УДК 517.4

©2006 р. О.В.Мартинюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t З ОПЕРАТОРОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ-БЕССЕЛЯ

Встановлена коректна розв'язність задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь вищого порядку по t з оператором диференціювання-Бесселя нескінченного порядку й початковими умовами, які є узагальненими функціями типу ультрарозподілів.

The correct solvability of Cauchy problem is established for one class of evolutionary equations of higher order on t with differentiation-Bessel operator of infinite order and initial conditions, which are generalized function of ultradistribution.

Предметом багатьох досліджень є псевдодиференціальні оператори (ПДО), побудовані як за гладкими, так і за негладкими символами, а також псевдодиференціальні рівняння (ПДР). Їх теорія у сучасній формі створена в 60-х роках XX-століття. ПДО та ПДР тісно пов'язані з важливими задачами аналізу і сучасної математичної фізики.

У цій роботі вивчається коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь вищого порядку по t з оператором диференціювання-Бесселя нескінченного порядку у певних просторах узагальнених функцій типу $(W)'$, які збігаються з множинами початкових значень гладких розв'язків вказаних рівнянь. При цьому оператор диференціювання-Бесселя трактується як ПДО, побудований за певним аналітичним символом.

1. Простір D'_+. Нагадаємо, що символом $D \equiv D(\mathbb{R})$ позначається множина всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на D зі слабкою збіжністю позначається символом $D' \equiv D'(\mathbb{R})$. Елементи D' називаються узагальненими функціями. Сукупність узагальнених функцій з D', які обертаються в нуль на півосі $(-\infty, 0)$, позначається через D'_+. Відомо [1], що для довільних $\{f, g\} \subset D'_+$ у просторі D'_+ існує згортка $f * g$, яка визначається співвідношенням

$$< f * g, \varphi >=$$
$$< f(x) \times g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) >, \varphi \in D,$$

де η_1 і η_2 – довільні функції з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, рівні одиниці в околі піввісі $[0, +\infty)$ і нулю для досить великих від'ємних значень аргументу. D'_+ утворює асоціативну і комутативну алгебру відносно операції згортки. Оскільки $\delta * f = f * \delta = f$, $\forall f \in D'_+$, то одиницею в ній є δ-функція Дірака.

Якщо узагальнена функція $f \equiv f_t$ залежить від параметра t, $f_t \in D'_+$ при кожному t, існує $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$, $g \in D'_+$, то тоді [1]

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}(f_t * g) = \frac{\partial^m f_t}{\partial t^m} * g, m \in \mathbb{N}.$$

Нехай узагальнена функція $f_\alpha \in D'_+$ залежить від параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ і визначається формулою

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-1}, & \alpha > 0, \\ f^{(m)}_{\alpha+m}(t), & \alpha \le 0, \end{cases}$$

де m – найменше серед натуральних чисел таке, що $m + \alpha > 0$, θ – функція Хевісайда. Правильними є наступні твердження [1]:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$: $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.
2) Нехай $I(\alpha)f = f * f_\alpha$, $\forall f \in D'_+$. Тоді
   а) $\forall f \in D'_+$: $I(0)f = f$;
   б) $\forall f \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $I(-n)f = f^{(n)}$;
   в) $\forall f \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $(I(n)f)^{(n)} = f$;

г) $\forall f \in D'_+ \ \forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$:

$$I(\alpha)I(\beta)f = I(\alpha+\beta)f.$$

Завдяки властивостям б) і в) оператори $I(\alpha)$ при $\alpha < 0$ називають операторами дробового диференціювання, а при $\alpha > 0$ – операторами дробового інтегрування в D'_+.

2. Простори основних функцій. Нехай $x' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$, $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$, $1 \le k \le n-1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$; $x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_{k,+} := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} \ge 0, \dots, x_n \ge 0\}$.

Розглянемо функції ω_i: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, які є неперервними і зростаючими, причому $\omega_i(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega_i(x) = +\infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Для $x \ge 0$ покладемо $\Omega_i(x) = \int\limits_0^x \omega_i(\xi) d\xi$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Функції Ω_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, мають такі властивості:

1) Ω_i – диференційовні, зростаючі на $[0, +\infty)$ функції, причому $\Omega_i(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \Omega_i(x) = +\infty$, $i \in \{1, \dots, n\}$;

2) Ω_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, – опуклі функції, тобто:

а) $\forall \{x_1, x_2\} \subset [0, +\infty)$:

$$\Omega_i(x_1) + \Omega_i(x_2) \le \Omega_i(x_1 + x_2);$$

б) $\forall x \in [0, +\infty) \ \forall n \in \mathbb{N}$: $n\Omega_i(x) \le \Omega_i(nx)$.

