УДК 517.95

©2006 р. Н.П. Процах

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів

ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ЗА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ ОБЛАСТІ

У необмеженій за просторовими змінними області розглянуто мішану задачу для гіперболічних рівнянь третього порядку, які містять нелінійності степеневого вигляду зі змінними показниками. Досліджено розв'язність цієї задачі в узагальнених просторах Лебега без обмежень на зростання вихідних даних задачі.

The mixed problem for nonlinear equations of the third order with the function power nonlinearities are considered in the unbounded on the spatial variables domain. The solvability in the generalized Lebesque spaces is proved for the mixed problem without any assumptions on the grows of the initial data of this problem.

Теорія узагальнених просторів Соболєва досягла свого розквіту у середині 90-х років минулого століття. Їх дослідження тривають і по сьогоднішній день. Про це, зокрема, свідчать праці [1] – [4]. Узагальнені простори Лебега знайшли своє застосування у різноманітних задачах математичної фізики [4], при дослідженні мішаних задач для нелінійних рівнянь еліптичного, параболічного та гіперболічного типів [1], [5-7].

В останні десятиліття також з'являється зацікавленість нелінійними рівняннями третього порядку, які виникають при дослідженні поширення хвиль у в'язкопружному середовищі (див., напр., [6-10]). Рівняння, розглянуті в [6] та [7] містять нелінійності степеневого вигляду зі змінними показниками та досліджувалися в обмежених областях. Ці дослідження продовжено на випадок необмежених областей. Зауважимо, що раніше розв'язність задач для гіперболічних рівнянь в необмежених областях проводилися у працях [11-13].

У цій праці досліджено існування та єдиність узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного рівняння третього порядку в необмеженій за групою просторових змінних області. Використовуючи властивості узагальнених просторів Лебега, отримано розв'язність цієї задачі в класі локально інтегровних функцій. Обмежень на характер поведінки розв'язку на нескінченності не припускалося.

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\Gamma \in C^1$, $T \in (0,\infty)$.

Позначимо через τ – довільний фіксований момент часу з проміжку $(0,T]$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, $S_T = \Gamma \times (0,T)$, ν – зовнішня нормаль до поверхні S_T.

Нехай область Ω задовольняє такі умови:

1) існує таке $R_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $R > R_0$ $\mathrm{mes}\,\Omega \cap \{|x| < R\} \neq 0$;

2) $\Omega = \bigcup\limits_{R>R_0} \Omega^R$, причому $\Omega^R = \Omega \cap B_R$ є регулярною областю в сенсі Кальдерона [14, с.45] для всіх $R > R_0$, де B_R – n-вимірна куля простору $\mathbb{R}^n$ з центром в початку координат і радіусом R;

3) $\partial\Omega^R = \Upsilon_1^R \cup \Upsilon_2^R$, де $\{\Upsilon_1^R, \Upsilon_2^R\} \in C^1$; $\mathrm{mes}\{\Upsilon_1^R \cap \Upsilon_2^R\} = 0$, $\mathrm{mes}\Upsilon_1^R \neq 0$, $\forall R > R_0$; $\partial\Omega = \bigcup\limits_{R>R_0} \Upsilon_1^R$.

Розглянемо в області Q_T задачу

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (d_{ij}(x,t) u_{x_i t})_{x_j} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t) |u_{x_i t}|^{p(x)-2} u_{x_i t})_{x_i} -$$

$$-\sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u_{x_i}+$$
$$+a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t+b_0(x,t)u=$$
$$=f_0(x,t)-\sum_{i=1}^{n}f_{i,x_i}(x,t), \qquad (1)$$
$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in\Omega, \qquad (2)$$
$$u|_{S_T}=0. \qquad (3)$$

Припускатимемо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються умови:

(A): $a_i\in L^\infty(Q_T), \alpha_0\leqslant a_i(x,t)\leqslant\alpha_1$ майже для всіх $(x,t)\in Q_T, i\in\{0,1,\dots,n\}$, $\alpha_0,\ \alpha_1$ – додатні сталі;

(B) : $b_{ij}\in L^\infty(Q_T)$, $\{b_{ijt},b_0\}\subset L^\infty((0,T);L^\infty_{\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$, $b_{ij}(x,t)=b_{ji}(x,t)$ майже для всіх $(x,t)\in Q_T$, $\{i,j\}\subset\{1,2,\dots,n\}$; $\beta_0|\xi|^2\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\leqslant\beta^0|\xi|^2$ майже для всіх $(x,t)\in Q_T$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\beta_0,\ \beta^0$ — додатні сталі;

