УДК 517.956

©2006 р. І.Д.Пукальський

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ТА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У просторах класичних функцій з степеневою вагою доведенно коректну розв'язність задачі Діріхле для лінійних параболічних рівнянь з довільним степеневим порядком виродження коефіцієнтів за часовою та просторовими змінними. Знайдено оцінку розв'язку задачі у відповідних просторах. Розглянуто задачу вибору оптимального керування системою, яка описується нелокальною задачею Діріхле з обмеженним керуванням. Функціонал якості задається об'ємним інтегралом.

Correct solvability of Dirichlet's problem in the spaces of classical functions has been established for parabolic equations under nonlocal condition for the time variable and arbitrary power order of coefficients with respect to the times variable and space variable. The problem of choice of optimal control by system circumscribed by Dirichlet's problem with limited control is examined. The quality functional is determined by the volume integral.

В книзі [1] побудовано теорію класичних розв'язків задачі Коші та крайових задач у просторах максимально широких класів функцій для нерівномірно параболічних і B-параболічних рівнянь, які мають особливості обмеженого порядку на межі області.

Коректній розв'язності крайових задач з нелокальною умовою за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями на межі області присвячено праці [2, 3].

Тут за допомогою принципу максимуму і апріорних оцінок досліджується перша крайова задача з нелокальною умовою за часовою змінною для лінійних параболічних рівнянь другого порядку без обмеження на степеневий порядок виродження коефіцієнтів за всіма змінними, а також встановлено необхідні і достатні умови існування оптимального розв'язку системи, що описується нелокальною задачею Діріхле. Критерій якості задається об'ємним інтегралом.

Постановка задачі і основний результат. Нехай D - обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = (0,T] \times D$ задачу знаходження функції u, яка задовольняє в $Q^{(0)} = Q \setminus \{\{(t,x) \in Q \,|\, t = t^{(0)} \in (0,T), x \in D\} \bigcup \{(t,x) \in Q \,|\, t \in (0,T], x = x^{(0)} \in D\}\}$ рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \Big[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} A_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^{n} A_i(t,x)\partial_{x_i} - A_0(t,x)\Big] u(t,x) = \\ = f(t,x) \qquad (1)$$

і нелокальну умову

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x)u(t_j,x) = \varphi(x), \qquad (2)$$

а на бічній межі $\Gamma = (0,T] \times \partial D$ крайову умову

$$u|_{\Gamma} = \psi(t,x). \qquad (3)$$

де $0 < t_1 < ... < t_N \le T, t_j \ne t^{(0)}$.

Особливості коефіцієнтів диференціального виразу L будуть характеризувати такі функції: $s_1(l_1,t) = |t - t^{(0)}|^{l_1}$ при $|t - t^{(0)}| \le 1$, $s_1(l_1,t) = 1$ при $|t - t^{(0)}| \ge 1$; $s_2(l_2,x) = |x - x^{(0)}|^{l_2}$ при $|x - x^{(0)}| \le 1$, $s_2(l_2,x) = 1$ при $|x - x^{(0)}| \ge 1$; $s(l;P) = s_1(l_1,t)s_2(l_2,x)$;

$$|x - x^{(0)}| = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{(0)})\right]^{1/2}.$$

Позначимо через l_ν, $\beta_k^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_i^{(\nu)}$, α – дійсні числа, $\nu \in \{1,2\}$, $l_\nu \geq 0$, $\beta_k^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\mu_i^{(\nu)} \geq 0$, $\gamma^{(\nu)} \geq 0$, $i \in \{0,\dots,n\}$, $k \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha \in (0,1)$, r – довільне число, $[r]$ – ціла частина числа r, $\beta = \{\beta_1, ..., \beta_n\}, \gamma = \{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}\}, \beta_j = \{\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}\}, l = \{l_1, l_2\}$. Означимо функціональні простори, в яких досліджується задача.

$C^r(\gamma, \beta; l; Q)$ – простір неперервних функцій u, $(t,x) \in \overline{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_t^k \partial_x^j u$, $2k + |j| \leq [r]$, для яких є скінченною норма

$$\|u; \gamma, \beta; l; Q\|_r = \|u; \gamma, \beta; l; Q\|_{[r]} +$$

$$+ [\![u; \gamma, \beta; l; Q]\!]_r,$$

де, наприклад,

$$\|u; \gamma, \beta; l; Q\|_2 = \sup_{P \in \overline{Q}} [s(l; P)|u(P)|] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sup_{P \in Q} [s(l + \gamma - \beta_i; P)|\partial_{x_i} u(P)|] +$$

$$+ \sum_{ij=1}^{n} \sup_{P \in \overline{Q}} [s(l + 2\gamma - \beta_i - \beta_j; P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(P)|] +$$

