6 R^{\gamma+n+(\omega-2)\frac{2q}{q-2}},$$

$\delta_5 > 0$, додатна стала C_6 залежить від γ, T, n, δ_5, a_2.

Продовжимо перетворення та оцінки інтегралів рівності (8):

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right) \times$$

$$\times \left((u_t - u_t^0)\varphi_R^{\gamma} \right)_{x_i} dxdt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i} - u^0_{tx_i} \right) \varphi_R^{\gamma} dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(x,t) \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right) \times$$

$$\times \left(u_t - u_t^0 \right) \varphi^{\gamma}_{R,x_i} dxdt = \mathcal{I}_4 + \mathcal{I}_5;$$

$$\mathcal{I}_4 \geq a^1 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i} - u^0_{tx_i} \right) \varphi_R^{\gamma} dxdt;$$

$$\mathcal{I}_5 \leq C_7(a_1, n, \gamma) \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \Big| |u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} -$$

$$- |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \Big| \left| u_t - u_t^0 \right| \varphi_R^{\gamma-1} dxdt =$$

$$= C_7 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left| |u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right| \times$$

$$\times \left| u_t - u_t^0 \right| \varphi_R^{\gamma-1-\frac{\gamma}{p_1'}+\frac{\gamma}{p_1'}} dxdt \leq$$

$$\leq C_7\delta_6 \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^{n} \left| |u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i} - |u^0_{tx_i}|^{p_1-2} u^0_{tx_i} \right|^{p_1'} \times$$

$$\times \varphi_R^{\gamma} dxdt + C_8(a_1, n, \gamma, \delta_6, p_1) \int\limits_{Q_\tau^R} \left| u_t - u_t^0 \right|^{p_1} \times$$

$$\times\varphi_R^{(\gamma-1-\frac{\gamma(p_1-1)}{p_1})p_1}dxdt \leq$$

$$\leq C_7\delta_6\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n\left||u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}-|u_{tx_i}^0|^{p_1-2}u_{tx_i}^0\right|\times$$

$$\times\left|u_{tx_i}-u_{tx_i}^0\right|\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+C_8\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t-u_t^0\right|^{p_1}\varphi_R^{\gamma-p_1}dxdt,$$

$a_1 = \max\limits_{i=1,\ldots,n}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|a_{1,i}(x,t)|$, $\delta_6>0$, $C_7>0$, $C_8>0$.

Застосовуючи нерівність Гельдера, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\left|u_t-u_t^0\right|^{p_1}\varphi_R^{\gamma-p_1}dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^{p_1}\varphi_R^{\gamma-p_1+\frac{p_1\gamma}{2}-\frac{p_1\gamma}{2}}dxdt\leq$$

$$\leq\delta_7\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+C_9(\delta_7,p_1)\int\limits_{Q_\tau^R}\left|\varphi_R^{\gamma-p_1-\frac{p_1\gamma}{2}}\right|^{\frac{2}{2-p_1}}dxdt\leq$$

$$\leq\delta_7\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{10}(\delta_7,p_1,n)R^{\gamma+n-\frac{2p_1}{2-p_1}},$$

$\delta_7>0, C_9>0, C_{10}>0$. Таким чином, одержимо оцінку

$$\mathcal{I}_5\leq C_7\delta_6\int\limits_{Q_\tau^R}\left||u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}-|u_{tx_i}^0|^{p_1-2}u_{tx_i}^0\right|\times$$

$$\times\left|u_{tx_i}-u_{tx_i}^0\right|\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+C_8\delta_7\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_8C_{10}R^{\gamma+n-\frac{2p_1}{2-p_1}}.$$

Крім того, можна отримати

$$\int\limits_{Q_\tau^R}a_{00}(x,t)|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt\geq-|a_0|\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt.$$

Перетворимо тепер

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha wD^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)dxdt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha wD^\beta w_t\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\sum_{|\sigma|=1,\ \sigma<\beta}\begin{pmatrix}\beta\\ \sigma\end{pmatrix}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w\times$$

$$\times D^\sigma w_tD^{\beta-\sigma}\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha ww_tD^\beta\varphi_R^\gamma dxdt=$$

$$=\mathcal{I}_6+\mathcal{I}_7+\mathcal{I}_8.$$

Оцінимо інтеграли $\mathcal{I}_6$, $\mathcal{I}_7$:

$$\mathcal{I}_6=\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=2}\left(b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha wD^\beta w\varphi_R^\gamma\right)_tdxdt\geq$$

$$\geq\frac{b_{0,2}}{2}\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx;$$

$$\mathcal{I}_7\leqslant b_2\delta_8\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+\frac{C_{11}}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^{\gamma-2}dxdt,$$

$\delta_8>0$, $b_2=\max\limits_{|\alpha|=|\beta|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{x\in\Omega}|b_{\alpha\beta}(x)|$, додатна стала C_{11} залежить від γ, b_2.

