УДК 517.51

©2006 р. Н.Є. Лінчук

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

ІНВАРІАНТНІ ПІДПРОСТОРИ СТЕПЕНЯ ОПЕРАТОРА ІНТЕГРУВАННЯ В БАЗОВИХ ПІДПРОСТОРАХ ПРОСТОРУ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Описані замкнені підпростори степеня оператора інтегрування в базових підпросторах простору функцій, аналітичних в довільних областях.

The closed subspaces of a degree of an operator of integration in base subspaces of space of functions, which are analytic in arbitrary areas are described.

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх функцій, аналітичних в G, що наділений топологією компактної збіжності. Якщо G – довільна область комплексної площини, яка зіркова відносно початку координат, то оператор інтегрування $\mathcal{J}$ лінійно і неперевно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом

$$(\mathcal{J}f)(z) = \int_0^z f(t)dt.$$

В працях М.К. Нікольського [1], М.І. Нагнибіди [2], М.Ю. Царькова [3], В.А. Ткаченко [4] досліджувалася характеристика всіх замкнених підпросторів, які інваріантні відносно операторів звичайного та узагальненого інтегрувань, що діють в різних просторах аналітичних функцій. Інваріантні підпростори m–го степеня звичайного інтегрування, що діє у просторі A_R, описані М.І. Нагнибідою в [5], а у просторі $\mathcal{H}(G)$ у випадку ω–інваріантної області G – Н.Є. Лінчук [6]. В [7] описані замкнені інварінтні підпростори матричних операторів інтегрування, які діють в прямій сумі просторів аналітичних функцій.

В цій статті досліджується структура інваріантних підпросторів степеня оператора інтегрування в базових підпросторах простору аналітичних функцій. Як застосування цих результатів одержано опис замкнених інваріантних підпросторів степеня оператора інтегрування в просторах аналітичних функцій.

Для подальших досліджень наведемо деякі відомості і допоміжні твердження [8]. Якщо G – довільна зіркова відносно початку координат область комплексної площини, то загальний вигляд лінійних неперервних операторів $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}(G))$, які переставні з оператором $\mathcal{J}$, дається формулою

$$(Tf)(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z \varphi(z-t)f(t)dt\right), \qquad (1)$$

де $\varphi(z)$ – деяка функція з $\mathcal{H}(G)$. При цьому $\varphi(z) = T1$. Оператор T, який визначається формулою (1), буде ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ тоді і лише тоді, коли $\varphi(0) \neq 0$.

Нехай m – фіксоване натуральне число і $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$. Область G називається ω–інваріантною відносно початку координат, якщо $\omega G = G$. Нехай G зіркова відносно точки $z = 0$ і ω–інваріантна відносно початку координат. Через $\mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, m-1}$, позначимо замкнені підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, які визначаються наступним чином

$$\mathcal{H}_k(G) = \{f \in \mathcal{H}(G) : f(\omega z) = \omega^k f(z),\ z \in G\}.$$

В [9] показано, що кожну функцію $f(z) \in \mathcal{H}(G)$ можна єдиним чином подати у вигляді $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} f_k(z)$, де $f_k(z) \in \mathcal{H}_k(G)$. При цьому $f_k(z) = (P_k f)(z) = \frac{1}{m}\sum\limits_{j=0}^{m-1} \omega^{-kj} f(\omega^j z)$, $k = \overline{0, m-1}$. Таким чином, простір $\mathcal{H}(G)$ є прямою сумою своїх підпросторів $\mathcal{H}_k(G)$,

$k=\overline{0,m-1}$, тобто

$$\mathcal{H}(G)=\mathcal{H}_0(G)\oplus\mathcal{H}_1(G)\oplus\ldots\oplus\mathcal{H}_{m-1}(G). \quad (2)$$

Підпростори $\mathcal{H}_k(G)$ називатимемо базовими підпросторами простору $\mathcal{H}(G)$.

Вважатимемо надалі, що $\mathcal{H}_l(G)=\mathcal{H}_r(G)$, якщо $l,r\in\mathbb{Z}$ і $l=r(\text{mod m})$. Легко перевірити, що
1°. $\mathcal{J}\mathcal{H}_k(G)=\mathcal{H}_{k+1}(G)$ при $k\neq$m-1(mod m);
2°. $\mathcal{J}\mathcal{H}_k(G)=\mathcal{J}^m\mathcal{H}_0(G)$ при k=m-1(mod m);
3° $\frac{d}{dz}\mathcal{H}_k(G)=\mathcal{H}_{k-1}(G)$, $k\in\mathbb{Z}$.

Тому кожен з підпросторів $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$, є інваріантним відносно операторів $\mathcal{J}^m$ та $\frac{d^m}{dz^m}$.