$$+ \sup_{P \in \overline{Q}} [s(l + 2\gamma; P)|\partial_t u(P)|].$$

$C^r(\mu_i; Q)$ – множина функцій u_i, $(t,x) \in \overline{Q}$, які мають частинні неперервні похідні в $Q^{(0)}$ вигляду $\partial_x^k u_i$, $|k| \leq [r]$, для яких є скінченною норма

$$\|u_i; \mu_i; Q\|_r = \|u_i; \mu_i; Q\|_{[r]} + [\![u_i; \mu_i; Q]\!]_r,$$

де, наприклад,

$$\|u_i; \mu_i; Q\|_{[r]} = \sum_{|j| \leq [r]} \sup_{P \in \overline{Q}} [s(\mu_i + |j|; P)|\partial_x^j u_i(P)|.$$

Повністю означення просторів наведено у [4].

Нехай для задачі (1) - (3) виконуються умови:

1^0. Коефіцієнти $A_i \in C^\alpha(\mu_i, Q)$, $i \in \{0,\dots,n\}$, $A_0 \leq K < \infty$, K – const, $A_{ij} \in C^\alpha(\beta_i + \beta_j, Q)$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; P) A_{ij}(P) \xi_i \xi_j \leq \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі.

2^0. Функції $f \in C^\alpha(\gamma, \beta; \mu_0; Q)$, $\varphi \in C^{2+\alpha}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D)$, $\psi \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\gamma^{(\nu)} = \max\left(\max_i (1 + \beta_i^{(\nu)}); \max_i (\mu_i^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)}); \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2} \right)$, $\nu \in \{1,2\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $q_i(x) \in C^{2+\alpha}(D)$,

$$\left(\psi(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) \psi(t_j, x) \right)\Bigg|_{\partial D} = \varphi(x)|_{\partial D},$$

$$\Big(\partial_x \psi(0,x) + \sum_{j=1}^{N} \big[q_j(x) (\partial_t \psi(t_j, x) - f(t_j, x)) +$$

$$+ \big(\sum_{ik=1}^{n} A_{ik}(0,x) \partial_{x_i} + \sum_{k=1}^{n} A_k(0,x) \big) \times$$

$$\times (\psi(t_j, x) \partial_{x_k} q_j(x)) \big] \Big)\Big|_{x \in \partial D} =$$

$$= \Big[\Big(\sum_{ik=1}^{N} A_{ik}(0,x) \partial_{x_i} \partial_{x_k} + \sum_{i=1}^{n} A_i(0,x) \partial_{x_i} +$$

$$+ A_0(0,x) \Big) \varphi(x) + f(0,x) \Big] \Big|_{x \in \partial D}.$$

3^0. Межа ∂D належить класу $C^{2+\alpha}$, $\sup_{\overline{D}} \sum_{j=1}^{N} |q_j(x)| e^{-\lambda t_j} \leq \lambda_0 < 1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < \inf_{\overline{Q}} (-A_0(t,x))$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1) - (3) виконані умови* 1^0 – 3^0. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3) в просторі* $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\|u; \gamma, \beta; 0; Q\|_{2+\alpha} \leq c \Big(\|f; \gamma, \beta; \mu_0; Q\|_\alpha +$$

$$+ \|\varphi; \tilde{\gamma}, \tilde{\beta}; 0; D\|_{2+\alpha} + \|\psi\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)} \Big). \quad (4)$$

Для доведення теореми 1 побудуємо послідовність розв'язків крайових задач з гладкими коефіцієнтами, граничним значенням якої буде розв'язок задачі (1) – (3).

Нехай $Q_m = Q\bigcap\Big\{(t,x) \in Q \Big| s_1(1,t) \geq m_1^{-1},\ s_2(1,x) \geq m_2^{-1}\Big\}$ – послідовність областей, яка при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ збігається до Q, де $m = \{m_1, m_2\}$, m_1, m_2 – натуральні числа, $m_1 > 1$, $m_2 > 1$.

Розглянемо в області Q крайову задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \Bigg[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \\ - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\Bigg] u_m(t,x) = f_m(t,x), \tag{5}$$

$$u_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) u_m(t_j,x) = \varphi_m(x), \tag{6}$$

$$u_m|_\Gamma = \psi(t,x). \tag{7}$$

Коефіцієнти a_{ij}, a_i, a_0, функції f_m, φ_m є продовженням коефіцієнтів A_{ij}, A_i, A_0, функцій f, φ з області Q_m в область $Q \setminus Q_m$ [4].