Знову використовуючи результати [17], можемо отримати

$$\mathcal{I}_7\leqslant b_2\delta_8T\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx+$$

$$+\frac{C_{11}\delta_9}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+\frac{C_{12}}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^{\gamma-4}dxdt,$$

$\delta_9 > 0$, додатна стала C_{12} залежить від γ, b_2, n, δ_9. Міркуючи аналогічно до того, як отримано оцінку інтеграла $\mathcal{I}_2$, завершимо оцінювання інтеграла $\mathcal{I}_7$:

$$\mathcal{I}_7 \leqslant b_2\delta_8 T\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx + \\ + \frac{C_{11}\delta_9}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{C_{12}\delta_{10}}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{C_{12}\delta_{10}}{\delta_8}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \frac{C_{12}C_{13}}{\delta_8}R^{\gamma+n-\frac{4q}{q-2}},$$

$\delta_{10} > 0$, додатна стала C_{13} залежить від γ, δ_{10}, n, T.

Оцінимо тепер

$$\mathcal{I}_8 \leqslant b_2\delta_{11} T\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx + \\ + \frac{C_{14}\delta_{12}}{\delta_{11}}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{C_{14}\delta_{12}}{\delta_{11}}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + C_{15}R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$\delta_{11} > 0$, $\delta_{12} > 0$, стала $C_{14} > 0$ залежить від γ, b_2, n, стала $C_{15} > 0$ залежить від γ, δ_{12}, n, T.

Крім того, одержимо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w D^\beta\left(w_t\varphi_R^\gamma\right)dxdt = \\ = \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w D^\beta w_t\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w w_t D^\beta\varphi_R^\gamma dxdt = \mathcal{I}_9 + \mathcal{I}_{10};$$

$$\mathcal{I}_9 = \int\limits_{Q_T^R}\sum_{|\alpha|=1}b_{\alpha\beta}(x)D^\beta w_t D^\alpha\Big[\int\limits_0^\tau w_t(x,t)dt\Big]\times \\ \times\varphi_R^\gamma dxdt \leq \frac{b_1 T}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=1}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt \leq \\ \leq \frac{b_1 T}{2}\Big[\delta_{13}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \frac{1}{\delta_{13}}\times \\ \times\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + C_{16}(\gamma)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^{\gamma-2}dxdt\Big] \leq \\ \leq \frac{b_1 T}{2}\Big[\delta_{13}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{1}{\delta_{13}}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt\Big] + C_{16}(\gamma)\frac{b_1 T}{2}\times \\ \times\Big[\delta_{14}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \delta_{14}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + C_{17}R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}}\Big] = \\ = \frac{b_1 T\delta_{13}}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \frac{b_1 T}{2}\Big(\frac{1}{\delta_{13}} + \\ + C_{16}(\gamma)\delta_{14}\Big)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{b_1 T C_{16}(\gamma)\delta_{14}}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + \frac{b_1 T C_{16}(\gamma) C_{17}}{2}R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$b_1 = \max\limits_{|\alpha|=|\beta|=1}\operatorname{esssup}\limits_{x\in\Omega}|b_{\alpha\beta}(x)|$, $\delta_{13}>0$, $\delta_{14}>0$, $C_{16}> 0$, стала $C_{17}> 0$ залежить від γ, T, n, δ_{14}, b_1.

Інтеграл $\mathcal{I}_{10}$ оцінимо так:

$$\mathcal{I}_{10} \leq T\int\limits_{Q_T^R}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}b_{\alpha\beta}(x)D^\alpha w_t w_t D^\beta\varphi_R^\gamma dxdt \leq \\ \leq b_1 T\delta_{15}\delta_{16}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt + \\ + b_1 T\delta_{15}\delta_{17}\left(C_{18} + C_{19}(\gamma)\right)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt +$$

$$+b_1T\delta_{15}\delta_{17}\Big(C_{18}+C_{19}(\gamma)+\frac{1}{\delta_{16}}\Big)\times$$
$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{20}R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$\delta_{15}>0$, $\delta_{16}>0$, $\delta_{17}>0$, $C_{19}>0$, додатна стала C_{18} залежить від γ, δ_{15}, додатна стала C_{20} залежить від γ, T, n, b_1, δ_{15}, δ_{17}.

