УДК 517.956

©2006 р. В.І. Мироник

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Досліджуються оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку у просторах періодичних функцій; розвивається теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами.

The generalized differential operators of infinite order in the spaces of periodic functions are investigated. The theory of the Cauchy problem for evolution equations with such operator is developed.

При розв'язуванні багатьох задач аналізу та математичної фізики широко використовуються простори періодичних функцій та зображення таких функцій у вигляді тригонометричних рядів. З розвитком теорії узагальнених функцій тригонометричні ряди з необмежено зростаючими коефіцієнтами дістали природну інтерпретацію у рамках цієї теорії; зокрема, теорія гіперфункцій та ультрарозподілів, розвинена в працях Кете, Комацу, М.Л. Горбачука, В.І. Горбачук (див. [1-3]) дозволяє вивчати тригонометричні ряди з коефіцієнтами, які зростають швидше за будь-який степінь. Із створенням теорії узагальнених функцій розширилось також поняття границі, а, отже, і граничного значення. Це, в свою чергу, дає можливість будувати теорію граничних значень у різних просторах узагальнених функцій для широких класів рівнянь з частинними похідними як скінченного, так і нескінченного порядків. У даній роботі будуються оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку, які діють у просторах періодичних функцій, описуються множини початкових значень гладких розв'язків еволюційних рівнянь з такими операторами, встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для вказаних рівнянь з початковими умовами з просторів узагальнених періодичних функцій. Із вказаних результатів випливають відомі факти теорії періодичної задачі Коші у просторах ультрарозподілів Жевре.

1. Простори основних та узагальнених періодичних функцій.

Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx}, x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Z}_+, i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел. Зрозуміло, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай $T_m, m \in \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T = \bigcup\limits_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n, n \in \mathbb{N}\} \subset T$ збігається в T до полінома P (записується: $P_n \xrightarrow{T} P, n \to \infty$), якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m) і $c_{k,p_n} \to c_{k,p}$ при $n \to \infty$ для кожного k: $0 \leq |k| \leq m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індуктивної границі просторів T_m: $T = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{ind T_m}$.

У T природним чином вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки

$$(P*Q)(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}P(t)Q(x-t)dt,\ \{P,Q\}\subset T,$$

які є неперервними в T.

Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи T' назвемо 2π-періодичними узагальненими функціями. Операція диференціювання в T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)},P\rangle=(-1)^k\langle f,P^{(k)}\rangle, P\in T, k\in\mathbb{N}$$

(символом $\langle f,\cdot\rangle$ позначається дія функціоналу f на основний елемент). Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним. В T' визначена також операція згортки:

$$\langle f*g,P\rangle=\langle f(x),\langle g(y),P(x+y)\rangle\rangle,$$

$\{f,g\}\subset T',\ \forall P\in T.$

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f\in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)e^{ikx}$, де $c_k(f)=\langle f,e^{-ikx}\rangle,\ k\in\mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f\in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [4]. Звідси випливає також, що T лежить щільно в T'. Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f\in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}c_ke^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k,k\in\mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k,k\in Z_+\}$, $m_0=1$, додатних чисел, яка володіє властивостями: 1) $\forall\alpha>0\ \ \exists c_\alpha>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ \ m_k\geq c_\alpha\cdot\alpha^k$ (тобто $\{m_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$ зростає швидше за експоненту); 2) $\exists M>0\ \ \exists h>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ \ m_{k+1}\leq Mh^km_k$ (стабільність відносно операції диференціювання); 3) $\exists A>0\ \ \exists L>0\ \ \forall\{k,l\}\subset\mathbb{Z}_+:\ \ m_k\cdot m_l\leq AL^{k+l}m_{k+l}$ (стабільність відносно операції множення); 4) $\exists B>0\ \exists\, s>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+:\ \ m_k\leq Bs^k\min\limits_{0\leq l\leq k}m_{k-l}m_l$ (стабільність відносно згортки); 5) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{m_k}}{k}=0$ (умова квазіаналітичності).