Позначимо через $\psi_1(t,x)$ – продовження $\psi(t,x)$ із Γ в Q із збереженням належності класу $C^{2+\alpha}(Q)$. В задачі (5) – (7) зробимо заміну

$$u_m(t,x) = v_m(t,x)e^{-\lambda t} + \psi_1(t,x), \tag{8}$$

де λ задовольняє умову 3^0. Одержимо

$$(L_2 v_m)(t,x) \equiv ((L_1 - \lambda)v_m)(t,x) = \\ = f_m(t,x)e^{\lambda t} - (L_1\psi_1)(t,x) \equiv F(t,x), \tag{9}$$

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} v_m(t_j,x) = \varphi_m(x) - \\ -\psi_1(0,x) - \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j}\psi_1(t_j,x) \equiv \Phi_m(x), \tag{10}$$

$$v_m|_\Gamma = 0. \tag{11}$$

Знайдено оцінку розв'язків крайових задач (9) – (11). Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо v_m – класичний розв'язок задачі (9) – (11) в області Q і виконані умови 1^0 – 3^0, то для v_m правильна оцінка*

$$|v_m| \leq \max\Bigg(\max_{\overline{Q}} |F(-a_0 - \lambda)^{-1}|, \\ \max_{\overline{D}}\Big|\Phi_m\Big(\sum_{j=1}^{N}|q_j(x)|e^{-\lambda t_j}\Big)^{-1}\Big|\Bigg). \tag{12}$$

Доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 3 із [2].

Існування розв'язку задачі (9) – (11) встановлюється такою теоремою.

Теорема 3. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді існує розв'язок задачі (9) – (11) і для нього правильна оцінка (12).*

Доведення. Розв'язок задачі (9) – (11) шукаємо у вигляді

$$v_m(t,x) = \int_D E_m(t,x,0,\xi)v_m(0,\xi)d\xi + v_m^{(1)}(t,x), \tag{13}$$

де $v_m^{(1)}(t,x)$ – розв'язок задачі (9), (11) з початковою умовою

$$v_m(0,x) = \Phi_m(x), \tag{14}$$

$E_m(t,x,0,\xi)$ – функція Гріна для задачі (9), (11), (14) із [5, с. 469].

Згідно з теоремою 2, для $v_m^{(1)}(t,x)$ правильна оцінка

$$|v_m^{(1)}(t,x)| \leq \\ \leq \max(\|\Phi_m\|_{C(D)}, \|F_m(-a_0 - \lambda)^{-1}\|_{C(Q)})$$

і

$$E_m(t,x,0,\xi) \geq 0, \quad 0 \leq \int_D E_m(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1.$$

Задовольняючи нелокальну умову (10), маємо

$$v_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} \times \\ \times \int_D E_m(t_j,x,0,\xi)v_m(0,\xi)d\xi =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} v_m^{(1)}(t_j, x) \equiv F_1(x). \quad (15)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (15) знаходимо методом послідовних наближень. Оскільки

$$\left| \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} \int_D E_m(t_j, x, 0, \xi) v_m(0, \xi) d\xi \right| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{N} |q_j(x)| e^{-\lambda t_j} \le \lambda_0 < 1,$$

то для розв'язку рівняння (15) правильна оцінка

$$|v_m(0, x)| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} \|F_1\|_{C(D)}.$$

Підставляючи значення $v_m(0, x)$ у (13), дістанемо розв'язок задачі (9) – (11).

Запишемо розв'язок інтегрального рівняння (15) у вигляді

$$v_m(0, x) = F_1(x) + \int_D G(x, y) F_1(y) dy, \quad (16)$$

де $G(x, y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$G(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} E_m(t_j, x, 0, \xi) -$$

$$- \int_D \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} E_m(t_j, x, 0, y) G(y, \xi) dy,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left| \int_D G(x, y) dy \right| \le \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Поклавши в рівності (16) замість $F_1(x)$ значення

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} \left[\int_D E_m(t_j, x, 0, \xi) \times \right.$$

$$\left. \times \Phi_m(\xi) d\xi + \int_0^{t_j} d\tau \int_D E_m(t_j, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\xi \right],$$

і змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$v_m(0, x) = \sum_{j=1}^{N} \left[\int_0^{t_j} d\tau \int_D E_m^{(0)}(t_j, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_D E_m^{(0)}(t_j, x, 0, \xi) \Phi_m(\xi) d\xi \right], \quad (17)$$

де

$$E_m^{(0)}(t_j, x, \tau, \xi) = -\sum_{j=1}^{N} q_j(x)e^{-\lambda t_j} E_m(t_j, x, \tau, \xi) -$$

$$- \int_D G(x, y) \sum_{j=1}^{N} q_j(y)e^{-\lambda t_j} E_m(t_j, y, \tau, \xi) dy.$$

Підставляючи (17) у інтеграл рівності (13) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо зображення

$$v_m(t, x) = \int_0^{t} d\tau \int_D E_m(t, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+ \int_D E_m(t, x, 0, \xi) \Phi_m(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \left[\int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t, x, \tau, \xi) F(\tau, \xi) d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_D \Gamma_j(t, x, 0, \xi) \Phi_m(\xi) d\xi \right], \quad (18)$$

де

$$\Gamma_j(t, x, \tau, \xi) = \int_D E_m^{(0)}(t, x, 0, y) E_m^{(0)}(t_j, y, \tau, \xi) dy,$$

$j \in \{1, \ldots, N\}$.

