УДК 517.957

©2006 р. О.В.Матвій, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО АПРОКСИМАЦІЮ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для одного класу лінійних диференціально-функціональних рівнянь побудовано і обгрунтовано схему апроксимацiїї послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

The approximation scheme of initial problem for one class of linear differential-functional equations by sequence systems of ordinary differential equations is investigated.

Вступ. Наближена заміна лінійних диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь вивчалась вперше М.М. Красовським [1] при розв'язуванні задачі про побудову оптимального регулятора у системах із запізненням. Обгрунтування наближеної заміни нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням у просторах диференційовних та ліпшицевих функцій досліджено Ю. М. Рєпіним [2]. Тому називатимемо алгоритм апроксимації рівнянь із запізненням, запропонований у працях [1, 2], схемою апроксимації Красовського-Рєпіна.

У загальному випадку розв'язок початкової задачі рівняння із запізненням є тільки неперервною функцією. Аналіз точності апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в цьому випадку проведений в працях [3,4]. Відзначимо, що апроксимація досліджувалась на скінченному інтервалі і точність наближення досягається за рахунок підвищення розмірності апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь.

У даній роботі побудована схема апроксимації лінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь.

1. Постановка задачі. Нехай R^n — n-вимірний евклідів простір з деякою векторною нормою $|\cdot|$, $C = C([\alpha,\beta], R^n)$— простір неперервних функцій, що відображають $[\alpha,\beta]$ в R^n з нормою

$$||\varphi|| = \sup_{\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta} |\varphi(\theta)|, \varphi \in C.$$

Для довільної неперервної функції $x(s)$, визначеної на $[t_0-\tau, T], T, \tau > 0$ і довільного фіксованого $t \in [t_0, T]$, позначатимемо через x_t [5] функцію

$$x_t(\theta) = x(t+\theta),\ \theta \in [-\tau, 0].$$

Нехай $f(t,\varphi) \in R^n$ — функція, що визначена для всіх $\varphi \in C$, $t \in [t_0,\infty)$. Позначаючи $\dfrac{dx(t)}{dt}$ правосторонню похідну функції $x(s)$ при $s = t$, розглянемо диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x_t). \tag{1}$$

Означення [5]. *Функцію $x(t)$ називатимемо розв'язком рівняння (1) з початковою функцією $\varphi \in C$ в точці $t = t_0$, якщо існує таке $T > 0$, що* 1) $x_t \in C$ при $t \in [t_0, t_0+T]$; 2) $x_{t_0} = \varphi$; 3) x_t задовольняє рівняння (1) при $t \in [t_0, t_0+T]$.

Умови існування та єдиності розв'язку початкової задачі для рівняння (1) вивчались в працях [5-7]. Зокрема, якщо $f(t,\varphi)$ визначена і неперервна для всіх $t \in R, \varphi \in C$ і глобально ліпшицева по φ, тоді існує єдиний розв'язок рівняння (1) з початковою функцією φ в точці $t = t_0$, який визначений на нескінченному інтервалі $[t_0-\tau,\infty)$.

Розглянемо лінійне диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = L(t, x_t),\ x_{t_0} = \varphi,\ \varphi \in C[-\tau, 0], \qquad (2)$$

де $L(t,\varphi)$—лінійний по φ функціонал, який можна представити у вигляді інтеграла Стільтьєса

$$L(t,\varphi) = \int_{-\tau}^{0} d\eta(t,\theta)\varphi(\theta),$$

$\eta(t,\theta)$—$n \times n$ матриця, елементи якої є функціями обмеженої варіації по θ для кожного t і неперервними по t одностайно відносно θ.

Серед лінійних систем (2) найчастіше у застосуваннях зустрічається система

$$\begin{aligned} x'(t) &= \sum_{k=0}^{p} A_k(t)x(t-\tau_k) + \\ &+ \int_{-\tau}^{0} D(t,\theta)x(t+\theta)d\theta, \qquad (3) \\ x(t) &= \varphi(t),\ t \in [t_0-\tau, t_0], \end{aligned}$$

де $A_k(t),\ k = \overline{0,p}$ — $n \times n$ неперервні матричні функції, $D(t,\theta)$ — $n \times n$ матрична функція, компоненти якої $d_{ij}(t,\theta)$ — неперервні за сукупністю змінних функції на $[t_0, T] \times [-\tau, 0]$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_p = \tau$.

Метою даної роботи є поширення схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь Красовського-Рєпіна [2-4] на випадок початкової задачі для диференціально-функціонального рівняння (3).