(C) : $c_i\in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,T);L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)),\ i\in\{1,2,\dots,n\}$;

(D): $d_{ij}\in L^\infty(Q_T)$, $d_{ij}(x,t)=d_{ji}(x,t)$, $\sum\limits_{i,j=1}^{n}d_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant d_0\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2$ майже для всіх $\xi\in\mathbb{R}^N$, $\{i,j\}\subset\{1,2,\dots,n\}$, d_0 – додатна стала;

(P) : $p,q:\Omega\to(1,+\infty)$, $\{q,p\}\subset L^\infty(\Omega)$;
$1<p_1=\operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega}p(x)\leqslant\operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega}p(x)=p_2$,
$1<q_1=\operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega}q(x)\leqslant\operatorname{ess}\sup\limits_{\Omega}q(x)=q_2$.

(P1) : Виконується одна з умов

1) $p_2\leqslant R(p_1)=\begin{cases}\frac{np_1}{n-p_1},\ 1<p_1<n,\\ +\infty,\ n\leqslant p_1.\end{cases}$;

2) існують сталі $s_j,\ s_j^*$ і відкриті множини $\Omega_j\subset\Omega$, $j=\overline{1,m}$, які складаються з скінченної кількості компонент з ліпшіцевою межею такі, що $\operatorname{mes}(\Omega\setminus\bigcup\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\Omega_j)=0$, $1=s_1<s_2<s_1^*<s_3<s_2^*<\dots<s_{m-1}<s_{m-2}^*<n<s_m<s_{m-1}^*<s_m^*=+\infty$ і, крім того, $s_j\leqslant p(x)\leqslant s_j^*$ майже для всіх $x\in\Omega_j$, $j\in\{1,2,\dots,m\}$, $s_k^*<R(s_k)$, $k=\{1,2,\dots,m-1\}$.

Зафіксуємо довільне число $R>R_0$. Позначимо $Q_\tau^R=\Omega^R\times(0,\tau)$, $\Gamma^R=\partial\Omega^R$, $S_T^R=\partial\Omega^R\times(0,T)$.

Введемо простори: $L^{s(x)}(\Omega^R)$, $s(x)\in\{p(x),q(x)\}$ (узагальнений простір Лебега) [1] з нормою

$$\|v;L^{s(x)}(\Omega^R)\|=\inf\{\mu>0:\int\limits_{\Omega^R}|v|^{s(x)}/\mu^{s(x)}\,dx\leqslant1\};$$

$$W^{1,2}_{x,0}(Q_T^R)=\{v:\ \{v,\,v_{x_i}\}\subset L^2(Q_T^R),\ v|_{S_T^R}=0\};$$
$$W_0^{1,p(x)}(\Omega^R)=\{v:\ v_{x_i}\in L^{p(x)}(\Omega^R),\ v|_{\Gamma^R}=0\};$$
$$W^{1,2,q(x)}_{x,0}(Q_T^R)=L^{q(x)}(Q_T^R)\cap W^{1,2}_{x,0}(Q_T^R);$$
$$W_0^{1,2,q(x)}(\Omega^R)=L^{q(x)}(\Omega^R)\cap W_0^{1,2}(\Omega^R).$$
$$V_1(Q_T)=\{v:\{v,\ v_t,\ v_{x_i}\}\subset C([0,T];L^2(\Omega)),$$
$$v_{x_it}\in L^2((0,T);L^2(\Omega)),$$
$$v_t\in L^{q(x)}((0,T);L^{q(x)}(\Omega)),$$
$$v_{x_it}\in L^{p(x)}((0,T);L^{p(x)}(\Omega)),\ i\in\{1,2,\dots,n\}\}.$$
$$V_2(Q_T)=\{v:\{v,\ v_t,\ v_{x_i}\}\subset L^2([0,T];L^2(\Omega)),$$
$$v\in L^{q(x)}((0,T);L^{q(x)}(\Omega)),$$
$$v_{x_i}\in L^{p(x)}((0,T);L^{p(x)}(\Omega)),\ i\in\{1,2,\dots,n\}\}.$$
$$V_{s,\mathrm{loc}}(Q_T)=\{v:v\in V_s(Q_T^R)\ \text{для всіх}\ R>1\},$$

$s\in\{1,2\}$. Позначимо $\nabla u=(u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_n})$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1), (2), (3) назвемо таку функцію u з простору $V_{1,loc}(\overline{Q}_T)\cap C((0,T);L^2_{loc}(G))$, яка задовольняє рівність*

$$\int\limits_{Q_T}\big[-v_tu_t+\sum_{i,j=1}^{n}d_{ij}(x,t)u_{x_it}v_{x_j}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it}v_{x_i}+$$
$$+\ \sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}(x,t)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}c_i(x,t)u_{x_i}v+$$
$$+\ a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_tv+b_0(x,t)uv-$$
$$-\ f_0(x,t)v-\sum_{i=1}^{n}f_i(x,t)v_{x_i}\big]\,dx\,dt+$$
$$+\int\limits_{\Omega_T}u_tv\,dx-\int\limits_{\Omega_0}u_1(x)v\,dx=0$$

для всіх функцій $v \in V_{2,loc}(\overline{Q}_T)$, які мають обмежений носій.