Розглянемо однорідну крайову задачу для рівняння з "замороженими"коефіцієнтами у точці $P_1 \in Q^{(0)}$

$$(L_0 v)(t, x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} s(\beta_i + \beta_j; P_1) \times \right.$$

$$\times A_{ij}(P_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}\Bigg] v(t,x) = f_0(t,x), \qquad (19)$$

$$v(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) e^{-\lambda t_j} v(t_j,x) = \varphi_0(x), \quad (20)$$

$$v|_\Gamma = 0.$$

Коефіцієнти диференціального виразу L_0 обмежені сталими, не залежними від точки P_1. За допомогою методики доведення теореми 3 встановлюється така теорема.

Теорема 4. *Нехай* $f_0 \in C^\alpha(Q)$, $\varphi_0 \in C^{2+\alpha}(D)$ *і виконані умови теореми 1. Тоді існує єдиний розв'язок задачі (19) – (20) в просторі* $C^{2+\alpha}(Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(Q)} \leq c(\|f_0\|_{C^\alpha(Q)} + \|\varphi_0\|_{C^{2+\alpha}(D)}).$$

Введемо в просторі $C^{2+\alpha}(Q)$ норму $\|v_m;\gamma,\beta;l;Q\|_r$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається як $\|u;\gamma,\beta;l;Q\|_r$, тільки замість функцій $s_1(l_1,t)$, $s_2(l_2,x)$ беремо відповідно $d_1(l_1,t)$, $d_2(l_2,x)$, де $d_1(l_1,t) = \max(s_1(l_1,t), m_1^{-l_1})$ при $l_1 \geq 0$ і $d_1(l_1,t) = \min(s_1(l_1,t), m_1^{-l_1})$ при $l_1 < 0$; $d_2(l_2,x) = \max(s_2(l_2,x), m_2^{-l_2})$ при $l_2 \geq 0$ і $d_2(l_2,x) = \min(s_2(l_2,x), m_2^{-l_2})$ при $l_2 < 0$, $d(l;P) = d_1(l_1,t)d_2(l_2,x)$.

Правильна така теорема.

Теорема 5. *Якщо виконані умови теореми 1, то для розв'язку задачі (9) – (11) правильна оцінка*

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq C(\|F;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha + $$
$$+ \|\Phi_m;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}). \qquad (21)$$

Нерівність (21) одержується за методикою праці [2].

Із визначення норм і інтерполяційних нерівностей із [6, с.176] випливає існування в $\overline{Q}$ точок $P_1(t^{(1)},x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $P_j^{(2)}(t^{(1)},x_1^{(1)},\ldots,x_{j-1}^{(1)},x_j^{(2)},x_{j+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, для яких справедлива одна з нерівностей:

$$\frac{1}{2}\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha} \leq E_k, \quad k \in \{1,2,3,4\}, \qquad (22)$$

$$E_1 = \sum_{i,j,r=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha(\gamma-\beta_r);\tilde{P}_1)|x_r^{(1)} -$$
$$- x_r^{(2)}||\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1) - \partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_r^{(2)})|;$$

$$E_2 = \sum_{ij=1}^{n} d(2\gamma-\beta_i-\beta_j+\alpha\gamma;\tilde{P}_2)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}} \times$$
$$\times|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_1) - \partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P_2)|;$$

$$E_3 = \sum_{r=1}^{n} d(2\gamma+\alpha(\gamma-\beta_r);\tilde{P}_1)|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}|^{-\alpha} \times$$
$$\times|\partial_t v_m(P_r^{(2)}) - \partial_t v_m(P_1)|;$$

$$E_4 = d((2+\alpha)\gamma;\tilde{P}_2)|t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\frac{\alpha}{2}}|\partial_t v_m(P_1) -$$
$$- \partial_t v_m(P_2)|,$$

$$d(l;\widetilde{P}_\nu) = \min(d(l,P_\nu), d(l,P_r^{(2)})), \ \nu \in \{1,2\}.$$