Оцінимо тепер

$$\int\limits_{Q_\tau^R}b_{00}(x,t)ww_t\varphi_R^\gamma dxdt=\int\limits_{Q_\tau^R}b_{00}(x,t)\times$$
$$\times\left[\int\limits_0^\tau w_t(x,t)dt\right]w_t\varphi_R^\gamma dxdt\le b_0T\times$$
$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt,\quad b_0=\operatorname*{esssup}_{(x,t)\in Q_T}|b_{00}(x,t)|.$$

Крім того, отримаємо

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}c_\alpha(x,t)D^\alpha ww_t\varphi_R^\gamma dxdt\le\frac{c_2n}{2}\times$$
$$\times\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\varphi_R^\gamma dxdt+\frac{c_2}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt,$$

де $c_2=\max\limits_{|\alpha|=2}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|c_\alpha(x,t)|$.

Міркуючи подібно до того, як це зроблено при оцінюванні $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_9$, можна отримати

$$\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha(x,t)D^\alpha ww_t\varphi_R^\gamma dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=1}c_\alpha(x,t)D^\alpha\left[\int\limits_0^\tau w_t(x,t)dt\right]w_t\varphi_R^\gamma dxdt\le$$
$$\le c_1T\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=1}D^\alpha w_tw_t\varphi_R^\gamma dxdt\le$$
$$\le c_1T\delta_{18}\delta_{19}\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$
$$+C_{21}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+C_{22}\delta_{20}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt+$$
$$+C_{23}R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}},$$

$c_1=\max\limits_{|\alpha|=1}\operatorname*{esssup}\limits_{(x,t)\in Q_T}|c_\alpha(x,t)|$, $\delta_{18}>0$, $\delta_{19}>0$, $\delta_{20}>0$, стала $C_{21}>0$ залежить від c_1, T, δ_{18}, δ_{19}, δ_{20}, γ, стала $C_{22}>0$ залежить від c_1, T, δ_{18}, δ_{19}, γ, стала $C_{23}>0$ залежить від c_1, T, δ_{18}, δ_{19}, δ_{20}, γ, n.

Завершимо оцінювання інтегралів рівності (8):

$$\int\limits_{Q_\tau^R}(g(x,u_t)-g(x,u_t^0))(u_t-u_t^0)\varphi_R^\gamma dxdt\geqslant$$
$$\geqslant g_0\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt;$$
$$\int\limits_{Q_\tau^R}(f-f^0)w_t\varphi_R^\gamma dxdt\leqslant\delta_{21}\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt+$$
$$+C_{24}\int\limits_{Q_\tau^R}\left|f-f^0\right|^{p'}\varphi_R^\gamma dxdt,$$

δ_{21} – довільна додатна стала, C_{24} – деяка додатна стала, що залежить від p, δ_{21}.

Враховуючи наведені вище оцінки, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^R}|w_t(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx+2\Big(a_{0,2}-a_2\delta_1-\frac{C_1\delta_2}{\delta_1}-$$
$$-a_2\delta_4-\frac{C_{11}\delta_9}{\delta_8}-\frac{b_1T\delta_{13}}{2}-b_1T\delta_{15}\delta_{16}-$$
$$-c_1T\delta_{18}\delta_{19}\Big)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+\big(b_{0,2}-$$
$$-2b_2\delta_8T-2b_2\delta_{11}T\big)\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\varphi_R^\gamma dx+2\Big(g_0-\frac{C_2\delta_3}{\delta_1}-$$
$$-\frac{C_5\delta_5}{\delta_4}-\frac{C_{12}\delta_{10}}{\delta_8}-\frac{C_{14}\delta_{12}}{\delta_{11}}-\frac{b_1TC_{16}\delta_{14}}{2}-\delta_{21}-$$
$$-b_1T\delta_{15}\delta_{17}(C_{18}+C_{19})-C_{22}\delta_{20}\Big)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^p\varphi_R^\gamma dxdt+$$