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду:

$$m_k=(k!)^\beta, m_k=k^{k\beta}, 0<\beta<1.$$

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх $2\pi-$періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі $c,B>0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)|\leq cB^km_k, k\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Множина функцій $\varphi\in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B>0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B=\sup_{\substack{x\in[0,2\pi]\\k\in\mathbb{Z}_+}}\frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^km_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle\subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1<B_2$ і $H\langle m_k\rangle=\bigcup\limits_{B>0}H_B\langle m_k\rangle$. Отже, в $H\langle m_k\rangle$ природно ввести топологію індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$: $H\langle m_k\rangle=\lim\limits_{B\to\infty}\mathrm{ind H_B\langle m_k\rangle}$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Внаслідок властивостей 2) - 4) послідовності $\{m_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічні алгебри [4]. Якщо послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку β.

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійно неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [4], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k\rangle$: $H'\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B\to\infty} prH'_B\langle m_k\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$.

У праці [4] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів. Покладемо

$$\rho(\lambda) = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\lambda|^k}{m_k},\ |\lambda| \geq 1.$$

Із властивостей послідовності $\{m_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ монотонно зростає на $[1, +\infty)$, диференційовна на $(1, +\infty)$, функція $\ln\rho$–опукла на $[1, +\infty)$, тобто $\forall\{x_1, x_2\} \subset [1, +\infty)$:

$$\ln\rho(x_1) + \ln\rho(x_2) \leq \ln\rho(x_1 + x_2) \qquad (2)$$

((2) відповідає означенню опуклої функції f з [5]:
$f(x_1) + f(x_2) \leq f(x_1 + x_2), x_1 > 0, x_2 > 0)$

Нехай
$H_{\{\alpha\}} := \{f \in T'|\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right) < \infty,$ $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle\}, \quad \alpha > 0.$

$H_{\{a\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f, g)_{H_{\{\alpha\}}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right),$$

$\{f, g\} \subset H_{\{\alpha\}}$. Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}} \supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\} = \bigcup\limits_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}}$. Природно в $H\{m_k\}$ ввести топологію індуктивної границі: $H\{m_k\} = \lim\limits_{\alpha\to\infty} indH_{\{\alpha\}}$. У праці [4] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не тільки як множини, але і топологічно. Звідси випливає, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ можна охарактеризувати так [4]:

$$(f \in H\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall k \in Z :$$
$$|c_k(f)| \leq c\rho^{-1}(\mu|k|));$$
$$(f \in H'\langle m_k\rangle) \Leftrightarrow (\forall\mu > 0 \quad \exists c = c(\mu) > 0$$
$$\forall k \in \mathbb{Z} : |c_k(f)| \leq c\rho(\mu|k|));$$

Якщо $m_k = k^{k\beta}, \quad \beta > 0$, то $\rho(\lambda) \sim \exp(|\lambda|^{\frac{1}{\beta}})$, тобто в цьому випадку для $f \in T'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f \in G_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\exists\mu > 0 \quad \exists c > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} :$$
$$|c_k(f)| \leq c\exp(-\mu|k|^{\frac{1}{\beta}}));$$
$$(f \in G'_{\{\beta\}}) \Leftrightarrow (\forall\mu > 0 \quad \exists c = c(\mu) > 0$$
$$\forall k \in \mathbb{Z} : |c_k(f)| \leq c\exp(\mu|k|^{\frac{1}{\beta}})).$$

2. Псевдодиференціальні оператори нескінченного порядку

Нехай $G : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ – деяка неперервна парна функція. За функцією G у просторі T' побудуємо оператор

$$\hat{A} : T' \ni f \to \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)c_k(f)e^{ikx} \in T',$$
$$c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle.$$

Легко бачити, що оператор $\hat{A}$ є лінійним і неперервним в T'. Оператор $\hat{A}$ згортувач у алгебрі T'. Справді, якщо розглянути узагальнену функцію

$$f_G(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)e^{ikx} \in T',$$

то для довільної узагальненої функції $f \in T'$ маємо

$$\hat{A}f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} G(k)c_k(f)e^{ikx} = f * f_G,$$

бо

$$c_k(f * f_G) = c_k(f)c_k(f_G) = c_k(f)G(k),\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Якщо $G(x) = |x|^\gamma, \ \ \gamma > 0, \ \ x \in \mathbb{R}$, то $\hat{A}$ збігається з оператором $\hat{A}_\gamma$ дробового диференціювання в T' [6].