Довизначимо кожну функцію Ω_i на $(-\infty, 0]$ парним чином. Отже, Ω_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, зростає на $[0, +\infty)$ швидше за довільну лінійну функцію. Поряд з цим розглянемо функції μ_i: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, які мають такі ж властивості, що і функції ω_i. Для $x \ge 0$ покладемо $M_i(x) = \int\limits_0^x \mu_i(\xi) d\xi$, $M_i(-x) = M_i(x)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Функції M_i аналогічні за своїми властивостями до функцій Ω_i. За допомогою функцій M_i і Ω_i Г.М.Гуревич увів серію просторів, названих ним просторами типу W. Означимо деякі з них.

Символом $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n) \equiv W^{\Omega_1, \dots, \Omega_n}_{M_1, \dots, M_n}(\mathbb{C}^n)$ позначимо сукупність усіх цілих функцій $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, для яких:

$$\exists c > 0 \, \exists a_j > 0 \, \exists b_j > 0, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$\forall z = (x + iy) \equiv (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\psi(z)| \equiv |\psi(z_1, \dots, z_n)| \le c \cdot \exp\{-M_1(a_1 x_1) -$$

$$- \dots - M_n(a_n x_n) + \Omega_1(b_1 y_1) + \dots + \Omega_n(b_n y_n)\}.$$

Простір $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n)$ можна подати як об'єднання повних досконалих зліченно нормованих просторів $W^{\Omega,b}_{M,a}(\mathbb{C}^n) \equiv W^{\Omega_1, \dots, \Omega_n; b_1, \dots, b_n}_{M_1, \dots, M_n; a_1, \dots, a_n}(\mathbb{C}^n)$, де $W^{\Omega,b}_{M,a}(\mathbb{C}^n)$ складається з тих функцій $\psi \in W^\Omega_M(\mathbb{C}^n)$, для яких правильні нерівності

$$|\psi(z_1, \dots, z_n)| \le c \prod_{i=1}^n \exp\{-M_i(\overline{a}_i x_i) + \Omega_i(\overline{b}_i y_i)\}$$

(тут $\overline{a}_i > 0$ – довільна стала, менша за a_i; $\overline{b}_i$ – довільна стала, більша за b_i); норми в $W^{\Omega,b}_{M,a}(\mathbb{C}^n)$ визначаються формулами

$$\|\psi\|_{\rho\delta} = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \left[|\psi(z)| \cdot \prod_{i=1}^n \exp\{-\Omega_i(b_i + \rho) y_i + \right.$$

$$\left. + M_i(a_i(1 - \frac{1}{\delta}) x_i)\} \right],$$

$$\rho \in \mathbb{N}, \delta \in \{2, 3, \dots\}, \psi \in W^{\Omega,b}_{M,a}(\mathbb{C}^n).$$

Отже, збіжність в $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n)$ – це збіжність в об'єднанні зліченно нормованих просторів.

Символом $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n_{k,+})$, $1 \le k \le n-1$, позначатимемо сукупність усіх цілих функцій з простору $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n)$, парних за змінними z_{k+1}, $\dots$, z_n. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, або простором типу W, а його елементи – основними функціями. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}^n$ і, як функції комплексних змінних, є елементами простору $W^\Omega_M(\mathbb{C}^n_{k,+})$, позначатимемо символом $W^\Omega_M(\mathbb{R}^n_{k,+})$, $1 \le k \le n-1$.

У просторі $W_M^\Omega(\mathbb{C}_{k,+}^n)$ визначені, є лінійними і неперервними оператори Бесселя

$$B_j = \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \frac{2\nu_j + 1}{z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}, \quad \nu_j > -\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

$j \in \{k+1, \dots, n\}$, порядку ν_j, а також оператор $B := \prod_{j=k+1}^{n} B_j$.