2. Схема апроксимації. Нехай $m,\ p \in N$. Рівнянню (3) поставимо у відповідність систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= \sum_{i=0}^{p} A_k(t)z_{l_i}(t) + \\ &+ \frac{m}{\tau}\sum_{i=0}^{m-1} D(t, -\frac{\tau(m-k)}{m})z_{m-i}(t), \\ \frac{dz_j}{dt} &= \frac{m}{\tau}(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \qquad (4) \\ j &= \overline{1,m},\ t \in [t_0, T], \end{aligned}$$

з початковими умовами

$$z_j(t_0) = \varphi\left(t_0 - \frac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{0,m}, \qquad (5)$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$t_0 - \frac{\tau(l_j+1)}{m} < t_0 - \tau_j \leqslant t_0 - \frac{\tau l_j}{m}. \qquad (6)$$

Другий доданок у першому рівнянні (4) одержаний в результаті заміни інтеграла за формулою лівих прямокутників з кроком $h = \dfrac{\tau}{m}$.

Будемо говорити, що система звичайних диференціальних рівнянь (4) апроксимує систему диференціально-функціональних рівнянь (3), якщо будуть виконуватись співвідношення

$$||x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t)|| \to 0,\ j = \overline{0,m},\ t \in [t_0, T]$$
при $m \to \infty$,

де $||\cdot||$ — норма в просторі R^n.

3. Дослідження схеми апроксимації. Дослідимо питання про близкість розв'язків початкової задачі для рівняння (3) та розв'язків задачі Коші (4)-(5).

Розглянемо зображення $z_j(t) = z_j^{(1)}(t) + $ $+z_j^{(2)}(t)$, де $z_j^{(1)}(t)$ та $z_j^{(2)}(t)$ — розв'язки таких задач Коші

$$\begin{aligned} &\frac{\tau}{m}{z'}_1^{(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = x(t), \\ &\frac{\tau}{m}{z'}_j^{(1)}(t) + z_j^{(1)}(t) = z_{j-1}^{(1)}(t), \qquad (7) \\ &j = \overline{2,m},\ t \in [t_0, T], \\ &z_j^{(1)}(t_0) = x\left(t_0 - \frac{j\tau}{m}\right),\ j = \overline{1,m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\tau}{m}{z'}_1^{(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = z_0(t) - x(t), \\ &\frac{\tau}{m}{z'}_j^{(2)}(t) + z_j^{(2)}(t) = z_{j-1}^{(2)}(t), \qquad (8) \\ &j = \overline{2,m},\ t \in [t_0, T], \\ &z_j^{(2)}(t_0) = 0,\ j = \overline{1,m}. \end{aligned}$$

Оцінимо різниці $||z_j(t) - x\left(t - \dfrac{j\tau}{m}\right)||$, $j = \overline{1,m}$, враховуючи структуру систем (7)-(8) та нерівність

$$||z_j(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right)|| \leqslant$$
$$\leqslant ||z_j^{(1)}(t) - x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right)|| + ||z_j^{(2)}(t)||. \quad (9)$$

Враховуючи позначення $z_j(t) = (z_{j1}(t), ..., z_{jn}(t))$, $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, представимо $z_{ij}(t)$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ у вигляді суми $z_{ij}^{(1)}(t) + z_{ij}^{(2)(t)}$, де $z_{ij}^{(1)}(t)$ і $z_{ij}^{(2)}(t)$ є розв'язками таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(1)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(1)}(t) = x_j(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(1)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(1)}(t) = z_{i-1,j}^{(1)}(t), \quad (10)$$
$$i = \overline{2,m},\ j = \overline{1,n},$$
$$z_{ij}^{(1)}(t_0) = x_j(t_0 - \frac{i\tau}{m}), \quad (11)$$
$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{1j}^{(2)}(t)}{dt} + z_{1j}^{(2)}(t) = z_{i0}(t) - x_j(t),$$
$$\frac{\tau}{m}\frac{dz_{ij}^{(2)}(t)}{dt} + z_{ij}^{(2)}(t) = z_{i-1,j}^{(2)}(t), \quad (12)$$
$$i = \overline{2,m}, j = \overline{1,n},$$
$$z_{ij}^{(2)}(t_0) = 0, \quad (13)$$
$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Тоді, аналогічно як в [3, 4], можна показати, що справджуються нерівності

$$N_j(t) \leqslant \beta(\frac{\tau}{m}) + N_0(t),\ j = \overline{1,m},\ t \in [t_0, T], (14)$$

де $N_j(t) = \max\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i(s - \frac{\tau j}{m}) - z_{ji}(s)|$, $j = \overline{0,m}$, $\beta(\frac{\tau}{m}) = nK\omega(\frac{\tau}{m})$, $K > 0$, $\omega(\frac{\tau}{m}) = \max\limits_j \omega(x_j, \frac{\tau}{m})$, $\omega(x_j, \frac{\tau}{m})$ — модуль неперервності функції $x_j(t)$ на $[t_0 - \tau, T]$. .