$$+2(a^1-C_7\delta_6)\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\Big(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}-$$
$$-|u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\Big)\Big(u_{tx_i}-u^0_{tx_i}\Big)\varphi_R^\gamma dxdt\le$$
$$\le c_2 n\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$
$$+2\bigg(\frac{C_2\delta_3}{\delta_1}+\frac{C_5\delta_5}{\delta_4}+\frac{C_{12}\delta_{10}}{\delta_8}+\frac{C_{14}\delta_{12}}{\delta_{11}}+C_8\delta_7+$$
$$+\frac{b_1T}{2}\big(\frac{1}{\delta_{13}}+C_{16}\delta_{14}\big)+b_1T\delta_{15}\delta_{17}\big(C_{18}+C_{19}+$$
$$+\frac{1}{\delta_{16}}\big)+|a_0|+b_0T+C_{21}+\frac{c_2}{2}\bigg)\int\limits_{Q_\tau^R}|w_t|^2\varphi_R^\gamma dxdt+$$
$$+\frac{2C_2C_4}{\delta_1}R^{\gamma+n+(\omega-1)\frac{4q}{q-2}}+2C_6R^{\gamma+n+(\omega-2)\frac{2q}{q-2}}+$$
$$+\frac{2C_{12}C_{13}}{\delta_8}R^{\gamma+n-\frac{4q}{q-2}}+\big(2C_{15}+b_1TC_{16}C_{17}+$$
$$+2C_{20}+2C_{23}\big)R^{\gamma+n-\frac{2q}{q-2}}+2C_8C_{10}R^{\gamma+n-\frac{2p_1}{2-p_1}}+$$
$$+2C_{24}\int\limits_{Q_\tau^R}\big|f-f^0\big|^{p'}\varphi_R^\gamma dxdt.$$

Послідовно вибираючи належним чином достатньо малі сталі $\delta_1-\delta_{21}$, можна отримати $a_{0,2}-a_2\delta_1-\dfrac{C_1\delta_2}{\delta_1}-a_2\delta_4-\dfrac{C_{11}\delta_9}{\delta_8}-\dfrac{b_1T\delta_{13}}{2}-b_1T\delta_{15}\delta_{16}-c_1T\delta_{18}\delta_{19}>0$, $b_{0,2}-2b_2\delta_8T-2b_2\delta_{11}T>0$, $g_0-\dfrac{C_2\delta_3}{\delta_1\delta_2}-\dfrac{C_5\delta_5}{\delta_4}-\dfrac{C_{12}\delta_{10}}{\delta_8\delta_9}-\dfrac{C_{14}\delta_{12}}{\delta_{11}}-\dfrac{b_1TC_{16}\delta_{14}}{2}-b_1T\delta_{15}\delta_{17}(C_{18}+C_{19})-C_{22}\delta_{20}-\delta_{21}>0$, $a^1-C_7\delta_6>0$. Позначивши
$$y(\tau)=\int\limits_{\Omega^R}\Big[|w_t(x,\tau)|^2+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\Big]\varphi_R^\gamma dx,$$
з останньої нерівності одержимо оцінку
$$y(\tau)\le C_{25}(R)+C_{26}\int\limits_0^\tau y(t)dt,$$
де $C_{25}(R)$, C_{26} – деякі додатні сталі, що не залежать від w, причому C_{26} не залежить від R. Тоді на підставі леми Гронуола робимо висновок: $\int\limits_{\Omega^R}\Big[|w_t(x,\tau)|^2+\sum\limits_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\Big]\varphi_R^\gamma dx\le C_{25}(R)e^{C_{26}T}$. Оцінка (7) забезпечує, що $R-|R_0|\leqslant\varphi_R(x)\leqslant 2R$ для довільного $R_0<R$. Тому після проведених вище оцінок отримаємо
$$\Big(R-R_0\Big)^\gamma\Big[\int\limits_{\Omega^{R_0}}\Big(|w_t(x,\tau)|^2+$$
$$+\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w(x,\tau)|^2\Big)dx+$$
$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_0}}\Big(\sum_{|\alpha|=2}|D^\alpha w_t|^2+|w_t|^p\Big)dxdt\Big]+$$
$$+(R-R_0)^\gamma\int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^{n}\Big(|u_{tx_i}|^{p_1-2}u_{tx_i}-$$
$$-|u^0_{tx_i}|^{p_1-2}u^0_{tx_i}\Big)\big(u_{tx_i}-u^0_{tx_i}\big)\,dxdt\leqslant$$
$$\leqslant C_{27}R^{n+\gamma-\frac{\beta}{q-2}}+C_{28}R^{n+\gamma-\frac{2p_1}{2-p_1}}+$$
$$+C_{29}R^\gamma\int\limits_{Q_\tau^R}\big|f-f^0\big|^{p'}dxdt \qquad (9)$$
для довільних τ,R,R_0 таких, що $1<R_0<R$, $\tau\in(0,T]$, де C_{27}, C_{28}, C_{29} – додатні сталі, що залежать лише від n, p, p_1, γ, q та коефіцієнтів рівняння (1) і не залежать від u, u^0, f, f^0. З нерівності (9) легко одержати (6). Лему доведено.