Спочатку розглянемо рівняння (1) у обмеженій області Q_T^R з умовами

$$u|_{S_T^R}=0, u(x,0)=u_0^R(x), u_t(x,0)=u_1^R(x), \quad (4)$$

де $u_0^R(x) = u_0(x)\xi(x)$, $u_1^R(x) = u_1(x)\xi(x)$, а
$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in \Omega^R; \\ 0, & \text{в іншому випадку} . \end{cases}$$

У праці [7] доведено існування та єдиність розв'язку мішаної задачі (1), (2), (3) (в сенсі розподілів) в обмеженій області:

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{A}), (\mathbf{B}), (\mathbf{C}), (\mathbf{D}), (\mathbf{P}), (\mathbf{P1})$ *в області Q_T^R і, крім того, $f_0 \in L^{q'(x)}(Q_T^R)$, $f_i \in L^2(Q_T^R)$, $i \in \{1,2,\dots,n\}, u_0 \in H_0^1(\Omega^R)$, $u_1 \in L^2(\Omega^R)$. Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1) – (3) (в сенсі розподілів) такий, що $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega^R))$, $u_t \in W_{x,0}^{1,2,q(x)}(Q_T^R) \cap C([0,T]; (W_0^{1,2,q(x)}(\Omega^R))^*)$, $u_{tt} \in (W_{x,0}^{1,2,q(x)}(Q_T^R))^*$.*

Доведемо існування розв'язку задачі (1), (2), (3) в необмеженій за просторовими змінними області Q_T. Для цього спочатку доведемо допоміжну лему, яка виконується для класичних просторів Лебега.

Лема. *Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, g_μ, g – функції з $L^{q(x)}(\Omega)$, $1 < ess \inf q(x) < q(x) < ess \sup q(x) < +\infty$ такі, що $\|g_\mu;\ L^{q(x)}(\Omega)\| \leqslant C$, $g_\mu \to g$ майже всюди в Ω. Тоді $g_\mu \to g$ слабко в $L^{q(x)}(\Omega)$.*

Доведення. Нехай $\{N\}_{N=1}^{\infty}$ – зростаюча послідовність чисел, які прямують до $+\infty$. Покладемо $E_N = \{x|\ x \in \Omega$ і $|g_\mu(x) - g(x)| \leqslant 1$ для $\mu \geqslant N\}$. Зауважимо, що $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_N \subset \dots$ і $\operatorname{mes}(E_N) \to \operatorname{mes}\Omega$ при $N \to \infty$ оскільки $g_\mu \to g$ майже всюди в Ω.

Нехай Φ_N – множина функцій φ з $L^{q'(x)}(\Omega)$ з носієм E_N і $\Phi = \bigcap\limits_{N\to\infty} \Phi_N$, Φ – щільна в $L^{q'(x)}(\Omega)$. Візьмемо $\varphi \in \Phi$. За теоремою Лебега $\int\limits_\Omega \varphi(g_\mu - g)\,dx \to 0$ при $\mu \to \infty$ (бо $\varphi \in \Phi_{N_0}$ і якщо вибрати $\mu \geqslant N_0$, то $|\varphi(g_\mu - g)| \leqslant |\varphi|$ і ліва частина прямує до 0 майже всюди). Оскільки Φ – щільна в $L^{q'(x)}(\Omega)$, то лему доведено.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 в кожній обмеженій підобласті області Q_T і, крім того, виконуються умови* $(\mathbf{A}), (\mathbf{B}), (\mathbf{C}), (\mathbf{D}), (\mathbf{P}), (\mathbf{P1})$, *функція $p(x) \in (\frac{2n}{n+2}, 2]$ для майже всіх $x \in \Omega$.*

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1), (2), (3).