Опишемо всі замкнені підпростори базових підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, які інваріантні відносно степеня оператора інтегрування.

Теорема 1. *Нехай G – довільна зіркова відносно точки $z=0$, ω–інваріантна відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Для того, щоб M був замкненим підпростором простору $\mathcal{H}_k(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^m$ необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді*

$$M=\mathcal{J}^{n_k m}\mathcal{H}_k(G), \quad (3)$$

де n_k – деяке ціле невід'ємне число або символ ∞ (у випадку $n_k=\infty$ покладаємо $M=0$).

Доведення. Розглянемо випадок $k=0$, тобто опишемо замкнені підпростори простору $\mathcal{H}_0(G)$, які інваріантні відносно оператора $\mathcal{J}^m$. З означення простору $\mathcal{H}_0(G)$ випливає, що для кожної функції $f(z)\in\mathcal{H}_0(G)$ виконуються рівності $f^{(j)}(0)=0$ при $j\neq 0$ (mod m).

Нехай M є замкненим підпростором простору $\mathcal{H}_0(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^m$. Розглянемо далі можливі випадки.

1. Нехай $f^{(mj)}(0)=0$ для кожної функції $f\in M$ і для кожного цілого невід'ємного j. Тоді $M=0$ і M подається у вигляді (3) з $n_k=+\infty$.

2. Нехай існує функція $\varphi\in M$ для якої $\varphi(0)\neq 0$. Розглянемо оператор T, який визначається рівністю (1). Оскільки $\varphi(0)\neq 0$, то оператор T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$. Покажемо, що кожен з підпросторів $\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$, є інваріантним відносно оператора T.

Для функцій $f,g\in\mathcal{H}(G)$ через $g*f$ позначимо згортку Дюамеля, тобто

$$(g*f)(z)=\int\limits_0^z g(z-t)f(t)dt.$$

Якщо $\varphi\in\mathcal{H}_0(G)$, $f\in\mathcal{H}_k(G)$, то $\frac{d}{dz}(\varphi*f)\in\mathcal{H}_k(G)$. Дійсно, якщо $\varphi\in\mathcal{H}_0(G)$ і $f\in\mathcal{H}_k(G)$, то для довільного $z\in G$ маємо:

$$(\varphi*f)(\omega z)=\int\limits_0^{\omega z}\varphi(\omega z-t)f(t)dt=$$

$$=\omega\int\limits_0^z\varphi(\omega(z-\tau))f(\omega\tau)d\tau=\omega^{k+1}(\varphi*f)(z).$$

Тому $\frac{d}{dz}(\varphi*f)\in\mathcal{H}_k(G)$.

Покажемо, що звуження оператора T на підпростір $\mathcal{H}_0(G)$ є ізоморфізмом $\mathcal{H}_0(G)$. Оскільки T є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, то оператор T є ін'єктивним в $\mathcal{H}_0(G)$.

Перевіримо, що T є сюр'єктивним на $\mathcal{H}_0(G)$. Нехай $g_0(z)\in\mathcal{H}_0(G)$. Оскільки T є ізоморфізмом $\mathcal{H}(G)$, то існує функція $f(z)\in\mathcal{H}(G)$ така, що $(Tf)(z)=g_0(z)$. З рівності (2) випливає, що $f(z)$ єдиним чином подається у вигляді $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{m-1}f_k(z)$, де $f_k\in\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$. Тому $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(Tf_k)(z)=g_0(z)$. Але $Tf_k\in\mathcal{H}_k(G)$, $k=\overline{0,m-1}$. Тоді з рівності (2) випливає, що $Tf_k=0$, при $k=\overline{1,m-1}$. Таким чином, $(Tf_0)(z)=g_0(z)$, $f_0\in\mathcal{H}_0(G)$ і, отже, T є сюр'єктивним на $\mathcal{H}_0(G)$. Тому T є ізоморфізмом $\mathcal{H}_0(G)$.

Оскільки оператор T переставний з $\mathcal{J}$ і $T1=\varphi(z)$, то для довільного цілого невід'ємного j виконується рівність $T\mathcal{J}^{mj}1=\mathcal{J}^{mj}\varphi(z)$, тобто $Tz^{mj}=(mj)!\mathcal{J}^{mj}\varphi(z)$. Але система $(z^{mj})_{j=0}^{\infty}$ є повною в $\mathcal{H}_0(G)$. Тому система $(\mathcal{J}^{mj}\varphi(z))_{j=0}^{\infty}$ є також повною в $\mathcal{H}_0(G)$, оскільки T – ізоморфізм простору $\mathcal{H}_0(G)$.