Розглянемо випадок $|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}| \leq \rho n^{-1} d(\gamma - \beta_r;\widetilde{P}_\nu) \equiv T_1$, або $|t^{(1)} - t^{(2)}| \leq \rho^2 d(2\gamma;\widetilde{P}_\nu) \equiv T_2$. Нехай $V_\mu = \{(t,x) \in Q \,\big|\, |t - t^{(1)}| \leq \mu^2 T_2, |x_r - x_r^{(1)}| \leq \mu T_1, r \in \{1,\ldots,n\}\}$. Будемо вважати, що $d(\gamma,\tilde{P}_\nu) = d(\gamma;P_1)$. В задачі (9) – (11) зробимо заміну $v_m(t,x) = \omega_m(t,y)$, $y_r = d(\beta_r;P_1)x_r$, $r \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді $W_m(t,y) = \omega_m(t,y)\eta(t,y)$ задовольняє крайову задачу

$$\left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} d(\beta_i+\beta_j;P_1)a_{ij}(P_1)\partial_{y_i}\partial_{y_j}\right] W_m =$$

$$= \Bigg[\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}(t,Y) - a_{ij}(P_1))d(\beta_i+\beta_j;P_1) \times$$
$$\times \partial_{y_i}\partial_{y_j}\omega_m - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,Y)d(\beta_i;P_1)\partial_{y_i}\omega_m -$$
$$- a_0(t,Y)\omega\Bigg]\eta + \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1) \times$$
$$\times[\partial_{y_i}\omega_m\partial_{y_j}\eta + \partial_{y_j}\omega_m\partial_{y_i}\eta] + \omega_m \times$$
$$\times\Bigg[\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}(P_1)d(\beta_i+\beta_j;P_1)(\partial_{y_i}\partial_{y_j}\eta - \partial_t\eta] +$$
$$+ F(t,Y)\eta \equiv F_1(t,y), \qquad (23)$$

$$W_m(0,y)+\sum_{j=1}^{N} q_j(Y)e^{-\lambda t_j}W_m(t_j,y)=$$

$$=\sum_{j=1}^{N} q_j(Y)e^{-\lambda t_j}[\eta(t,y)-\eta(0,y)]\omega_m(t_j,y)+$$

$$+\Phi_m(Y)\eta(0,y)\equiv\Psi(y), \qquad (24)$$

$$W_m|_\Gamma=0, \qquad (25)$$

де

$$\eta(t,y)=\begin{cases}1, & (t,y)\in H_{1/2},\\ 0, & (t,y)\notin H_{3/4},\end{cases}$$

$$|\partial_t^j\partial_y^k\eta|\le c_{kj}d^{-1}((2j+|k|)\gamma;P_1);$$
$$0\le\eta(t,y)\le1,$$

$H_\mu=\{(t,y)\in Q\,\big|\,|t-t^{(1)}|\le\mu^2T_2, |y_r-y_r^{(1)}|\le\mu d(\gamma;P_1)\rho n^{-1}, y_r^{(1)}=d(\beta_r;P_1)x_r^{(1)}\}$, $Y=(d^{-1}(\beta_1;P_1)x_1,\ldots,d^{-1}(\beta_n;P_1)x_n)$.

Коефіцієнти рівняння (23) обмежені сталими, не залежними від P_1. Тому, на підставі теореми 4, для довільних точок $\{M_1,M_2\}\subset H_{1/4}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)|\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_1)-\partial_t^j\partial_y^k\omega_m(M_2)|\le$$

$$\le c(\|F_1\|_{C^\alpha(H_{3/4})}+\|\Psi\|_{C^{2+\alpha}(H_{3/4}\bigcap\{t=0\})}), \quad (26)$$

де $d(M_1,M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2j+|k|=2$.

Використовуючи властивості функції $\eta(t,y)$, означення простору $C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_k\le c(n^2\rho^\alpha+\varepsilon^\alpha(n+2))[|v_m;\gamma,\beta;0;V_{3/4}|]_{2+\alpha}+$$

$$+c_1(\|F;\gamma,\beta;2\gamma;Q\|_\alpha+\|\Phi_m;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+\sup_{\overline{Q}}|v_m|),$$

ε – довільне дійсне число, $\varepsilon\in(0,1)$.

У випадку $|x_r^{1)}-x_r^{(2)}|\ge T_1n$, або $|t^{(1)}-t^{(2)}|\ge T_2$, використовуючи інтерполяційні нерівності із [6, с. 176], маємо

$$E_k\le\varepsilon^\alpha[\![v_m;\gamma,\beta;0;Q]\!]_{2+\alpha}+c(\varepsilon)\sup_{\overline{Q}}|v_m|. \qquad (27)$$

Враховуючи теорему 2, нерівності (22), (26), (27) і вибираючи ρ і ε досить малими, дістанемо нерівність (21).

Враховуючи результати теорем 2, 5 доведемо теорему 1.