Доведення. З теореми 1 випливає, що в кожній обмеженій області Q_T^R існує u^R така, що

$$u_{tt}^R - \sum_{i,j=1}^n (d_{ij}(x,t) u_{x_i t}^R)_{x_j} -$$
$$- \sum_{i=1}^n (a_i(x,t) |u_{x_i t}^R|^{p(x)-2} u_{x_i t}^R)_{x_i} -$$
$$- \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x,t) u_{x_i}^R)_{x_j} + \sum_{i=1}^n c_i(x,t) u_{x_i}^R +$$
$$+ a_0(x,t) |u_t^R|^{q(x)-2} u_t^R + b_0(x,t) u^R =$$
$$= f_0^R(x,t) - \sum_{i=1}^n f_{i,x_i}^R(x,t),$$

в сенсі розподілів, u^R задовольняє крайові і початкові умови (4), $u^R \in C([0,T]; H_0^1(\Omega^R))$, $u_t^R \in W_{x,0}^{1,2,q(x)}(Q_T^R) \cap C([0,T]; (W_0^{1,2,q(x)}(\Omega^R))^*)$, $u_{tt} \in (W_{x,0}^{1,2,q(x)}(Q_T^R))^*$ а

$$f_i^R = \begin{cases} f_i, & \text{якщо } |x| \leqslant R, \\ 0, & \text{якщо } |x| > R,\ i \in \{0,1,2,\dots\}. \end{cases}$$

Продовжимо u^R нулем на $Q_T \setminus Q_T^R$. Виберемо $R = R_0 + 1, R_0 + 2, R_0 + 3, \dots$. Позначимо через $u^{k,m} = u^k - u^m$, де $k, m \in \mathbb{N}$, $\psi_R(x) = [h_R(x)]^\beta$, $\beta > 1$, а

$$h_R(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x|^2}{R}, & \text{якщо } |x| \leqslant R, \\ 0, & \text{якщо } |x| > R. \end{cases}$$

Виберемо в означенні 1 функцію $v = u_t^R \psi_R e^{-\varkappa t}$. За теоремою 2 [6, с. 51], врахувавши умови теореми 2, в першому інтегралі отриманої рівності можна проінтегрувати частинами. Тому для $k, m > R$ (враховуючи, що на Q_T^R різниця $f_i^k - f_i^m \equiv 0,\ u_1^k - u_1^m \equiv 0$) з означення 1 випливає, що

$$\int\limits_{Q_\tau^R} \Bigg[\frac{\varkappa}{2}(u_t^{k,m})^2\psi_R + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_it}^{k,m}\times$$
$$\times(u_t^{k,m}\psi_R)_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left(|u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k -\right.$$
$$\left. -|u_{x_it}^m|^{p(x)-2}u_{x_it}^m\right)(u_t^{k,m}\psi_R)_{x_i} +$$
$$+\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{k,m}(u_t^{k,m}\psi_R)_{x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R + a_0(x,t)\times$$
$$\times(|u_t^k|^{q(x)-2}u_t^k - |u_t^m|^{q(x)-2}u_t^m)u_t^{k,m}\psi_R +$$
$$+b_0(x,t)u^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^R}(u_t^{k,m})^2\psi_R e^{-\varkappa\tau}\,dx = 0. \qquad (5)$$

Позначимо через $\theta_i = |u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k - |u_{x_it}^m|^{p(x)-2}u_{x_it}^m$. Зауважимо, що за виконання умови (**P**) при $p_2 \leqslant 2$ виконується оцінка $|\theta_i| \leqslant C|u_{x_it}^{k,m}|^{p(x)-1}$, де C – стала, яка залежить тільки від $p(x)$. Тоді $|\theta_i|^{p'(x)-1} \leqslant C_1|u_{x_it}^{k,m}|$, де $C_1 = C^{p'(x)-1}$ і $|\theta_i|^{p'(x)} \leqslant C_1 u_{x_it}^{k,m}\theta_i$. Зафіксуємо довільне число q_0, яке задовольняє умови $2 < q_0 < \frac{2n}{n-1}$ та $2 < q_0 < q_1$. Для чисел q_0, $q(x)$, ξ поточково виконується оцінка $|\xi|^{q_0} \leqslant |\xi|^2 + |\xi|^{q(x)}$. Оцінимо кожний доданок рівності (5):

$$\mathcal{I}_1 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_it}^{k,m}(u_t^{k,m}\psi_R)_{x_j}e^{-\varkappa t}dxdt \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[d_0\sum_{i=1}^n(u_{x_it}^{k,m})^2 - \frac{d^0\delta}{2}\sum_{i=1}^n(u_{x_it}^{k,m})^2 -$$
$$-\frac{d^0\delta}{q_0}\left(|u_t^{k,m}|^{q(x)} + |u_t^{k,m}|^2\right) + \frac{(q_0-2)\delta^{\frac{-q_0-2}{q_0-2}}}{2q_0}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\left(\frac{|\psi_{Rx_i}|^{\frac{2q_0}{q_0-2}}}{\psi_R^{-\frac{-2-q_0}{q_0-2}-1}}\right)\Bigg]\psi_R e^{-\varkappa t}\,dx\,dt,$$