Зазначимо, що сім'я операторів $\hat{A}_\gamma, \ \ \gamma > 0$, володіє властивостями:

а) $\forall f \in T' \ \forall \{\alpha, \beta\} \subset (0, \infty)$:

$$\hat{A}_\alpha(\hat{A}_\beta f) = (-1)^l \hat{A}_{\alpha+\beta} f;$$

б) $\forall f \in T' : \ \ \hat{A}_{2l} f = D_x^{2l} f, \ \ l \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Нехай A – звуження оператора $\hat{A}$ на простір $H = L_2([0, 2\pi])$. Тоді A – невід'ємний самоспряжений оператор в H зі щільною в H областю визначення $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, причому $T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$.*

Доведення. Із означення оператора A та теореми Ріса-Фішера випливає, що

$$\mathcal{D}(A) = \Bigg\{ \varphi \in H \ | \ \sum_{k \in \mathbb{Z}} G^2(k) |c_k(\varphi)|^2 < \infty,$$

$$c_k(\varphi) = (\varphi, e^{-ikx}) \ , \ k \in \mathbb{Z} \} . \qquad (3)$$

Якщо $\varphi \in T \subset H \subset T'$, то $\varphi = \sum\limits_{k=-m(\varphi)}^{m(\varphi)} c_k e^{ikx}$, при цьому

$$\hat{A}\varphi = \sum_{k=-m}^{m} G(k) c_k e^{ikx}.$$

Отже, для $\varphi \in T$ умова (3) виконується, тобто $T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Цим доведено, що

$$\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = H.$$

Оператор A симетричний в H, бо

$$(A\varphi, \psi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(k) c_k(\varphi) \overline{c_k(\psi)} =$$

$$= (\varphi, A\psi), \ \ \{\varphi, \psi\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Оскільки $\overline{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = H$, то існує оператор A^*, область визначення $\mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ якого складається з тих елементів $\psi \in H$, для яких існують елементи $\psi^* \in H$, що задовольняють співвідношення $(A\varphi, \psi) = (\varphi, \psi^*)$ для довільного $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$; при цьому $A^*\psi = \psi^*$.

Доведемо, що $A^* \subseteq A$ (бо включення $A \subseteq A^*$ для симетричного оператора є очевидним). Нехай $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^*)$ і $A^*\psi = \psi^*$. Покладемо

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\psi) e^{ikx}, \ \psi^* = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\psi^*) e^{ikx}.$$

Тоді

$$c_k(\psi^*) = (\psi^*, e^{-ikx}) = \overline{(e^{-ikx}, A^*\psi)} =$$

$$\overline{(Ae^{-ikx}, \psi)} = (\psi, Ae^{-ikx}) =$$

$$= G(-k)(\psi, e^{-ikx}) = G(k) c_k(\psi)$$

(тут ми скористались тим, що $e^{-ikx} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при кожному $k \in \mathbb{Z}$, причому e^{-ikx} є власним вектором оператора A, а $G(-k) = G(k)$ – відповідне власне число).

Звідси знаходимо, що

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} G^2(k) |c_k(\psi)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(\psi^*)|^2 \equiv \|\psi^*\|_H^2 < \infty,$$

тобто $\psi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Крім того,

$$A\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G(k) c_k(\psi) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(\psi^*) e^{ikx} = \psi^*.$$

Отже, $A^* \subseteq A$. Невід'ємність оператора A перевіряється безпосередньо. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Оператор A надалі називатимемо псевдодиференціальним оператором у просторі $L_2([0, 2\pi])$.*

Розглянемо нескінченно диференційовну на $[0, \infty)$ функцію

$$\varphi(x) \ = \ \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j,$$

яка набуває додатних значень і побудуємо у просторі T' за оператором $\hat{A}$ оператор $\varphi(\hat{A})$: $\varphi(\hat{A}) f \ = \ \sum\limits_{j=0}^{\infty} b_j \hat{A}^j f, \ \forall f \ = \ \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e^{ikx} \ \in \ T'$. Оскільки

$$\hat{A}^j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G^j(k) c_k(f) e^{ikx},$$

то

$$\varphi(\hat{A}) f = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} G^j(k) c_k(f) e^{ikx} \right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j G^j(k)\right)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\varphi(G(k))e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)c_k(f)e^{ikx}, \quad \lambda_k = G(k).$$

Нехай A_φ – звуження оператора $\varphi(\hat{A})$ на H. Тоді A_φ – невід'ємний самоспряжений оператор в H, зі щільною областю визначення $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\varphi)$, причому $T \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_\varphi)$. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 1. З'ясуємо, за яких умов на функцію φ оператор A_φ буде неперервним у просторі $H\langle m_k\rangle$. Для цього розглянемо елемент F_φ з простору T', побудований за функцією φ:

$$F_\varphi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(G(k))e^{ikx} \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)e^{ikx}.$$

