УДК 517.51

©2006р. В.К. Маслюченко, О.І. Філіпчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ДО ПИТАННЯ ПРО ТОЧКИ РОЗРИВУ K_hC-ФУНКЦІЙ НА НЕПЕРЕРВНИХ КРИВИХ

Доведено, що кожна K_hC-функція, визначена на добутку топологічного простору X та метричного простору Y, зі значеннями в сильно σ-метризовному просторі має залишкову множину точок неперервності на графіках неперервних кривих $g : X \to Y$.

Let X be a topological space, Y – a metric space, Z – a strongly σ-metrizable space. It is proved that the continuity points set of each K_hC-function $f : X \times Y \to Z$ is residual on continuous curves $g : X \to Y$ graphs.

1. Для топологічних просторів X, Y, Z і відображень $g : X \to Y$ і $f : X \times Y \to Z$ розглянемо множину

$$C_g(f) = \{x \in X : (x, g(x)) \in C(f)\},$$

де $C(f)$ – множина точок сукупної неперервності відображення f.

Р. Бер [1] у випадку $X = [a, b]$, $Y = [c, d]$, $Z = \mathbb{R}$ встановив, що для кожної $\overline{C}C$-функції $f : X \times Y \to Z$ і довільної неперервної функції $g : X \to Y$ множина $C_g(f)$ є залишковою в X. Цей результат був узагальнений в [2] на випадок, коли X – берівський простір, а Y і Z – метризовні простори. Крім того, в [2] був розглянутий загальніший випадок K_hC-функцій зі значеннями в метризовних просторах і встановлений аналогічний результат, коли $y = g(x)$ є кривою зліченного типу.

З другого боку, в [3] вивчалася множина точок неперервності K_hC-функцій зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах щодо її насиченості вертикалями і залишковості на горизонталях. У зв'язку з цим виникло питання про перенесення результатів з [2] на відображення зі значеннями в сильно σ-метризовних просторах. Тут ми здійснюємо таке перенесення, зводячи загальний випадок до метризовного і застосовуючи теорему Банаха про категорію.

2. Нагадаємо основні поняття і деякі допоміжні твердження, які ми будемо тут використовувати.

Топологічний простір Z називається *σ-метризовним*, якщо він подається у вигляді об'єднання зростаючої послідовності своїх замкнених метризовних підпросторів Z_n. Ця послідовність підпросторів Z_n називається *вичерпуванням простору* Z. Вичерпування $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$ простору Z називається *сильним*, якщо для довільної збіжної в Z послідовності $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ існує номер m, для якого $\{z_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq Z_m$. Простір Z називається *сильно σ-метризовним*, якщо він має сильне вичерпування. Для зведення загального випадку до метризовного ми будемо використовувати наступне твердження з [4].

Лема 1. *Нехай Y – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, Z – сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_m)_{m=1}^{\infty}$ і $g : Y \to Z$ – неперервне відображення. Тоді для довільного $y \in Y$ існують окіл V точки y в Y і номер m, такі, що $g(V) \subseteq Z_m$.*

Нехай X, Y, Z – топологічні простори, $f : X \times Y \to Z$ – відображення і $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Відображення $f : X \times Y \to Z$ називається *горизонтально квазінеперервним у точці* p_0, якщо для кожного околу W точки $z_0 = f(p_0)$ в Z і для довільних околів U і V точок x_0 і y_0 в X та Y відповідно існує точка $p_1 = (x_1, y_1) \in U \times V$ і окіл U_1 точки x_1 в X, такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1 \times \{y_1\}) \subseteq W$. Відповідно f *горизонтально квазінеперервне*, якщо воно є таким у кожній точці $p=(x,y)\in X\times Y$. Символом $K_hC(X\times Y,Z)$ ми позначаємо клас всіх горизонтально квазінеперервних відображень $f:X\times Y\to Z$, які неперервні відносно другої змінної.

Наступне допоміжне твердження доведено в [3, лема 2].

Лема 2. *Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $f:X\times Y\to Z$ – горизонтально квазінеперервне відображення, U і V – відкриті множини відповідно в X і Y, $A\subseteq X$ і $U\subseteq\overline{A}$. Тоді $f(U\times V)\subseteq\overline{f(A\times V)}$.*

Для відображення $f:X\times Y\to Z$ і точки $p=(x,y)\in X\times Y$ ми покладаємо $f^x(y)=f_y(x)=f(p)$.