Теорема. Нехай виконуються умови **(A2), (A1), (B), (C), (G), (F), (U), (P1)**. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(4) в Q_T.

Д о в е д е н н я. *Існування.* Виберемо послідовність областей $\{\Omega^k\}$, $k=2,3,...$ таку, що $\bigcup\limits_k\Omega^k=\Omega$. Позначимо $S_T^k=\partial\Omega^k\times(0,T)$, $f^k(x,t)=\begin{cases}f(x,t),\ |x|\leqslant k,\\ 0,\ |x|>k,\end{cases}$ $u_0^k(x)=u_0(x)\xi_k(x)$, $u_1^k(x)=u_1(x)\xi_k(x)$, причому $\xi_k\in C^4(\mathbb{R}^n)$, $\xi_k(x)=\begin{cases}1,\ |x|\leqslant k-1,\\ 0,\ |x|>k,\end{cases}$ $0\leqslant\xi_k(x)\leqslant 1$. Зрозуміло, що $u_0^k\in H_0^2(\Omega^k)\cap H^4(\Omega^k)$, $u_0^k\to u_0$ сильно в $H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\cap H^4_{loc}(\overline{\Omega})$,

$u_1^k \in H_0^2(\Omega^k) \cap H^4(\Omega^k) \cap L^{2p-2}(\Omega^k)$, $u_1^k \to u_1$ сильно в $H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap H^4_{loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2p-2}_{loc}(\overline{\Omega})$, $k \to \infty$. Розглянемо в Q_T^k мішану задачу:

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D^\beta \Big(a_{\alpha\beta}(x,t) D^\alpha u_t \Big) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \Big(a_{1,i}(x,t) \left| u_{tx_i} \right|^{p_1-2} u_{tx_i} \Big)_{x_i} + a_{00}(x,t) u_t +$$

$$+ \sum_{1 \le |\alpha|=|\beta| \le 2} (-1)^{|\alpha|} D^\beta \left(b_{\alpha\beta}(x) D^\alpha u \right) + b_{00}(x,t) u +$$

$$+ g(x, u_t) + \sum_{1 \le |\alpha| \le 2} c_\alpha(x,t) D^\alpha u = f^k(x,t), \quad (10)$$

$$u|_{t=0} = u_0^k(x), \quad (11)$$

$$u_t|_{t=0} = u_1^k(x), \quad (12)$$

$$u|_{S_T^k} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{S_T^k} = 0. \quad (13)$$

На підставі [24, теор. 2] можна стверджувати: існує єдиний узагальнений розв'язок u^k задачі (10)–(13) в Q_T^k такий, що $u^k \in C([0,T]; H_0^2(\Omega^k))$, $u_t^k \in C\left([0,T]; L^2\left(\Omega^k\right)\right) \cap L^2\left((0,T); H_0^2(\Omega^k)\right) \cap L^p\left((0,T); L^p\left(\Omega^k\right)\right)$, $u_{tt}^k \in L^2\left((0,T); L^2(\Omega^k)\right)$. Розглянемо тепер послідовність задач вигляду (10)–(13) для $k=2$, $k=3$,..., довизначивши u^k нулем на $Q_T \backslash Q_T^k$. Покажемо, що $\{u^k\}$ – фундаментальна послідовність в просторі $C([0,T]; H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а $\{u_t^k\}$ – фундаментальна в просторі $C\left([0,T]; L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap L^2\left((0,T); H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T); L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. В області Q_τ^R розглянемо різницю $u^l - u^m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $R > R_0$ та використаємо доведену вище лему. Аналогічно до (6) отримаємо