Теорема 2. *Якщо $F_\varphi \in H'\langle m_k\rangle$, то оператор A_φ неперервний у просторі $H\langle m_k\rangle$.*

Доведення. Нехай $F_\varphi \in H'\langle m_k\rangle$, тобто

$$\forall \mu > 0\ \exists c = c(\mu) > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$\varphi(\lambda_k) \le c\rho(\mu|k|). \tag{4}$$

Доведемо, що тоді $A_\varphi\psi \in H\langle m_k\rangle$ для довільного елемента $\psi \in H\langle m_k\rangle$. Оскільки

$$c_k(A_\varphi\psi) = (A_\varphi\psi, e^{-ikx}) = (\psi, A_\varphi e^{-ikx}) =$$

$$= \varphi(\lambda_k)(\psi, e^{-ikx}) = \varphi(\lambda_k)c_k(\psi),$$

то досить довести, що

$$\exists \mu_0 > 0\ \exists c_0 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|).$$

За умовою $\psi \in H\langle m_k\rangle$, тобто

$$\exists \mu_1 > 0\ \exists c_1 > 0\ \forall k \in \mathbb{Z}:$$

$$|c_k(\psi)| \le c_1\rho^{-1}(\mu_1|k|).$$

Отже,

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le cc_1\rho(\mu|k|)\rho^{-1}(\mu_1|k|) =$$

$$= cc_1 e^{\ln\rho(\mu|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|)}.$$

Візьмемо параметр μ з проміжку $(0, \mu_1)$. Врахувавши нерівність опуклості (2) для функції $\ln\rho$ знайдемо, що

$$\ln\rho(\mu|k|) - \ln\rho(\mu_1|k|) \le -\ln\rho((\mu_1-\mu)|k|) \equiv$$

$$\equiv -\ln\rho(\mu_0|k|),$$

де $\mu_1 - \mu = \mu_0$. Тоді

$$\varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le c_0 e^{-\ln\rho(\mu_0|k|)} = c_0\rho^{-1}(\mu_0|k|),$$

звідки й випливає, що $A_\varphi\psi \in H\langle m_k\rangle$.

Доведемо, що A_φ – неперервний оператор у просторі $H\langle m_k\rangle$, тобто кожну обмежену множину цього простору оператор A_φ відображає у обмежену множину цього ж простору.

Нехай L – обмежена множина у просторі $H\langle m_k\rangle$. Оскільки

$$H\langle m_k\rangle = \bigcup_{\alpha>0} H_{\{\alpha\}},$$

то L – обмежена множина в деякому гільбертовому просторі $H_{\{\alpha_0\}}$, тобто

$$\exists b > 0\ \forall \psi \in L:$$

$$\|\psi\|_{H_{\{\alpha_0\}}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(\psi)|^2\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right) \le b,$$

або

$$\exists b > 0\ \forall \psi \in L: |c_k(\psi)| \le b\rho^{-1}\left(\frac{|k|}{\alpha_0}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

У нерівності (4) покладемо $\mu = \frac{1}{2\alpha_0}$. Тоді, скориставшись нерівністю опуклості (2) знайдемо, що

$$|c_k(A_\varphi\psi)| = \varphi(\lambda_k)|c_k(\psi)| \le$$

$$\le cb\rho^{-1}\left(\left(\frac{1}{\alpha_0} - \mu\right)|k|\right) = b_1 \cdot \rho^{-1}\left(\frac{|k|}{2\alpha_0}\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$,де $b_1 = cb$. Отже, множина $A_\varphi L$ обмежена у просторі $H_{\{2\alpha_0\}}$, тобто у просторі $H\langle m_k\rangle$. Теорема доведена.

Зауваження 2. *Умова $F_\varphi \in H'\langle m_k\rangle$ еквівалентна такій умові на функцію φ:*

$$\forall \mu > 0 \quad \exists c = c(\mu) > 0:$$

$$0 < \varphi(G(\lambda)) \le c\rho(\mu\lambda), \lambda > 0.$$

Зауваження 3. *Якщо функція φ задовольняє умову*

$$\exists\mu_0 \quad \exists c_0 > 0 :$$

$$0 < \varphi(G(\lambda)) \le c_0\rho(\mu_0\lambda),\ \lambda > 0,$$

то оператор A_φ неперервно відображає простір $H_{\alpha+\mu_0}\langle m_k\rangle$ у простір $H_\alpha\langle m_k\rangle$ для довільного $\alpha > 0$.