У просторі $W_M^\Omega(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ можна користуватися прямим і оберненим перетвореннями Фур'є – Фур'є-Бесселя, які позначатимемо символами $F_{D,B}$, $F_{D,B}^{-1}$:

$$\varphi(\sigma) = F_{D,B}[\psi](\sigma) := \int\limits_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \psi(x', x'') e^{-(x',\sigma')} \times$$

$$\times j_{\nu_{k+1}}(\sigma_{k+1}x_{k+1}) \dots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n) x_{k+1}^{2\nu_{k+1}+1} \dots$$

$$\dots x_n^{2\nu_n+1} dx' dx'', \quad \psi \in W_M^\Omega(\mathbb{R}_{k,+}^n),$$

$$\psi(x) = F_{D,B}^{-1}[\varphi](x) := (2\pi)^{-k} c_{\nu_{k+1}} \dots c_{\nu_n} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_{k,+}^n} \varphi(\sigma', \sigma'') e^{(x',\sigma')} j_{\nu_{k+1}}(\sigma_{k+1}x_{k+1}) \dots$$

$$\dots j_{\nu_n}(\sigma_n x_n) \sigma_{k+1}^{2\nu_{k+1}+1} \dots \sigma_n^{2\nu_n+1} d\sigma' d\sigma'',$$

де j_{ν_s}, $s \in \{k+1, \dots, n\}$, – нормована функція Бесселя ν_s-го порядку, $c_{\nu_s} = (2^{2\nu_s}\Gamma^2(\nu_s + 1))^{-1}$, $\nu_s > -\dfrac{1}{2}$, – фіксовані параметри; при цьому

$$F_{D,B}[W_M^\Omega(\mathbb{R}_{k,+}^n)] = W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}_{k,+}^n) \equiv$$

$$\equiv W_{M_1^1,\dots,M_n^1}^{\Omega_1^1,\dots,\Omega_n^1}(\mathbb{R}_{k,+}^n),$$

оператор $F_{D,B}$ є неперервним (тут Ω_i^1 та M_i^1 – функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M_i та Ω_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ (див. [2]), $F_{D,B}[X]$ позначає простір Фур'є-образів функцій з простору X).

Отже, простори $W_M^\Omega(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ перетворенням $F_{D,B}$ відображаються у простори такого ж типу.

Нехай $\varphi(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|l|=j} c_l \ z_1^{l_1} \dots z_k^{l_k} \ z_{k+1}^{2l_{k+1}} \dots z_n^{2l_n}$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $1 \le k \le n-1$, – деяка ціла функція, парна за змінними $z_{k+1}, \dots, z_n$. Говоритимемо, що у просторі $W_M^\Omega(\mathbb{C}_{k,+}^n)$ задано оператор диференціювання-Бесселя нескінченного порядку

$$\varphi(DB) := \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|l|=j} c_l (-i)^{l_1+\dots+l_k} \frac{\partial^{l_1+\dots+l_k}}{\partial z_1^{l_1} \dots \partial z_k^{l_k}} \times$$

$$\times (-B_{k+1}^{l_{k+1}}) \dots (-B_n^{l_n}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|l|=j} c_l (-i)^{|l'|} (-1)^{|l''|} D^{l'} B^{l''}$$

($l' = (l_1, \dots, l_k)$, $l'' = (l_{k+1}, \dots, l_n)$ – мультиіндекси, $|l'| = l_1 + \dots + l_k$, $|l''| = l_{k+1} + \dots + l_n$, B_s, $s \in \{k+1, \dots, n\}$, – оператори Бесселя, що визначаються співвідношеннями (1)), якщо для довільної основної функції $\psi \in W_M^\Omega(\mathbb{C}_{k,+}^n)$ ряд

$$(\varphi(DB)\psi)(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|l|=j} c_l (-i)^{|l'|} (-1)^{|l''|} \times$$

$$\times (D^{l'} B^{l''} \psi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $W_M^\Omega(\mathbb{C}_{k,+}^n)$.