$$\int_{\Omega^{R_0}} \Big[\left| u_t^l(x,\tau) - u_t^m(x,\tau) \right|^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \left| D^\alpha \left(u^l(x,\tau) - u^m(x,\tau) \right) \right|^2 \Big] dx +$$

$$+ \int_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}^l|^{p_1-2} u_{tx_i}^l - |u_{tx_i}^m|^{p_1-2} u_{tx_i}^m \right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i}^l - u_{tx_i}^m \right) dxdt +$$

$$+ \int_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \left| D^\alpha \left(u_t^l - u_t^m \right) \right|^2 + \left| u_t^l - u_t^m \right|^p \Big] dxdt \le$$

$$\le \left(\frac{R}{R-R_0} \right)^\gamma C_{30} R^{n - \frac{\beta}{q-2}} +$$

$$+ \left(\frac{R}{R-R_0} \right)^\gamma C_{31} R^{n - \frac{2p_1}{2-p_1}} +$$

$$+ C_{32}(R) \left\| u_0^l - u_0^m \right\|_V^2 +$$

$$+ \left(\frac{R}{R-R_0} \right)^\gamma \Big(C_{33} \left\| u_1^l - u_1^m \right\|^2_{V \cap L^{2p-2}(\overline{\Omega})} +$$

$$+ C_{34} \left\| f^l - f^m \right\|^{p'}_{L^{p'}\left((0,T); L^{p'}(\overline{\Omega})\right)} \Big), \quad (14)$$

де $V = H^4\left(\overline{\Omega}\right) \cap H_0^2\left(\overline{\Omega}\right)$, C_{30}, C_{31}, C_{32}, C_{33}, C_{34} – додатні сталі, що залежать від n, p, γ, q, p_1 та коефіцієнтів рівняння (10). Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале число. Оскільки $\lim\limits_{q \to 2+0} \dfrac{1}{q-2} = +\infty$, то існує таке $\beta_0 \le \beta$, що $n < \dfrac{\beta_0}{q-2}$. Оскільки, крім того, $\lim\limits_{R \to +\infty} \left(\dfrac{R}{R-R_0} \right)^\gamma = 1$, то існує таке $R_1 > R_0$, що $C_{30} \left(\dfrac{R_1}{R_1 - R_0} \right)^\gamma R_1^{n - \frac{\beta_0}{q-2}} < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Зазначимо, що з умови **(P1)** випливає існування такого $R_2 > R_0$, що $\left(\dfrac{R_2}{R_2 - R_0} \right)^\gamma C_{31} R_2^{n - \frac{2p_1}{2-p_1}} < \dfrac{\varepsilon}{5}$. Позначимо тепер $R^1 = \max\{R_1, R_2\}$. Враховуючи збіжності послідовностей $\{f^k\}$, $\{u_0^k\}$ і $\{u_1^k\}$ у відповідних функційних просторах, можемо вибрати таке $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > [R^1] + 1$, що для всіх $l, m > k_0$ правильні оцінки

$$\left(\frac{R^1}{R^1 - R_0} \right)^\gamma C_{33} \left\| f^l - f^m \right\|^{p'}_{L^{p'}\left((0,T); L^{p'}(\Omega^{R^1})\right)} < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$C_{31}(R^1) \left\| u_0^l - u_0^m \right\|^2_{V(\Omega^{R_1})} < \frac{\varepsilon}{5}, \left(\frac{R^1}{R^1 - R_0} \right)^\gamma \times$$

$$\times C_{32} \left\| u_1^l - u_1^m \right\|^2_{V(\Omega^{R_1}) \cap L^{2p-2}\left(\Omega^{R^1}\right)} < \frac{\varepsilon}{5},$$

де $V(\Omega^{R_1}) = H^4\left(\Omega^{R_1}\right) \cap H_0^2\left(\Omega^{R_1}\right)$. Таким чином, з нерівності (14) випливає: для довільного фіксованого $R_0 > 1$ та довільного як завгодно малого $\varepsilon>0$ існує таке $k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, що

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}} \Big[|u_t^l(x,\tau) - u_t^m(x,\tau)|^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u^l(x,\tau) - u^m(x,\tau)\right)\right|^2\Big]dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}^l|^{p_1-2}u_{tx_i}^l - |u_{tx_i}^m|^{p_1-2}u_{tx_i}^m\right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i}^l - u_{tx_i}^m\right) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u_t^l - u_t^m\right)\right|^2 dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \left|u_t^l - u_t^m\right|^p dxdt < \varepsilon$$