3. Граничні властивості гладких розв'язів псевдодиференціальних рівнянь. Задача Коші

Далі вважаємо, що функції G та φ додатково задовольняють такі умови:

$$\exists\delta > 0 :\ G(x) \ge \delta|x|^\gamma,\ \gamma \ge 1,\ x \in \mathbb{R},$$

$$\exists p_0 \in \mathbb{N}\ \exists c_0 > 0\ \exists\varepsilon_0 > 0 :$$
$$\varphi(\lambda) \ge c_0 \sqrt[p_0]{\tilde\rho(\varepsilon_0\lambda)},\ \lambda > 0. \tag{5}$$
$$\tilde\rho(\lambda) = \begin{cases} 1, & |\lambda| < 1, \\ \rho(\lambda), & |\lambda| \ge 1. \end{cases}$$

Зазначимо, що з умови 5) на послідовність $\{m_k, k \in \mathbb{Z}\}$ випливає, що функція ρ задовольняє умову:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists c_\varepsilon > 1 \quad \forall\lambda : |\lambda| \ge 1 \Rightarrow \rho(\lambda) \ge c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}.$$

Звідси та з (5) випливає, що

$$\varphi(\lambda) \ge c_0 \sqrt[p_0]{c_\varepsilon} e^{\frac{\varepsilon}{p_0}|\lambda|} \ge \tilde c_0|\lambda|,\ |\lambda| \ge 1. \tag{6}$$

Розглянемо функцію

$$\Gamma(t,x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx},$$

$$\lambda_k = G(k),\ t \in (0,T],\ x \in \mathbb{R}.$$

Лема 1. *Функція $\Gamma(t,\cdot)$ володіє наступними властивостями:*

а) $\Gamma(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$;

б) $\Gamma(t,\cdot)$, *як абстрактна функція параметра t у просторі $H\langle m_k\rangle$, диференційовна по t;*

в) $\Gamma(t,\cdot) \to \delta$ *при* $t \to +0$ *у просторі* $H'\langle m_k\rangle$.

Доведення. а) Зафіксувавши $t \in (0,T]$ та врахувавши нерівності (5), (6) знайдемо, що

$$|\mathcal{D}_x^p\Gamma(t,x)| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-t\varphi(\lambda_k)} \cdot \mathcal{D}_x^p e^{ikx}\right| \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^p e^{-(t-\varepsilon)\varphi(\lambda_k)} e^{-\varepsilon\varphi(\lambda_k)} \le$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^p \cdot (p_0)!}{(t-\varepsilon)^{p_0} \cdot \varphi^{p_0}(\lambda_k)} e^{-\varepsilon\varphi(\lambda_k)} \le$$

$$\le \frac{(p_0)!}{(t-\varepsilon)^{p_0}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon\tilde c_0\lambda_k} \frac{|k|^p}{\tilde\rho(\varepsilon_0\lambda_k)},\ 0 < \varepsilon < t.$$

Оскільки

$$\lambda_k = G(k) \ge \delta|k|^\gamma \ge \delta|k|,\ k \in \mathbb{Z};$$

$$\tilde\rho(\varepsilon_0\lambda_k) \ge \tilde\rho(\varepsilon_0\delta|k|),\ k \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

то

$$|\mathcal{D}_x^p\Gamma(t,x)| \le \frac{(p_0)!}{(t-\varepsilon)^{p_0}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon\tilde c_0\delta|k|} \frac{|k|^p}{\tilde\rho(\varepsilon_0\delta|k|)} =$$

$$= \frac{(p_0)!}{(t-\varepsilon)^{p_0}(\varepsilon_0\delta)^p} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon\tilde c_0\delta|k|} \frac{(\varepsilon_0\delta|k|)^p}{\tilde\rho(\varepsilon_0\delta|k|)}\ .$$

Далі скористаємося оцінками

$$\frac{(\varepsilon_0\delta|k|)^p}{\tilde\rho(\varepsilon_0\delta|k|)} \le \sup_{\lambda\ne0} \frac{|\lambda|^p}{\tilde\rho(\lambda)} = \sup_{\lambda\ne0} \frac{|\lambda|^p}{\sup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\lambda|^s}{m_s}},$$

$$\sup_{s\in\mathbb{Z}_+} \frac{|\lambda|^s}{m_s} \ge \frac{|\lambda|^p}{m_p}\ .$$