3. Наступна теорема є основним результатом даної праці.

Теорема. *Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір, Z – сильно σ-метризовний простір з вичерпуванням $(Z_n)_{n=1}^{\infty}$, $f\in K_hC(X\times Y,Z)$ і $g:X\to Y$ – неперервне відображення. Тоді множина $C_g(f)$ є залишковою в X.*

Доведення. Позначимо відстань між точками v і y в метричному просторі Y символом $|v-y|_Y$. Нехай $V(y,r)=\{v\in Y:|v-y|_Y<r\}$ – відкрита куля в Y. Покладемо

$$A_n=\left\{x\in X: f^x\left(V(g(x),\tfrac{1}{n})\right)\subseteq Z_n\right\}$$

і покажемо, що $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Включення $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq X$ очевидне. Доведемо, що виконується обернене включення. Нехай $x\in X$. Тоді відображення $f^x:Y\to Z$ неперервне, адже $f\in K_hC(X\times Y,Z)$. Оскільки простір Y задовольняє першу аксіому зліченності, адже кулі $V(y,\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}$ утворюють не більш ніж зліченну базу околів точки y, то за лемою 1 існує такий номер n, що $f^x(V(g(x),\frac{1}{n}))\subseteq Z_n$. Звідси випливає, що $x\in A_n$. Таким чином, отримується включення $X\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Отже, потрібну рівність доведено.

Покладемо $F_n=\overline{A_n}$, $G_n=intF_n$ і $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G_n$. Визначена в такий спосіб множина G є відкритою як зліченне об'єднання відкритих в X множин. Крім того, G – залишкова в X. Справді,

$$X\setminus G\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n\setminus G_n).$$

Множина $F_n\setminus G_n$ є ніде не щільною як межа замкненої в X множини F_n. Тому $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(F_n\setminus G_n)$ – множина першої категорії в X. Тоді такою ж є й множина $X\setminus G$, а значить, G – залишкова в X.

Нехай далі n – фіксований номер, O – відкрита в X непорожня підмножина G_n і $x_0\in O$. Оскільки відображення g неперервне, зокрема й у точці x_0, то існує відкритий окіл U_0 точки x_0 в X, такий, що $U_0\subseteq O$ і $|g(x)-g(x_0)|_Y<\frac{1}{2n}$ на U_0. Поклавши $V_0=V(g(x_0),\frac{1}{2n})$, отримуємо: $g(U_0)\subseteq V_0$. Нехай $A=A_n\cap G_n$ і $A_0=A\cap U_0$. Зрозуміло, що $A\subseteq G_n\subseteq\overline{A}$, $A_0\subseteq A\subseteq A_n$ і $A_0\subseteq U_0\subseteq\overline{A_0}$. Покажемо, що

$$A_0\times V_0\subseteq\bigcup_{x\in A_n}\left(\{x\}\times V(g(x),\tfrac{1}{n})\right). \qquad (1)$$

Візьмемо $(x,y)\in A_0\times V_0$. Тоді $x\in A_n\cap U_0$ і

$$|y-g(x)|_Y\le|y-g(x_0)|_Y+|g(x_0)-g(x)|_Y<\tfrac{1}{n}.$$

Таким чином, $y\in V(g(x),\frac{1}{n})$, тобто включення (1) виконується. Крім того, за побудовою множин A_n маємо, що якщо $x\in A_0\subseteq A_n$, то

$$f^x\left(V(g(x),\tfrac{1}{n})\right)=f\left(\{x\}\times V(g(x),\tfrac{1}{n})\right)\subseteq Z_n.$$

Останнє включення показує, що

$$f(A_0\times V_0)\subseteq Z_n. \qquad (2)$$

Далі, оскільки $U_0\subseteq\overline{A}$, то, використовуючи лему 2 і враховуючи (2) та замкненість множин Z_n отримуємо такий ланцюжок включень:

$$f(U_0\times V_0)\subseteq\overline{f(A_0\times V_0)}\subseteq\overline{Z_n}=Z_n.$$

Таким чином, на даному етапі доведення знайшлися такі відкриті множини U_0 і V_0 в X та Y відповідно, що $f(U_0 \times V_0) \subseteq Z_n$. Зрозуміло, що множини U_0 і V_0 залежать від вибору множини O. Позначимо $U_0 = G(O)$, $V_0 = H(O)$. За побудовою $f(G(O) \times H(O)) \subseteq Z_n$ для довільного $O \in \mathcal{T}^*(G_n)$, де $\mathcal{T}^*(G_n)$ – система всіх відкритих непорожніх підмножин множини G_n.