для довільних $l, m > k_0$, $\tau \in [0,T]$. Отже, враховуючи довільність R_0, одержимо, що $\{u^k\}$, $\{u_t^k\}$ – фундаментальні послідовності відповідно в просторах $C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$ та $C\left([0,T];L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap \quad L^2\left((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. Таким чином, послідовність $\{u^k\}$ збігається до u в просторі $C([0,T];H^2_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, а $\{u_t^k\}$ збігається до u_t в $C\left([0,T];L^2_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right) \cap L^2\left((0,T);H^2_{0,loc}(\overline{\Omega})\right) \cap L^p\left((0,T);L^p_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. При цьому для функції u виконується умова (2). Зі сильної збіжності $\{u_t^k\}$ до u_t легко отримати [25, с. 25, лема 1.3], що $g(x,t,u_t^k) \to g(x,t,u_t)$ слабко в $L^{p'}((0,T);L^{p'}_{loc}(\overline{\Omega}))$. Зауважимо також, що аналогічно до нерівності (6), приймаючи $u_{tx_i} \equiv u^k_{tx_i}$, $u^0_{tx_i} \equiv 0$, можна одержати оцінку $\int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \sum\limits_{i=1}^{n} \left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1} dxdt \le C_{34}$, $C_{34} > 0$, з якої на підставі сильної збіжності маємо $\left(\left|u^k_{tx_i}\right|^{p_1-2} u^k_{tx_i}\right)_{x_i} \to \left(|u_{tx_i}|^{p_1-2} u_{tx_i}\right)_{x_i}$ слабко в $L^{p_1'}\left((0,T);W^{-1,p_1'}_{loc}\left(\overline{\Omega}\right)\right)$. Таким чином, u задовольняє (5), тобто є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4).

Єдиність. Розглянемо два довільних розв'язки u^1 та u^2 задачі (1)–(4). Подібно до (6) можна отримати оцінку

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}} \Big[\left|u_t^1(x,\tau) - u_t^2(x,\tau)\right|^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u^1(x,\tau) - u^2(x,\tau)\right)\right|^2\Big]dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}^1|^{p_1-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p_1-2}u_{tx_i}^2\right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i}^1 - u_{tx_i}^2\right) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u_t^1 - u_t^2\right)\right|^2 +$$

$$+ \left|u_t^1 - u_t^2\right|^p\Big]dxdt \leqslant \left(\frac{R}{R-R_0}\right)^\gamma \times$$

$$\times \left(M_1 R^{n-\frac{\beta}{q-2}} + M_2 R^{n-\frac{2p_1}{2-p_1}}\right)$$

для довільних τ, R, R_0 таких, що $1 < R_0 < R$, $\tau \in [0,T]$. Аналогічно, як при доведенні фундаментальності, одержуємо, спрямувавши $R \to +\infty$, що

$$\int\limits_{\Omega^{R_0}} \Big[\left|u_t^1(x,\tau) - u_t^2(x,\tau)\right|^2 +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u^1(x,\tau) - u^2(x,\tau)\right)\right|^2\Big]dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \sum_{i=1}^{n} \left(|u_{tx_i}^1|^{p_1-2}u_{tx_i}^1 - |u_{tx_i}^2|^{p_1-2}u_{tx_i}^2\right) \times$$

$$\times \left(u_{tx_i}^1 - u_{tx_i}^2\right) dxdt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_0}} \Big[\sum_{|\alpha|=2} \left|D^\alpha\left(u_t^1 - u_t^2\right)\right|^2 +$$

$$+ \left|u_t^1 - u_t^2\right|^p\Big]dxdt \leqslant 0$$

для довільного фіксованого $R_0 > 1$. Отже, $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_T^{R_0}$. Довільність R_0 завершує доведення єдиності. Теорему доведено.

Проблема встановлення описаних вище класів коректності мішаної задачі обумовлена як з огляду практичного застосування, так й з точки зору теоретичного вивчення різних крайових задач теорії пружності. Плануємо розглянути в подальших дослідженнях питання існування єдиного узагальненого розв'язку мішаної задачі для рівняння типу коливань балки з нелінійністю у старших похідних в необмеженій області.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Gu R.J., Kuttler K.L., Shillor M.* Frictional wear of a thermoelastic beam // Journ. Math. Anal. And Appl.– **242.**– 2000.– P. 212 – 236.