Тоді

$$\frac{\varepsilon_0\delta|k|^p}{\rho(\varepsilon_0\delta|k|)} \le m_p\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

В результаті дістаємо нерівності

$$|\mathcal{D}_x^p\Gamma(t,x)| \le \tilde c\tilde B^p m_p,\ p \in \mathbb{Z}_+\,,$$

де

$$\tilde c = \frac{(p_0)!}{(t-\varepsilon)^{p_0}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon\tilde c_0\delta|k|}\ ,\ \tilde B = \frac{1}{\varepsilon_0\delta}\ ,$$

що й потрібно було довести.

б) Доведемо, що

$$\Phi_{t,\Delta t}(x) := \frac{1}{\Delta t}\,[\,\Gamma(t+\Delta t, x) -$$

$$- \Gamma(t,x)] \to \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x),\ \Delta t \to 0,$$

у тому розумінні, що:

1) $\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x) \longrightarrow \mathcal{D}_x^p \left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)\right),\ \Delta t \to 0$, рівномірно по x (для кожного фіксованого $m \in \mathbb{Z}_+$);

2) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x)| \le cB^p m_p$,

де сталі $c, B > 0$ не залежать від Δt (для досить малих значень Δt).

Передусім зазначимо, що функція $\Gamma(t,\cdot)$ диференційовна по t у звичайному розумінні. Для цього досить довести, що ряд

$$-\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx} \tag{8}$$

збігається рівномірно по $t \in [\varepsilon, T]$, $\varepsilon > 0$, при фіксованому x.

Врахувавши умову (5), яку задовольняє функція φ, а також нерівності (7) знайдемо, що на відрізку $[\varepsilon, T]$

$$\varphi(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)} \le \frac{(p_0+1)!\varphi(\lambda_k)}{t^{p_0+1}\varphi^{p_0+1}(\lambda_k)} =$$

$$= \frac{(p_0+1)!}{t^{p_0+1}\varphi^{p_0}(\lambda_k)} \le \frac{(p_0+1)!}{c_0^{p_0} t^{p_0+1} \tilde{\rho}(\varepsilon_0 |k|)}.$$

Із властивостей функції ρ випливає, що

$$\tilde{\rho}(\varepsilon_0 \delta |k|) \ge \beta e^{\alpha|k|},\ \beta > 0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді

$$\varphi(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)} \le b e^{-\alpha|k|},\ b = \frac{(p_0+1)!}{c_0^{p_0} t^{p_0+1}\beta}.$$

Звідси вже випливає рівномірна збіжність ряду (8) на $[\varepsilon, T]$. Цим доведено, що функція $\Gamma(t,x)$ диференційовна по t на відрізку $[\varepsilon, T]$. Оскільки $\varepsilon > 0$ – довільне, то функція $\Gamma(t,\cdot)$ диференційовна по t на проміжку $(0, T]$, при цьому правильними є співвідношення

$$\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x) = -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx}.$$

Оскільки

$$\Phi_{t,\Delta t}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\Delta t}\left[e^{-(t+\Delta t)\varphi(\lambda_k)} - e^{-t\varphi(\lambda_k)}\right] e^{ikx} = \Gamma(t,x) * \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(t, x-\xi)\varphi(\xi) d\xi =$$

$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) e^{(-t+\theta_k\Delta t)\varphi(\lambda_k)+ikx},\ 0 < \theta_k < 1,$$

то

$$\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x) = -i^p \times$$

$$\times \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) \cdot k^p e^{-(t+\theta_k\Delta t)\varphi(\lambda_k)+ikx} \tag{9}$$

(якщо $\Delta t < 0$, то вважаємо Δt таким, що $t + \Delta t \ge t/2$; тому $t + \theta_k \Delta t > t + \Delta t \ge t/2$). Крім того, при кожному $x \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}_x^p \left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)\right) = -i^p \times$$

$$\times \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) k^p e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx}. \tag{10}$$

Із співвідношень (9) та (10) випливає, що

$$0 \le \left|\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x) - \mathcal{D}_x^p \left(\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x)\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)} |e^{-\theta_k \Delta t \varphi(\lambda_k)} - 1| \le$$

$$\le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^3(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)} \cdot |\Delta t| \to 0,\ \Delta t \to 0.$$

Тут враховано те, що ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^3(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)}$ при фіксованому $t > 0$ є збіжним: як і раніше можна довести нерівність $\varphi^3(\lambda_k) e^{-t\varphi(\lambda_k)} \le \tilde{b} e^{-\alpha|k|}$, $\tilde{b} = \tilde{b}(t) > 0$, звідки і випливає збіжність вказаного ряду. Отже, умова 1) виконується.