де $d^0 = \max\limits_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T^R}|d_{ij}(x,t)|$.

$$\mathcal{I}_2 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\Big(|u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k -$$
$$-|u_{x_it}^m|^{p(x)-2}u_{x_it}^m\Big)(u_t^{k,m}\psi_R)_{x_i}e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\alpha_0\sum_{i=1}^n\theta_i u_{x_it}^{k,m} - \frac{C_1\delta(p_1-1)}{p_1}u_{x_it}^{k,m}\theta_i +$$
$$+\frac{\delta}{2}|u_t^{k,m}|^2\Bigg]\psi_R e^{-\varkappa t}\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau^R}\frac{\delta^{\frac{2p(x)(2-3p(x))}{2-p(x)}}}{\frac{2p(x)}{2-p(x)}}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^n\left(\frac{|\psi_{Rx_i}|}{\psi_R^{\frac{1}{p'(x)}+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2p(x)}{2-p(x)}}e^{-\varkappa t}\,dx\,dt.$$

Позначимо $r_1 = \frac{2p'(x)}{p'(x)-2} = \frac{2p(x)}{2-p(x)}$. Оскільки $|\psi_{Rx_i}| \leqslant \mu[h_R]^{\beta-1}$, $|\psi| \leqslant |h_R|^\beta$, то $\left(\frac{|\psi_{R,x_i}|}{\psi_R^{\frac{1}{p'(x)}+\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2p(x)}{2-p(x)}} \leqslant |h_R|^{(\beta-1)\frac{2p(x)}{2-p(x)}-(\frac{3p(x)-2}{2p(x)}\frac{2p(x)}{2-p(x)}\beta)} = |h_R|^{\beta-\frac{2p(x)}{2-p(x)}}$. Тоді $\int\limits_{Q_\tau^R}\left(\frac{|\psi_{R,x_i}|}{\psi_R^{\frac{1}{p'(x)}+\frac{1}{2}}}\right)^{r_1}e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \leqslant TP_nR^n|2R|^{\beta-\frac{2p_1}{2-p_1}} \equiv M_3R^{n+\beta-\frac{2p_1}{2-p_1}}$, де P_n – коефіцієнт в рівності $\int\limits_{B_R}dx = P_nR^n$.

Далі,

$$\mathcal{I}_3 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R}\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}(\psi_R)_{x_j}\times$$
$$\times e^{-\varkappa t}\,dx\,dt \leqslant \frac{\beta^0}{2}\int\limits_{Q_\tau^R}\Bigg[\delta\sum_{i=1}^n(u_{x_i}^{k,m})^2\psi_R +$$
$$+\frac{\left[(u_t^{k,m})^{q(x)} + (u_t^{k,m})^2\right]}{q_0}\delta\psi_R + \delta^{\frac{-q_0-2}{q_0-2}}\times$$
$$\times\frac{q_0-2}{2q_0}\sum_{i=1}^n(\psi_R)^{\frac{-2-q_0}{q_0-2}}(\psi_R)_{x_i}^{\frac{2q_0}{q_0-2}}\Bigg]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt,$$

де $\beta^0 = \max\limits_{i,j}\operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q^R}|b_{ij}(x,t)|$.

$$\mathcal{I}_4 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t) u_{x_i}^{k,m} u_{x_j t}^{k,m} +$$

$$+ b_0(x,t) u^{k,m} u_t^{k,m}\Big] \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\Omega^R} \Big[\frac{\beta_0}{2} |\nabla u^{k,m}|^2 + \frac{\beta_{00}}{2} |u^{k,m}|^2\Big] \psi_R e^{-\varkappa \tau}\, dx -$$

$$- \frac{\beta^0}{2} \int\limits_{\Omega^R} [|\nabla u_0^{k,m}|^2 + |u_0^{k,m}|^2] \psi_R\, dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \Big[(\varkappa\beta_0 - \beta_1) |\nabla u^{k,m}|^2 +$$

$$+ (\varkappa\beta_{00} - \beta_{01}) |u^{k,m}|^2\Big] \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt,$$