2. *Strömberg N., Johansson L., Klarbring A.* Derivation and analysis of a generalized standard model for a contact friction and wear // Intern. Journ. Solids Structures – **13.**– 1996.– P. 1817 – 1836.

3. *Andrews K.T., Shillor M., Wright S.* On the dynamic vibrations of an elastic beam in frictional contact with a rigid obstacle // Journ. Elasticity – **42.**– 1996.– P. 1 – 30.

4. *Martins J.A.C., Oden J.T.* Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with normal and friction interface laws // Nonlin. Anal.– **11.**– 1987.–P. 407–428.

5. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Смешанная задача для уравнения распространения возмущений в вязких средах в неограниченных областях // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1988, № 11.– С. 28 – 31.

6. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Существование растущих на бесконечности обобщенных решений смешанной задачи для некоторых эволюционных уравнений // Доп. АН УРСР. – Сер. А. – 1989, № 12.– С. 20 – 23.

7. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Классы единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях // Сиб. матем. журн. – 1991. – **32**.– С. 166 – 178.

8. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Принцип Фрагмена–Линделефа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка // Укр. матем. журн.– **57**.– 2005, № 2.– С. 239 – 249.

9. *Hoshino K.* On a construction of weak solutions to semilinear dissipative hyperbolic systems with the higher integrable gradients // Nonlin. Anal. – **38.**– 1999.– P. 813 – 826.

10. *Ohta M., Takamura H.* Remarks on the blow – up boundaries and rates for nonlinear wave equations // Nonlin. Anal.– **33.**– 1998.– P. 693 – 698.

11. *Li M.–R., Tsai L–Y.* Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations // Nonlin. Anal.– **54.**– 2003.– P. 1397 – 1415.

12. *Agre K., Rammaha M.A.* Global solutions to boundary value problems for a nonlinear wave equation in high space dimensions // Diff. And Integr. Equat.– **14**.– 2001.– P. 1315 – 1331.

13. *Dragieva N.A.* A hyperbolic equation with two space variables with strong nonlinearity // Godishnik Vish. Uchebn. Zaved. Prilozhna Mat.– **23**.– 1987, № 4.– P. 95 – 106.

14. *Pecher H.* Sharp existence results for self – similar solutions of semilinear wave equations // Nonlin. Diff. Equat. And Appl.– **7**.– 2000.– P. 323 – 341.

15. *Todorova G., Yordanov B.* Critical exponent for a nonlinear wave equations with damping // Journ. Diff. Equat.– **174**. – 2001.– P. 464 – 489.

16. *Ohta M.* Blowup for systems of semilinear wave equations in low space dimensions // Journ. Math. Anal. And Appl.– **240.**– 1999.– P. 340 – 360.

17. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity // Arch. Ration. Mech. Anal.– **106**.– 1989, № 3.– P. 217 – 241.

18. *Бокало Н.М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений // Труды сем. им. И.Г. Петровского. – 1989. – Вып. **14**. – С. 3–44.

19. *Majdoub M.* Qulitative study of the critical wave equation with a subcritical perturbation // Journ. Math. Anal. And Appl.– **301.**– 2005.– P. 354 – 365.

20. *Лавренюк С.П., Оліскевич М.О.* Метод Гальоркіна для гіперболічних систем першого порядку з двома незалежними змінними // Укр. матем. журн.– **54**.– 2002, № 10.– С. 1356 – 1370.

21. *Пукач П.Я.* Мішана задача в необмеженій за просторовими змінними області для нелінійної гіперболічної системи другого порядку // Вісн. Львів. ун – ту. Сер.мех.–мат. – Вип. 64.– 2005. – С. 218 – 235.

22. *Лавренюк С.П., Пукач П.Я.* Варіаційна гіперболічна нерівність у необмежених за просторовими змінними областях // Доп. НАН України. Сер. матем., природозн. і техн. науки. – 2006, № 2. – С. 30 – 35.

23. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.– Москва: Мир, 1978.

24. *Пукач П.Я.* Мішана задача для сильно нелінійного рівняння типу коливань балки в обмеженій області // Прикл. проблеми мех. та матем. – 2006. *(в друці)*

25. *Лионс Ж.–Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.– Москва: Эдиториал УРСС, 2002.

Стаття надійшла до редколегії 07.09.2006