Очевидно також, що

$$|\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x)| \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k) |k|^p e^{-t\varphi(\lambda_k)},\ x \in \mathbb{R}.$$

Аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні властивості а) встановлюємо, що

$$|\mathcal{D}_x^p \Phi_{t,\Delta t}(x)| \le cB^p m_p,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

де сталі $c, B > 0$ залежать від t і не залежать від Δt. Твердження доведено.

в) Нехай φ – довільна функція з простору $H\langle m_k\rangle$. Тоді

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\{-t\varphi(\lambda_k)+ik(x-\xi)\}\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi) \exp\{-t\varphi(\lambda_k) + ikx\} \underset{t\to+0}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to+0}{\longrightarrow} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi)e^{ikx} = \varphi(x),$$

де

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi)e^{-ik\xi}d\xi \quad -$$

коефіцієнти Фур'є функції φ. Отже,

$$\Gamma(t,\cdot) * \varphi \to \varphi = \delta * \varphi,\ t \to +0,$$

тобто $\Gamma(t,\cdot) \to \delta$ при $t \to +0$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.

Лема доведена.

Зауваження 4. *Із наведених результатів випливає також, що* $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ *при кожному* $t \in (0,T]$.

Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$u'(t) + A_\varphi u(t) = 0,\ t \in (0,T], \qquad (11)$$

де A_φ – оператор, побудований за функцією φ, який діє у просторі $H\langle m_k\rangle$. Рівняння (11) називатимемо *параболічним псевдодиференціальним рівнянням.*

Під розв'язком рівняння (11) розумітимемо функцію $u : (0,T] \ni t \to u(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$, яка диференційовна по t і задовольняє рівняння (11).

Теорема 3. Для довільного $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle$ функція

$$u(t,x) = (f * \Gamma)(t,x) = \langle f, \Gamma(t,x-\cdot)\rangle \quad (12)$$

є розв'язком рівняння (11).

Доведення. Функція u диференційовна по t. Справді,

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}[u(t+\Delta t,x) - u(t,x)] =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{\Delta t}\langle f, \Gamma(t+\Delta t, x-\xi) - \Gamma(t,x-\xi)\rangle =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \langle f, \Phi_{t,\Delta t}(x-\xi)\rangle.$$

За доведеним раніше (лема 1, твердження б)) $\Phi_{t,\Delta t}(x-\xi) \to \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x-\xi)$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $H\langle m_k\rangle$ (при фіксованому $x \in \mathbb{R}$). Тоді, з властивості неперервності функціоналу f випливає, що

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \langle f, \lim_{\Delta t\to 0} \Phi_{t,\Delta t}(x-\xi)\rangle =$$

$$= \langle f, \frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x-\xi)\rangle = (f * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma)(t,x)$$

(нагадаємо, що $\frac{\partial}{\partial t}\Gamma(t,x-\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ як функція ξ при кожному $t \in (0,T]$). Оскільки $\Gamma(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$, $f \in H'\langle m_k\rangle$, то $\{(f*\Gamma)(t,\cdot),\ (f*\frac{\partial}{\partial t}\Gamma)(t,\cdot)\} \subset H\langle m_k\rangle$. Отже, $A_\varphi(f*\Gamma)(t,\cdot) \in H\langle m_k\rangle$ при кожному $t \in (0,T]$, при цьому, згідно з означенням оператора A_φ,

$$A_\varphi(f*\Gamma)(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)c_k(f*\Gamma)e^{ikx} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\lambda_k)c_k(f)e^{-t\varphi(\lambda_k)+ikx} =$$

$$= -\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\frac{\partial}{\partial t}(e^{-t\varphi(\lambda_k)})e^{ikx} =$$

$$= -\left(f * \frac{\partial}{\partial t}\Gamma\right)(t,x).$$

Таким чином, функція $u(t,x) = (f*\Gamma)(t,x)$ дійсно є розв'язком рівняння (11).