Якщо A_φ – звуження оператора $\varphi(DB)$ на простір $W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$, $1 \le k \le n-1$, то для довільної функції $\psi \in W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}_{k,+}^n)$ правильною є рівність [3]

$$(A_\varphi \psi)(x) = F_{D,B}^{-1}[\varphi(\xi) F_{D,B}[\psi](\xi)](x),$$

$$\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

3. Задача Коші. Символом $\overset{0}{P}{}_M^\Omega \equiv \overset{0}{P}{}_{M_1,\dots,M_n}^{\Omega_1,\dots,\Omega_n}$ позначимо клас цілих однозначних функцій ψ: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі W_M^Ω і такими, що $e^\psi \in W_M^\Omega$. Нехай $\varphi \in \overset{0}{P}{}_M^\Omega$, A_φ – оператор диференціювання-Бесселя нескінченного порядку, побудований за функцією φ.

Розглянемо рівняння

$$D_t^\beta u(t,x) = D_t^{\{\beta\}} A_\varphi^{-[\beta]} u(t,x), \qquad (2)$$

$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n_+ \equiv \Omega_+$, з початковою умовою

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)|_{t=0} = f, f \in (W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}))'. \quad (3)$$

Тут $\beta \in (-\infty, 0)$, $[\beta]$ – ціла, а $\{\beta\}$ – дробова частини числа β, D_t^β – оператор дробового диференціювання, який діє за змінною t у просторі D'_+.

Під розв'язком задачі Коші (2), (3) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(\cdot, x) \in D'_+ \cap C^{-[\beta]}((0,\infty))$ при кожному x;

2) $u(t,\cdot) \in D(A_\varphi^{-[\beta]})$, задовольняє рівняння (2) та початкову умову (3) у тому сенсі, що $D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot) \to f$ при $t \to +0$ у просторі $(W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}))'$.

Якщо $\beta \in [-3,-1)$, то припускаємо, що u задовольняє також наступну умову:

3) для довільного фіксованого проміжку $[\delta, +\infty) \subset (0,+\infty)$ існує стала $c = c(\delta) > 0$ така, що

$$\sup_{t\in[\delta,+\infty} \|D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c.$$

Правильним є наступне твердження.

Теорема. *Задача Коші (2), (3) коректно розв'язна у просторі $(W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}))'$. Розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому t належить до простору $W_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}^n_{k,+})$ і подається у вигляді*

$$u(t,x) = \theta(t) z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t),$$

де $z(t,x) = (f * G)(t,x)$, $(t,x) \in \Omega_+$ (G – фундаментальний розв'язок задачі Коші (2), (3)).

Наведемо схему доведення.

Введемо позначення $D_t^{\{\beta\}} u(t,x) = z(t,x)$, тоді рівняння (2) набуває вигляду

$$\frac{\partial^p z(t,x)}{\partial t^p} + (-1)^{p+1} A_\varphi^p z(t,x) = 0$$

(тут $p := -[\beta]$, $D_t^{[\beta]} = D_t^{-p} = \dfrac{d^p}{dt^p}$), для якого розглядається початкова умова

$$z(t,\cdot)|_{t=0} = f, f \in (W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}))',$$

причому функція z задовольняє початкову умову при $t \to +0$ у слабкому розумінні (у просторі $(W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}))'$).

Задача Коші (2), (3) вивчається аналогічно тому, як це було зроблено у праці [3], при цьому використовується співвідношення

$$A_\varphi^p z = F_{D,B}^{-1}[\varphi^p(\xi) F_{D,B}[z](\xi)], \quad \varphi \in W_{M^1}^{\Omega^1}(\mathbb{R}^n_{k,+}),$$

а також півгрупова властивість операторів D_t^β:

$$D_t^\beta = D_t^{[\beta]+\{\beta\}} = D_t^{[\beta]} D_t^{\{\beta\}}.$$

Зауваження. Якщо β набуває відповідно значень -1, -2, -3, то маємо рівняння

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} + A_\varphi u = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_\varphi^2 u = 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_\varphi^3 u = 0, \end{gathered} \quad (4)$$

при цьому $f_{-\{\beta\}} = f_0 = \theta' = \delta$, тобто

$$\theta(t) z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t) = \theta(t) z(t,x) * \delta(t) =$$
$$= \theta(t) z(t,x).$$

Отже, при $t > 0$ розв'язки рівнянь (4) зображаються формулою $u(t,x) = z(t,x) = (f * G)(t,x)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

3. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку // Доповіді НАН України. – 2003. – N 9. – С. 18 – 24.

Стаття надійшла до редколегії 27.09.2006