Оскільки

$$\|F;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha\le c(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha+$$
$$+\|\psi\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}),$$
$$\|\Phi_m;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}\le c(\|\varphi;\widetilde{\gamma},\widetilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+$$
$$+\|\psi\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}), \qquad (28)$$

то, використовуючи нерівності (21), (28), маємо

$$\|v_m;\gamma,\beta;0;Q\|_{2+\alpha}\le c(\|f;\gamma,\beta;\mu_0;Q\|_\alpha+$$

$$+\|\varphi;\tilde{\gamma},\tilde{\beta};0;D\|_{2+\alpha}+\|\psi\|_{C^{2+\alpha}(\Gamma)}). \qquad (29)$$

Права частина нерівності (29) не залежить від m і послідовності $\{V_m^{(0)}\}=\{|v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(1)}\}=\{d(\gamma-\beta_i;P)|\partial_{x_i}v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(2)}\}=\{d(2\gamma-\beta_i-\beta_j;P)|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v_m(P)|\}$, $\{V_m^{(3)}\}=\{d(2\gamma;P)|\partial_t v_m(P)|\}$, $P\in Q$ рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\{V_{m(l)}^{(k)}\}$, $k\in\{0,1,2,3\}$, рівномірно збіжні в Q. Переходячи до границі при $l\to\infty$ в задачі (9) – (11), одержимо, що $u=ve^{-\lambda t}+\tilde{\psi}$ – єдиний розв'язок задачі (1) – (3), $u\in C^{2+\alpha}(\gamma,\beta;0;Q)$ і правильна оцінка (4).

Задача оптимального керування. В області Q розглянемо задачу знаходження пари функцій (u,p), на яких функціонал

$$I(p)=\int_0^T dt\int_D F(t,x,u,p)dx \qquad (29)$$

досягає мінімуму в класі функцій

$$p\in V=\{p\in C^\alpha(Q)\,\Big|\,\psi_1\le p\le\psi_2\},$$

із яких u є розв'язком крайової задачі

$$(Lu)(t,x)=f(t,x,p);\ u(0,x)+$$

$$+\sum_{j=1}^{N} q_j(x)u(t_j,x)=\varphi(x),\ u|_\Gamma=\psi(t,x). \qquad (30)$$

Будемо вважати, що виконуються такі умови:

4^0. Функції $\psi_1 \in C^\alpha(Q)$, $\psi_2 \in C^\alpha(Q)$, $\sum_{j=1}^{N} |q_j(x)| \le \lambda_0 < 1$, $A_0 < 0$, $f(t,x,p)$, $F(t,x,u,p)$ визначені відповідно в областях $Q^{(1)} = Q \times [\psi_1, \psi_2]$, $Q^{(2)} = Q \times \mathbb{R}^1 \times [\psi_1, \psi_2]$, мають гельдерові похідні другого порядку за змінними u і p, які належать як функції (t,x) простору $C^\alpha(Q)$.

При обмеженнях 1^0 – 4^0 для будь-якого $p \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (30) із простору $C^{2+\alpha}(\gamma, \beta; 0; Q)$ і для нього правильна оцінка (4).

Покладемо

$$\lambda_1(t,x) = \int_t^T d\tau \int_D E_m(\tau, \xi, t, x) \times$$
$$\times \partial_{u_m} F(\tau, \xi, u_m, p) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(\tau, \xi, t, x) \partial_{u_m} F(\tau, \xi, u_m, p) d\xi,$$

$$H(u_m, \lambda_1, p) = F(t,x,u_m,p) + \lambda_1(t,x) f(t,x,p).$$

Для встановлення існування розв'язку задачі (29), (30) потрібно встановити розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами.

Розглянемо в області Q задачу знаходження функцій (u_m, p), на яких функціонал

$$I(p) = \int_0^T dt \int_D F(t,x,u_m,p) dx \qquad (31)$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V$, із яких u_m є розв'язком крайової задачі

$$(L_1 u_m)(t,x) = f(t,x,p),$$
$$u_m(0,x) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) u_m(t_j, x) = \varphi(x),$$
$$u_m|_\Gamma = \psi(t,x). \qquad (32)$$

Правильна така теорема.

Теорема 6. *Якщо функція $H(u_m, \lambda_1, p)$ за аргументом p є монотонно зростаючою для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^{(0)} = \psi_1$ і оптимальним розв'язком задачі (32) є $u_m^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u_m^{(0)}(t,x,\psi_1(t,x))$.*

Якщо функція $H(u_m, \lambda_1, p)$ за аргументом p є монотонно спадною для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^{(0)} = \psi_2$ і оптимальним розв'язком задачі (32) є $u_m^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u_m^{(0)}(t,x,\psi_2(t,x))$.