Наслідок 1. *Граничне значення* $u(t,\cdot)$ *при* $t \to +0$ *існує в просторі* $H'\langle m_k\rangle$, *тобто*

$$u(t,\cdot) \to f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)e^{ikx} \in H'\langle m_k\rangle,\ t \to +0.$$

Доведення. Ця властивість є наслідком твердження в) леми 2.6.

Задача Коші для рівняння (11) полягає у відшуканні розв'язку цього рівняння, який задовольняє початкову умову $u(0,\cdot) = \lim_{t\to+0} u(t,\cdot) = f$, де границя береться у просторі T'.

Теорема 4. *Задача Коші для рівняння (11) коректно розв'язна у просторі початкових даних $H'\langle m_k\rangle$. Її розв'язок зображається формулою (12), при цьому $u(t,\cdot)\to f$ при $t\to+0$ у просторі $H'\langle m_k\rangle$.*

Доведення. Це твердження випливає з теореми 3 та наслідку 1. Властивість єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (11) дістаємо з таких міркувань. Якщо $f=0$, то $c_k=\langle f,e^{-ikx}\rangle=0,\ k\in\mathbb{Z}$, тобто $u(t,\cdot)=0,\ t\in(0,T]$. Властивість неперервної залежності розв'язку від початкової умови є наслідком властивості неперервності згортки узагальненої функції $f\in H'\langle m_k\rangle$ з основною функцією.

Як приклад, розглянемо функцію $\varphi(\lambda)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k!)^\beta},\ \lambda>0,\ \beta\in(0,1)$ – фіксований параметр. Відомо [7], що існують додатні сталі c_1,c_2 такі, що

$$c_1\exp\{\beta\lambda^{1/\beta}\}\le\varphi(\lambda)\le c_2\exp\{2\beta\lambda^{1/\beta}\},\ \lambda>0.$$

Нехай

$$\rho(\mu\lambda)=\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{(\mu\lambda)^k}{k^{k\beta}},\ \lambda\in[0,\infty),$$

$\beta\in(0,1),\ \mu\in(0,\infty)$ (μ,β – параметри). Тоді [8]

$$c\exp\left\{\frac{\beta}{e}(\mu\lambda)^{1/\beta}\right\}\le\rho(\mu\lambda)\le\exp\left\{\frac{\beta}{e}(\mu\lambda)^{1/\beta}\right\}.$$

Врахувавши ці нерівності знаходимо, що якщо $G(\lambda)=|\lambda|$, то функція $\varphi(G(\lambda))=\varphi(\lambda)$ для $\lambda>0$ задовольняє нерівність із зауваження 3 з параметром $\mu_0=(2e)^\beta$, умову (5) з параметрами $\varepsilon_0=\beta,\ p_0=1$. Оператор A_φ у цьому випадку збігається з оператором диференціювання нескінченного порядку $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\mathcal{D}^k}{(k!)^\beta},\ \beta\in(0,1)$; при цьому задача Коші для рівняння (11) з таким оператором коректно розв'язна у просторі початкових даних $G'_{\{\beta\}}=H'\langle k^{k\beta}\rangle$.

Аналогічно встановлюємо, що задача Коші для рівняння (11) з оператором дробового диференціювання нескінченного порядку

$$A_\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A_\gamma^k}{(k!)^\beta},\ \gamma>1,$$

$$A_\gamma\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|k|^\gamma c_k(\varphi)e^{ikx},$$

$$\varphi=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k(\varphi)e^{ikx},$$

коректно розв'язна у просторі $H'\langle k^{k\beta/\gamma}\rangle=G'_{\{\gamma/\beta\}},\ \beta\in(0,1)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Die Randverte einer analytischen Funktionen //Math.Z. – 1952. – Bd.57, N1.– S.13–33.
2. *Komatsu H.* Ultradistributions and hyperfunctions// Lecture Notes in Math.– 1973.–V.287.–P.164–261.
3. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.– Киев:Наук.думка,1984.–284с.
4. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений // Укр. мат. журнал. – 1982. – Т.34, N2. – С.144-150.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.:Физматгиз, 1958.– 274с.
6. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу.–Чернівці: Рута, 1998.– 219с.
7. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576с.
8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.–М.:Физматгиз, 1958.– 307с.

Стаття надійшла до редколегії 16.05.2006