Для оцінки різниці $||x(t) - z_0(t)||$, представимо рівняння (3) та (4) в еквівалентній інтегральній формі

$$x(t) = \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{p} A_k(t)x(t - \tau_k)dt +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} D(t,\theta)x(t+\theta)d\theta dt, \quad (15)$$

$$z_0(t) = \varphi(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{k=0}^{p} A_k(t)z_{l_k}(t)dt +$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} D(t, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(t)d\theta dt. \quad (16)$$

Позначимо $K_A = \max\limits_{k=\overline{0,p}} \max\limits_t ||A_k(t)||, K_D = \max\limits_{t,\theta} ||D(t,\theta)||, K_z = \max\limits_t ||z_i(t)||$, $\omega_1(\frac{\tau}{m}) = n\max\limits_{i,j} \omega(d_{ij}, \frac{\tau}{m})$, $\omega(d_{ij}, \frac{\tau}{m})$ — модуль неперервності функцій $d_{ij}(t,\theta)$, $t \in [t_0, T]$, $\theta \in [-\tau, 0]$, $i,j = \overline{1,n}$. Із рівностей (15),(16), враховуючи властивості матриць $A_k(t)$,
$k = \overline{0,p}$, $D(t,\theta)$ та нерівності (14), маємо

$$||x(t) - z_0(t)|| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} ||A_k(t)|| \int\limits_{t_0}^{t} ||x(s - \tau_k) - z_{l_k}(s)||ds+$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} ||D(s,\theta)x(s+\theta)-$$
$$-D(s, -\frac{\tau(m-i)}{m})z_{m-i}(s))||d\theta dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} K_A \int\limits_{t_0}^{t} (nK\omega(\frac{\tau}{m}) + N_0(s) + n\omega(\frac{\tau}{m}))ds+$$
$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int\limits_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} ||D(s,\theta)(x(s+\theta)-$$
$$-z_{m-i}(s)) + (D(s,\theta)-$$

$$-D(s,-\frac{\tau(m-i)}{m}))z_{m-i}(s))||d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} K_A \int_{t_0}^{t} (N_0(s)+n(K+1)\omega(\frac{\tau}{m}))ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} (||D(s,\theta)||(||x(s+\theta)-$$

$$-x(s-\tau+i\frac{\tau}{m})||+||x(s-\tau+i\frac{\tau}{m})-$$

$$-z_{m-i}(s)||)+||D(s,\theta)-$$

$$-D(s,-\frac{\tau(m-i)}{m}))||||z_{m-i}(s)||)d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} K_A \int_{t_0}^{t} (N_0(s)+n(K+1)\omega(\frac{\tau}{m}))ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t} \sum_{i=0}^{m-1} \int_{-\tau+i\frac{\tau}{m}}^{-\tau+(i+1)\frac{\tau}{m}} (K_D(n\omega(\frac{\tau}{m})+$$

$$+nK\omega(\frac{\tau}{m})+N_0(s))+K_z\omega_1(\frac{\tau}{m}))d\theta ds \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} K_A \int_{t_0}^{t} (N_0(s)+n(K+1)\omega(\frac{\tau}{m}))ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t} (\tau K_D(n(K+1)\omega(\frac{\tau}{m})+N_0(s))+$$

$$+K_z\omega_1(\frac{\tau}{m}))ds \leqslant (T-t_0)[n(K+1)\times$$

$$\times((p+1)K_A+\tau K_D)\omega(\frac{\tau}{m})+K_z\omega_1(\frac{\tau}{m})]+$$

$$+\int_{t_0}^{T} ((p+1)K_A+\tau K_D)N_0(s)ds,\ t\in[t_0,T].$$

Скориставшись тепер нерівністю Гронуола, маємо:

$$N_0(t) \leqslant (T-t_0)[n(K+1)((p+1)K_A+ \quad (17)$$

$$+\tau K_D)\omega(\tfrac{\tau}{m})+K_z\omega_1(\tfrac{\tau}{m})]e^{(T-t_0)((p+1)K_A+\tau K_D)}.$$

Оскільки $\lim\limits_{m\to\infty}\omega(\frac{\tau}{m})=0$ та $\lim\limits_{m\to\infty}\omega_1(\frac{\tau}{m})=0$, то із співвідношення (17) випливає, що розв'язки задачі Коші (4) – (5) апроксимують розв'язки початкової задачі (3) при $m\to\infty$.

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема. *Якщо $A_k(t)$, $k=\overline{0,p}$, $D(t,\theta)$ – неперервні матричні функції при $t\in[t_0,T]$, $\theta\in[-\tau,0]$, тоді для розв'язків початкової задачі (3) та розв'язків задачі Коші (4)-(5) справджуються співвідношення*

$$||x(t-\frac{\tau j}{m})-z_j(t)||\to 0,\ j=\overline{0,m},\ t\in[t_0,T]$$

при $m\to\infty$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регулятора в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика.–1964.–28, N4.–С.716–725.

2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. математика и механика.–1965.–29, N2.–С.226–245.

3. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально- різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.–1999.–N1.–С.42–50.

4. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально- різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика.– Чернівці: Рута, 2002.–С.50–54.

5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.

6. *Азбелев Н.В., Максимов Н.П., Рахматуллина Л.Я.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. — 277 с.

7. *Kamont Z., Kwapisz M.* On the Coushy problems for differential-delay equations in Banach space // Math. Nachr. - 1976.-74, N1.-P.173-190.

Стаття надійшла до редколегії 03.11.2006