де $\delta_0 > 0$, $\beta_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n b_{ijt}^2(x,t)}$, $\beta_{01} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sqrt{b_{0t}^2(x,t)}$, $\beta_{00} = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} b_0^2(x,t)$. Далі,

$$\mathcal{I}_5 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} \sum_{i=1}^n c_i(x,t) u_{x_i}^{k,m} u_t^{k,m} \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau^R} (\frac{\gamma_0}{\delta} |\nabla u^{k,m}|^2 + \delta |u_t^{k,m}|^2) \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt,$$

$\gamma_0 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T^R} \sum\limits_{i=1}^n c_i^2(x,t)$.

$$\mathcal{I}_6 \equiv \int\limits_{Q_\tau^R} a_0(x,t) \Big(|u_t^k|^{q(x)-2} u_t^k - |u_t^m|^{q(x)-2} u_t^m\Big) \times$$

$$\times u_t^{k,m} \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_0 \int\limits_{Q_\tau^R} |u_t^{k,m}|^{q(x)} \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt.$$

На підставі оцінок інтегралів $\mathcal{I}_1$ – $\mathcal{I}_6$ з рівності (5) отримаємо оцінку

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau^R} \Big[(u_t^{k,m})^2 + \beta_0 (\nabla u^{k,m})^2 + \beta_{00} (u^{k,m})^2\Big] \times$$

$$\times \psi_R e^{-\varkappa\tau}\, dx + \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\Big(\frac{\varkappa}{2} + \frac{1}{2} - 2\delta - \frac{\delta d^0}{2q_0} - \frac{\delta\beta^0}{2q_0}\Big) \times$$

$$\times (u_t^{k,m})^2 + \sum_{i=1}^n \Big(\alpha_0 - \frac{C_1 \delta (p_1 - 1)}{p_1}\Big) |\theta_i u_{x_i t}^{k,m}| +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \Big(d_0 - \frac{\delta d^0}{2}\Big) \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^{k,m})^2 + (\frac{\varkappa\beta_0}{2} - \frac{\beta_1}{2} +$$

$$+ \frac{\beta^0 \delta}{2} - \frac{\gamma^0}{\delta}) \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{k,m})^2 + \Big(\alpha_0 - \frac{\delta\beta^0}{2q_0} - \frac{\delta d^0}{q_0}\Big) \times$$

$$\times |u_t^{k,m}|^{q(x)} + \frac{1}{2} (\varkappa\beta_{00} - \beta_{01}) |u^{k,m}|^2\Big] \psi_R e^{-\varkappa t}\, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_\tau^R} \Big[\frac{(q_0 - 2) \delta^{\frac{-q_0-2}{q_0-2}} d^0}{q_0} \sum_{i=1}^n \Bigg(\frac{|\psi_{Rx_i}|^{\frac{2q_0}{q_0-2}}}{\psi_R^{-\frac{-2-q_0}{q_0-2}}}\Bigg) +$$

$$+ \frac{\delta^{\frac{2p(x)(2-3p(x))}{2-p(x)}}}{\frac{2p(x)}{2-p(x)}} \sum_{i=1}^n \Bigg(\frac{|\psi_{Rx_i}|}{\psi_R^{\frac{1}{p'(x)} + \frac{1}{2}}}\Bigg)^{\frac{2p(x)}{2-p(x)}} + \frac{\beta_0}{2} \delta^{\frac{-q_0-2}{q_0-2}} \times$$

$$\times \frac{q_0 - 2}{2q_0} (\psi_R)^{\frac{-2-q_0}{q_0-2}} \sum_{i=1}^n (\psi_R)_{x_j}^{\frac{2q_0}{q_0-2}}\Big] e^{-\varkappa t}\, dx\, dt.$$

Виберемо числа $\delta = \min\{\frac{\alpha_0 p_1}{c_1(p_1-1)};\ \frac{2d_0}{d_0+1};\ \frac{2q_0\alpha_0}{\beta^0+1}\}$; $\varkappa = \max\{\frac{\beta_{01}}{\beta_{00}} + 1;\ \frac{\beta_1 - \frac{\beta^0\delta}{2} - \frac{\gamma^0}{\delta}}{\beta_0} + 1;\ 2\delta + \frac{\delta}{2q_0}(1 + \beta^0) + \frac{d^0\delta}{q_0}\}$. Нехай R_1 – довільне додатне число більше за R_0. Виберемо числа k та m так, щоб $k > R_1$, $s > R_1$. Тоді з попередньої оцінки для $R > R_1$ отримаємо

$$\int\limits_{\Omega^{R_1}} (R - R_1)^\beta \Big[(u_t^{k,m})^2 + |\nabla u^{k,m}|^2 +$$

$$+ |u^{k,m}|^2\Big] dx + \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} (R - R_1)^\beta \Big[(u_t^{k,m})^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n (u_{x_i t}^{k,m})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{k,m})^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^n |\theta_i u_{x_i t}^{k,m}| + |u_t|^{q(x)} + |u^{k,m}|^2\Big] dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \Big(R^{n+\beta-\frac{2p_1}{2-p_1}} + R^{n+\beta-\frac{q_0}{q_0-2}}\Big),$$