З іншого боку, $\mathcal{J}^{mj}\varphi(z) \in M$, $j = 0, 1, \ldots$. Оскільки M – замкнений підпростір простору $\mathcal{H}_0(G)$, то $M = \mathcal{H}_0(G)$ і M подається у вигляді (3) з $n_0 = 0$.

3. Нехай $f(0) = 0$ для кожної функції $f \in M$, але $M \neq 0$. Позначимо $n_0 = min\{j \in \mathbb{N} : \exists f \in M, f^{(mj)}(0) \neq 0\}$. Тоді для кожної функції $f \in M : f^{(mj)}(0) = 0$ при $j = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$ і існує функція $\psi(z) \in M$, для якої $\psi^{(mn_0)}(0) \neq 0$. Позначимо $M_1 = \frac{d^{mn_0}}{dz^{mn_0}}(M)$. Тоді M_1 є замкненим підпростором простору $\mathcal{H}_0(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^m$. Функція $\varphi(z) = \psi^{(mn_0)}(z) \in M_1$ і $\varphi(0) \neq 0$. Тому за доведеним в п.2 $M_1 = \mathcal{H}_0(G)$. Відновлюючи M звідси одержуємо, що $M = \mathcal{J}^{mn_0}\mathcal{H}_0(G)$.

Таким чином, при $k = 0$ кожен замкнений підпростір простору $\mathcal{H}_0(G)$ подається у вигляді (3). Нехай тепер k – фіксоване натуральне число, $1 \leq k \leq m-1$ і M – замкнений підпростір простору $\mathcal{H}_k(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^m$. Через $\tilde{M}$ позначимо підпростір виду: $\tilde{M} = \frac{d^k}{dz^k}(M)$. Тоді $\tilde{M}$ є замкненим підпростором простору $\mathcal{H}_0(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^m$. Тому за доведеним раніше $\tilde{M}$ подається у вигляді $\tilde{M} = \mathcal{J}^{n_k m}\mathcal{H}_0(G)$, де n_k – ціле невід'ємне число, або символ $+\infty$. З цієї рівності випливає, що $M = \mathcal{J}^k\mathcal{J}^{n_k m}\mathcal{H}_0(G) = \mathcal{J}^{n_k m}(\mathcal{J}^k\mathcal{H}_0(G)) = \mathcal{J}^{n_k m}\mathcal{H}_k(G)$, тобто M подається у вигляді (3).

Навпаки, при кожному цілому невід'ємному n_k формулою (3) визначається замкнений підпростір простору $\mathcal{H}_k(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^m$. Теорему 1 доведено.

Опишемо далі інваріантні підпростори степеня оператора інтегрування.

Теорема 2. *Нехай G – зіркова і симетрична відносно початку координат область комплексної площини. Для того, щоб M був замкненим підпростором простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^2$, необхідно і достатньо, щоб він подавався у вигляді*

$$M = T(\mathcal{J}^{2n_0}\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{2n_1}\mathcal{H}_1(G)), \qquad (4)$$

де T – деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, який переставний з оператором $\mathcal{J}$, а n_0, n_1 – цілі невід'ємні числа або символи $+\infty$ (у випадку $n_0 = n_1 = +\infty$ покладаємо $M = 0$).

Доведення. Нехай M – деякий ненульовий замкнений підпростір простору $\mathcal{H}(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^2$. Покладемо $k = min\{n : \exists f \in M, f^{(n)}(0) \neq 0\}$. Тоді для кожної функції $f \in M : f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k-1)}(0) = 0$ і існує функція $\psi(z) \in M$ для якої $\psi^{(k)}(0) \neq 0$. Через M_1 позначимо підпростір простору $\mathcal{H}(G)$ виду $M_1 = \frac{d^k}{dz^k}(M)$. Тоді M_1 також буде замкненим підпростором простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^2$, причому існує функція $\varphi(z) \in M_1$, для якої $\varphi(0) \neq 0$. Розглянемо оператор T, який визначається формулою (1). Він є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$, переставним з операторм $\mathcal{J}$ і для нього виконується рівність $T1 = \varphi(z)$.

Через M_2 позначимо підпростір простору $\mathcal{H}(G)$ виду: $M_2 = T^{-1}(M_1)$. Зрозуміло, що M_2 є замкненим підпростором простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^2$. Оскільки $1 \in M_2$, то $\mathcal{J}^{2n}1 \in M_2$, $n = 0, 1, \ldots$, тобто $\{z^{2n} : n = 0, 1, \ldots\} \subset M_2$. Використовуючи замкненість простору M_2 і повноту системи $(z^{2n})_{n=0}^{\infty}$ в просторі $\mathcal{H}_0(G)$, звідси одержуємо, що $\mathcal{H}_0(G) \subset M_2$. Позначимо далі $M_2' = M_2 \bigcap \mathcal{H}_1(G)$.