Доведення. Нехай Δp – допустимий приріст керування $p^{(0)}(t,x)$. Позначимо через Δu_m приріст функції $u_m(t,x,p^{(0)})$. Тоді Δu_m в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L_1 \Delta u_m)(t,x) = f(t,x,p^{(0)}(t,x) + \Delta p) -$$
$$- f(t,x,p^{(0)}(t,x)) \equiv \Delta f(t,x,p),$$
$$\Delta u_m(0,x,p) + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) \Delta u_m(t_j, x, p) = 0,$$
$$\Delta u_m|_\Gamma = 0. \qquad (33)$$

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціоналу $I(p)$

$$\Delta I = \int_0^T dt \int_D [\partial_{u_m} F(t,x,u_m,p) \Delta u_m +$$
$$+ \partial_t F(t,x,u_m,p) \Delta p +$$
$$+ O(|\Delta u_m|^2) + O(|\Delta p|^2)] dx. \qquad (34)$$

Оскільки Δu_m – розв'язок задачі (33), то, використовуючи формулу (18), дістанемо

$$\Delta u_m = \int_0^t d\tau \int_D E_m(t,x,\tau,\xi) \Delta f(\tau,\xi,p) d\xi +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t,x,\tau,\xi) \Delta f(\tau,\xi,p) d\xi. \qquad (35)$$

Підставляючи (35) в (34) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I = \int_0^T dt \int_D [\partial_p H(u_m, \lambda_1, p) \Delta p +$$

$$+O(|\Delta u_m|^2)+O(|\Delta p|^2)]dx. \qquad (36)$$

Якщо $p = p^{(0)}(t,x)$ і $H(u_m,\lambda_1,p)$ задовольняє умови теореми 6, то при досить малих Δp маємо, що $\Delta I > 0$.

Нехай $p^{(0)}(t,x)$ – оптимальне значення, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 6. Якщо $H(u_m,\lambda_1,p)$ не є монотонною за аргументом p, то $\partial_p H(u_m,\lambda_1,p)$ – знакозмінна величина, тобто $\partial_p H(u_m,\lambda_1,p) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $\partial_p H(u_m,\lambda_1,p) < 0$ в $Q^- = Q\setminus Q^+$. Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I = \iint\limits_{Q^+} \partial_p H(u_m,\lambda_1,p)\Delta p dt dx -$$

$$-\iint\limits_{Q^-} |\partial_p H(u_m,\lambda_1,p)|\Delta p dt dx +$$

$$+\iint\limits_{Q} [O(|\Delta u_m|^2)+O(|\Delta p|^2)]dx dt =$$

$$= \partial_p H(u_m^+,\lambda_1^+,p^+)\iint\limits_{Q^+} \Delta p dx dt -$$

$$-|\partial_p H(u_m^-,\lambda_1^-,p^-)|\iint\limits_{Q^-} \Delta p dt dx +$$

$$+\iint\limits_{Q} [O(|\Delta u_m|^2)+O(|\Delta p|^2)]dx dt.$$

При досить малому Δp знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця перших двох доданків змінює знак в залежності від величини $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, Δp. При досить малих $\operatorname{mes} Q^+$ і $\Delta p > 0$ маємо $\Delta I < 0$ і навпаки, $\Delta I > 0$, якщо мала $\operatorname{mes} Q^-$ і $\Delta p > 0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 7. *Нехай $H(u_m,\lambda_1,p)$ не є монотонною функцією за аргументом p. Для того, щоб керування $p^{(0)}(t,x)$ і відповідний розв'язок $u_m^{(0)}(t,x,p^{(0)})$ крайової задачі (32) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H(u_m,\lambda_1,p)$ за аргументом p має в точці $p^{(0)}$ мінімальне значення;

б) для довільного вектора $(e_1,e_2) \neq 0$ і $(t,x)\in \overline{Q}$ виконується нерівність

$$K(e_1,e_2) = \partial^2_{u_m} F(t,x,u_m,p^{(0)})e_1^2 +$$

$$+2\partial^2_{u_m p} F(t,x,u_m,p^{(0)})e_1 e_2 -$$

$$-\lambda_1(t,x)\partial_p^2 f(t,x,p^{(0)})e_2^2 > 0.$$

Доведення. Достатність. Нехай $p^{(0)}(t,x)$ задовольняє умови теореми 7. Покажемо його оптимальність. Надамо керуванню $p^{(0)}(t,x)$ деякого допустимого приросту Δp і позначимо через Δu_m відповідний приріст функції $u_m(t,x,p^{(0)})$. Тоді Δu_m в області Q буде розв'язком задачі (33).