де стала M_1 не залежить від R. Отже,

$$\int\limits_{\Omega^{R_1}} \left[(u_t^{k,m})^2 + |\nabla u^{k,m}|^2 + |u^{k,m}|^2\right] dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \left[(u_t^{k,m})^2 + \sum_{i=1}^{n}(u_{x_it}^{k,m})^2 + \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}^{k,m})^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} |\theta_i u_{x_it}^{k,m}| + |u_t|^{q(x)} + |u^{k,m}|^2\right] dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \left(\frac{R}{R-R_1}\right)^{\beta} \left(R^{n-\frac{2p_1}{2-p_1}} + R^{n-\frac{q_0}{q_0-2}}\right). \quad (6)$$

Для достатньо великих R при $n < \frac{2p_1}{2-p_1}$ та для випадку, коли $q_1 > 2$ і $n < \frac{q_0}{q_0-2}$, тобто, для довільних степенів $p(x) \in (\frac{2n}{2+n}; 2]$ та $q(x) \in (2, \infty)$, права частина цієї нерівності є як завгодно малою. Отже, з (6) випливає, що $\{u_t^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u_{x_i}^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ – фундаментальна в $C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\{u_t^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u_{x_i}^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u_{x_it}^k\}_{k=1}^\infty$ – в $L^2([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$. З леми 1 [6, с. 46] та (6) випливає, що $\|u_t^k - u_t^m; L^{q(x)}_{loc}(\overline{\Omega})\| \leqslant M_1$. Тому $\{u_t^k\}_{k=1}^\infty$ збігається сильно в $L^{q(x)}([0,T]; L^{q(x)}_{loc}(\overline{\Omega}))$. Оскільки $\{u_{x_it}^k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $L^2([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, функція $p(x) < 2$, то $\{u_{x_it}^k\}_{k=1}^\infty$ фундаментальна в $L^{p(x)}([0,T]; L^{p(x)}_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Оскільки послідовності $\{u_{x_it}^k\}_{k=1}^\infty$, $\{u_t^k\}_{k=1}^\infty$ збігаються сильно в $L^2((0,T); L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, то існує підпослідовність цих послідовностей, яка збігається майже всюди на кожній обмеженій підобласті області Q_T. Збережемо за нею те саме позначення. Крім того, з [1] випливає, що $\||u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k; L^{p'(x)}_{loc}(\overline{\Omega})\| \leqslant M_2$. З леми випливає, що

$$|u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it}$$

слабко в $L^{p'(x)}([0,T];\ L^{p'(x)}_{loc}(\overline{\Omega}))$;

$$|u_t^k|^{q(x)-2}u_t^k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u_t|^{q(x)-2}u_t$$

слабко в $L^{q(x)}([0,T];\ L^{q(x)}_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Для функцій $\{u^k\}_{k=1}^\infty$ виконується рівність

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-v_t u_t^k + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t) u_{x_it}^k v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_it}^k|^{p(x)-2}u_{x_it}^k v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i}^k v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i}^k v +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t^k|^{q(x)-2}u_t^k v + b_0(x,t)u^k v -$$

$$- f_0(x,t)v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)v_{x_i}\Big]\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_T} u_t^k v\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1^k(x) v\, dx = 0$$

для всіх функцій $v \in V_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$, які мають обмежений носій. Перейдемо до границі при $k \to \infty$. Врахувавши отримані збіжності, матимемо

$$\int\limits_{Q_T} \Big[-v_t u_t + \sum_{i,j=1}^{n} d_{ij}(x,t) u_{x_it} v_{x_j} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)|u_{x_it}|^{p(x)-2}u_{x_it} v_{x_i} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i(x,t)u_{x_i} v +$$

$$+ a_0(x,t)|u_t|^{q(x)-2}u_t v + b_0(x,t)u v -$$

$$- f_0(x,t)v - \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)v_{x_i}\Big]\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega_T} u_t v\, dx - \int\limits_{\Omega_0} u_1(x) v\, dx = 0$$

для всіх функцій $v \in V_{2,\mathrm{loc}}(\overline{Q}_T)$ з обмеженим носієм.

Звідси випливає результат теореми 2.