Тоді

$$M_2 = \mathcal{H}_0(G) \oplus M_2'. \qquad (5)$$

Дійсно, нехай функція $f \in M_2$, тоді f єдиним чином подається у вигляді $f = f_0 + f_1$, де $f_0 \in \mathcal{H}_0(G)$, а $f_1 \in \mathcal{H}_1(G)$. З цієї рівності випливає, що $f_1 = (f - f_0) \in M_2$, бо $f, f_0 \in M_2$, а M_2 – підпростір простору $\mathcal{H}(G)$. Таким чином, $f_1 \in M_2'$ і, тим самим, доведене включення $M_2 \subset \mathcal{H}_0(G) \oplus M_2'$. Оскільки обернене включення є очевидним, то рівність (5) виконується. Крім того M_2' є замкненим підпростором простору $\mathcal{H}_1(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^2$, і за теоремою 1 він подається у вигляді $M_2' = \mathcal{J}^{2l}\mathcal{H}_1(G)$, де l – ціле невід'ємне число або символ $+\infty$.

Таким чином, M_2 зображається у вигляді

$$M_2 = \mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{2l}\mathcal{H}_1(G).$$

Звідси одержуємо, що $M_1 = T(\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{2l}\mathcal{H}_1(G))$, а

$$M = \mathcal{J}^k T(\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{2l}\mathcal{H}_1(G)) =$$
$$= T(\mathcal{J}^k\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{2l+k}\mathcal{H}_1(G)).$$

Розглядаючи випадки парного і непарного k, одержимо, що завжди підпростір M подається у вигляді (4).

Навпаки, якщо T – деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, який переставний з оператором інтегрування, а n_0 та n_1 – цілі невід'ємні числа або символи $+\infty$, то формулою (4) визначається замкнений підпростір M простору $\mathcal{H}(G)$, який інваріантний відносно оператора $\mathcal{J}^2$. Теорему 2 доведено.

Зауваження. Доведена теорема узагальнює опис замкнених підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантних відносно степеня оператора інтегрування [6], за яким у випадку, якщо G – довільна зіркова відносно точки $z = 0$ область комплексної площини, яка інваріантна відносно повороту навколо цієї точки на кут $\frac{2\pi}{m}$, то загальний вигляд замкнених підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантних відносно оператора $\mathcal{J}^m$, дається формулою

$$M = T(\mathcal{J}^{n_0 m}\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{n_1 m}\mathcal{H}_1(G)) \oplus \dots$$
$$\dots \oplus \mathcal{J}^{n_{m-1}m}\mathcal{H}_{m-1}(G)),$$

де T – деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, що комутує з $\mathcal{J}^m$, а n_k $(k = \overline{0, n-1})$ – деякі цілі невід'ємні числа або символи ∞.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Никольский Н.К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций. // Математический анализ, т.12: М. ВИНИТИ, 1974. – С. 199-412.
2. *Нагнибида Н.И.* О некоторых свойствах операторов обобщенного интегрирования в аналитическом пространстве. // Сиб. матем. ж. –1966.–Т.7,№6.–С.1306–1318.
3. *Царьков М.Ю.* Изоморфизмы аналитических пространств, перестановочные со степенью оператора интегрирования. // Теория функций, функц. анализ и их прилож.: Респ. межвед. науч. сб. – Харьков, 1971. – Вып. 13.– С. 54-63.
4. *Ткаченко В.А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщённого интегрирования в пространствах аналитических функционалов. // Матем. заметки.– 1977.–Т.22, №2.– С.221-230.
5. *Нагнибида Н.И.* Инвариантные подпространства оператора кратного интегрирования в пространстве аналитических функций в круге. // Теория функций, функц. анализ и их прилож.: Респ. межвед. науч. сб. – Харьков, 1970. – Вып. 11.– С. 63-66.
6. *Линчук Н.Е.* Представление решений некоторых операторных уравнений в аналитических пространствах и их применения. Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. Киев, 1987, 121 с.
7. *Лінчук Н.Є.* Інваріантні підпростори операторів узагальненого інтегруваня в прямій сумі просторів аналітичних функцій // Науковий вісник Чернівецького університету. Вип. 191-192. Математика.– Чернівці: Рута, 2004.– С. 76-78.
8. *Нагнибіда М.І.* Класичні оператори в просторах аналітичних функцій. –Київ, 1995.–297с.
9. *Dimovski I.H.* Convolutional Calculus. Series: Mathematics and its Applications.–1990.– Vol. 43.– 208p.