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціоналу $I(p)$:

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Big[\partial_{u_m} F(t,x,u_m,p^{(0)})\Delta u_m +$$

$$+\partial_p F(t,x,u_m,p^{(0)})\Delta p + \frac{1}{2}(\partial^2_{u_m} F(t,x,u_m,p^{(0)})\times$$

$$\times(\Delta u_m)^2 + 2\partial_{u_m}\partial_p F(t,x,u_m,p^{(0)})\Delta u_m \Delta p +$$

$$+\partial_p^2 F(t,x,u_m,p^{(0)})(\Delta p)^2) + O(|\Delta u_m|^{2+\alpha}) +$$

$$+O(|\Delta p|^{2+\alpha})\Big]dx. \qquad (37)$$

Підставляючи (35) в (37) і змінюючи порядок інтегрування, одержуємо

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Big[\partial_p H(u_m,\lambda_1,p^{(0)})\Delta p +$$

$$+\frac{1}{2}K(\Delta u_m,\Delta p) + O(|\Delta u_m|^{2+\alpha}) + O(|\Delta p|^{2+\alpha})\Big]dx.$$

Оцінимо ΔI знизу, враховуючи, що $\partial_p H(u_m,\lambda_1,p^{(0)}) = 0$ за умовою а) теореми 7. Позначимо $\delta_1 = \inf\limits_{|\xi|=1} K(\xi_1,\xi_2)$. За умовою б) маємо $\delta_1 > 0$ для всіх $(t,x)\in\overline{Q}$. Тоді

$$K_1(\Delta U_m,\Delta p) \geq \delta_1(|\Delta u|^2 + |\Delta p|^2).$$

Отже,

$$\Delta I \geq \delta_1 \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Big[|\Delta u_m|^2(1 - O(|\Delta u_m|^{\alpha})) +$$

$$+|\Delta p|^2(1-O(|\Delta p|^\alpha))\Big]dx.$$

Враховуючи співвідношення (35), маємо, що $\Delta u_m \to 0$ при $\Delta p \to 0$. Тому при досить малих Δp таких, що $1-O(|\Delta u_m|^\alpha) \geq \frac{1}{2}$, $1-O(|\Delta p|^\alpha) \geq \frac{1}{2}$, одержуємо оцінку,

$$\Delta I \geq \frac{1}{2}\delta_1 \int_0^T dt \int_D (|\Delta u_m|^2 + |\Delta p|^2)dx > 0.$$

Необхідність обгрунтовується аналогічно доведенню теореми 2 із [8].

Існування $(u_m^{(0)}, p^{(0)})$ встановлюється наступним чином. Нехай $p^{(0)}(t,x)$ – оптимальне керування. Тоді $\partial_p H(u_m^{(0)}, \lambda_1, p^{(0)}) = 0$ і $\partial_p^2 H(u_m^{(0)}, \lambda_1, p^{(0)}) > 0$. Застосовуючи теорему про неявну функцію із [7] до рівняння $\partial_p H = 0$, одержуємо

$$p^{(0)}(t,x) = W(u_m^{(0)}, \lambda_1)$$

і $W(u_m^{(0)}, \lambda_1)$ диференційовна функція за змінними λ_1, $u_m^{(0)}$.

Використовуючи формулу (18), у відповідність задачі (31), (32) поставимо систему інтегральних рівнянь

$$u_m^{(0)} = \int_0^t d\tau \int_D E_m(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(u_m^{(0)},\lambda_1))d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^N \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi,W(u_m^{(0)},\lambda_1))d\xi + \omega_1,$$

$$\lambda_1 = \int_t^T d\tau \int_D E_m(\tau,\xi,t,x)\partial_{u_m}\times$$

$$\times F(\tau,\xi,u_m^{(0)},W(u_m^{(0)},\lambda_1))d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^N \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(\tau,\xi,t,x)\partial_{u_m}\times$$

$$\times F(\tau,\xi,u_m^{(0)},W(u_m^{(0)},\lambda_1))d\xi, \qquad (38)$$

де ω_1 – розв'язок крайової задачі

$$(L_1\omega_1)(t,x) = 0, \omega_1|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\omega_1|_\Gamma = \psi(t,x).$$

Розв'язок системи (38) знаходимо методом послідовних наближень. Переходячи до границі в задачі (31), (32) при $m_1 \to \infty$, $m_2 \to \infty$ одержуємо розв'язок задачі (29), (30).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. М.І.Матійчук. Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

2. И.Д.Пукальский. Нелокальные краевые задачи для неравномерно параболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, N 6. – С. 777 – 787.

3. Пукальський І.Д. Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, N 11. – С. 1521 – 1531.

4. Пукальский И.Д. Краевая задача для линейных параболических уравнений с вырождениями // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, N 3. – С. 377 – 387.

5. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников, Н.Н.Уральцева. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

6. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М: Наука, 1964. – 445 с.

7. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное уравнение. – М.: Наука, 1979. – 429 с.

8. Пукальський І.Д Функція Гріна параболічної крайової задачі і задача оптимізації // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, N 4. – С. 567 – 571.

Стаття надійшла до редколегії 26.09.2006