Покладемо $\mathcal{U}_n = \{G(O) : O \in \mathcal{T}^*(G_n)\}$ і $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$. Для довільної множини $U \in \mathcal{U}_n$ існує множина $O = O(U) \in \mathcal{T}^*(G_n)$, така, що $U = G(O) \subseteq O$.

Покладемо $V = V(U) = H(O(U))$, $f_U = f|_{U \times V(U)}$ і $g_U = g|_U$. Оскільки

$$U \times V = G(O(U)) \times H(O(U)),$$

то

$$f(U \times V) \subseteq Z_n.$$

Легко перевірити, що $f_U \in K_hC(U \times V, Z_n)$. За теоремою 1 з [2] множина $C_U = C_{g_U}(f_U)$ є залишковою в U. Оскільки множини U і V відкриті, то $C_U \subseteq C_g(f)$. Множина $D_U = U \setminus C_U$ першої категорії в U, а значить, і в X.

Згідно з лемою Куратовського-Цорна з системи $\mathcal{U}$ можна виділити максимальну диз'юнктну підсистему $\mathcal{U}_0$. З максимальності $\mathcal{U}_0$ легко випливає, що відкрита множина $S_0 = \bigcup \mathcal{U}_0$ є щільною у відкритій множині $S = \bigcup \mathcal{U}$.

Покажемо, що множина $E = \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}_0} D_U$ є множиною першої категорії в кожній із своїх точок. Справді, нехай $p = (x, y) \in E$. Тоді існує елемент $U \in \mathcal{U}_0$, такий, що $p \in D_U$. Оскільки $D_U \subseteq U \times V(U)$, то $x \in U$. Але система $\mathcal{U}_0$ диз'юнктна, отже, $x \notin \tilde{U}$, де $\tilde{U} \in \mathcal{U}_0$ і $\tilde{U} \neq U$. Значить, множина $U \in \mathcal{U}_0$, для якої $p \in D_U$, єдина. Множина $W = U \times V(U)$ є відкритим околом точки p і $W \cap E = D_U$. Отже, $W \cap E$ – множина першої категорії в X, а значить, множина першої категорії в точці p. За теоремою Банаха про категорію [5, с.87] E – множина першої категорії в X.

Залишилось доведести, що множина $D = D_g(f) = X \setminus C_g(f)$ першої категорії в X. Оскільки множини з системи $\mathcal{U}_0$ відкриті в X, то

$$D_g(f) \cap S_0 = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} D_U = E,$$

отже, $D_g(f) \cap S_0$ – множина першої категорії в X. Далі, за побудовою відкрита множина S_0 щільна у відкритій множині S, а S щільна в G. Тому множини $S \setminus S_0$ і $G \setminus S$ є ніде не щільними. Крім того, $X \setminus G$ – множина першої категорії. Тому множина

$$X \setminus S_0 = (X \setminus G) \bigcup (G \setminus S) \bigcup (S \setminus S_0)$$

першої категорії. В такому разі і множина

$$D = (D \cap S_0) \bigcup (D \bigcap (X \setminus S_0))$$

є множиною першої категорії в X. Тому множина $C_g(f)$ – залишкова в X, що й треба було довести.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les fonctions de variables reélles// Annal Mat. Pura Appl., ser.3. – 1899. – **3**. – P.1-123.

2. *Маслюченко В.К., Нестеренко В.В.* Про неперервність нарізно неперервних відображень на кривих// Мат.студії. – 1998. – Т.9, №2. – С.205-210.

3. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Шишина О.І.* Сукупна неперервність горизонтально квазінеперервних відображень зі значеннями в σ-метризовних просторах // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 2002. – **45**, № 1. – С.42-46.

4. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення від багатьох змінних зі значеннями в σ-метризовних просторах // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, N3. – С.337-344.

5. *Куратовский К.* Топология. Т.1.– М.: Мир, 1966. – 594с.

Стаття надійшла до редколегії 05.10.2006