Аналогічно доводимо теорему єдиності розв'язку.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді узагальнений розв'язок задачі (1), (2), (3) єдиний.*

Доведення. Нехай існує два розв'язки (u_1 і u_2) задачі (1), (2), (3). Тоді їх різниця $u^{1,2} =$

$u_1 - u_2$ задовольнятиме рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big[\frac{\varkappa}{2}(u_t^{1,2})^2\psi_R + \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(x,t)u_{x_it}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi_R)_{x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(x,t)\left(|u_{x_it}^1|^{p(x)-2}u_{x_it}^1 - |u_{x_it}^2|^{p(x)-2}u_{x_it}^2\right)\times$$
$$\times(u_t^{1,2}\psi_R)_{x_i} + \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x,t)u_{x_i}^{1,2}(u_t^{1,2}\psi_R)_{x_j} +$$
$$+\sum_{i=1}^n c_i(x,t)u_{x_i}^{1,2}u_t^{1,2}\psi_R + a_0(x,t)\times$$
$$\times(|u_t^1|^{q(x)-2}u_t^1 - |u_t^2|^{q(x)-2}u_t^2)u_t^{1,2}\psi_R +$$
$$+b_0(x,t)u^{1,2}u_t^{1,2}\psi_R\Big]e^{-\varkappa t}\,dx\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u_t^{1,2})^2\psi_R e^{-\varkappa\tau}\,dx = 0.$$

Аналогічно як в теоремі 2 отримуємо оцінку

$$\int\limits_{\Omega^{R_1}} \left[(u_t^{1,2})^2 + |\nabla u^{1,2}|^2 + |u^{1,2}|^2\right]dx +$$
$$+\int\limits_{Q_\tau^{R_1}} \Bigg[(u_t^{1,2})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_it}^{1,2})^2 + \sum_{i=1}^n (u_{x_i}^{1,2})^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^n |\theta_i u_{x_it}^{1,2}| + |u_t|^{q(x)} + |u^{1,2}|^2\Bigg]dx\,dt \leqslant$$
$$\leqslant M_1\left(\frac{R}{R-R_1}\right)^\beta\left(R^{n-\frac{2p_1}{2-p_1}} + R^{n-\frac{q_0}{q_0-2}}\right).$$

Для достатньо великих R при $n < \frac{2p_1}{2-p_1}$ та для випадку, коли $q_1 > 2$ і $n < \frac{q_0}{q_0-2}$, тобто, для довільних степенів $p(x) \in (\frac{2n}{2+n}; 2]$ та $q(x) \in (2,\infty)$, права частина цієї нерівності є як завгодно малою.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kováčik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{l,p(x)}$ // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41. – № 4. – P. 592-618.

2. *Fan X.L., Zhao L.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{m,p(x)}$// J. Math. Anal. Appl. – 2001. – Vol. 263. – P. 424-446.

3. *Edmunds D. E., Rákosnik J.* Sobolev embedding with variable exponent// Studia Math – 2000. – Vol. 143. – P. 267-293.

4. *Dinu T. L.* On a nonlinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent// Сибирские электронные математические известия.– 2005. – Т. 2. – С. 208-217.

5. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для одного параболічного рівняння // Мат. методи та фіз. - мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 3. – С. 56–63.

6. *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва //Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44 – 61.

7. *Доманська Г.П., Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Задача для нелінійного гіперболічного рівняння третього порядку // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. Чернівці. ЧНУ. – 2005. – Вип. 269. – С. 34 - 42.

8. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка. – Новосибирск, 1990.

9. *Кожанов А. И.* Краевые задачи и свойства решений для уравнений третьего порядка. – Новосибирск, 1989.

10. *Zhijian Yang.* Cauchy problem for quasi-linear wave equations with nonlinear damping and source terms // J. Math. Analisys and Appl. – 2004. – Vol. 300. – P. 218-243.

11. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Существование растущих на бесконечности обобщенных решений смешанной задачи для некоторых эволюционных уравнений// Докл. АН УССР, Сер. А. – 1989. – № 12. – С. 20 – 23.

12. *Шишков А.Е., Слепцова И.П.* Классы единствености и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях// Сиб. мат. журн. – 1991. – Т. 37, № 5. – С. 166 – 178.

13. *Слепцова И.П., Шишков А.Е.* Принцип Фрагмена-Линделёфа для некоторых квазилинейных эволюционных уравнений второго порядка// Укр. матем. журн. –2005. – Т.57, № 2. – С. 239 – 249.

14. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М, 1978.

Стаття надійшла до редколегії 22.05.2006