УДК 517.4

©2006 р. М.П.Ленюк, В.В.Мороз

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПОБУДОВА СКІНЧЕННОГО ГІБРИДНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРИ НАЯВНОСТІ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРУ В КРАЙОВИХ УМОВАХ ТА УМОВАХ СПРЯЖЕННЯ

В роботі побудовані власні елементи для лінійного диференціального оператора 2-го порядку самоспряженого типу з кусково-однорідними коефіцієнтами на сегменті з n точками спряження у випадку, коли спектральний параметр бере участь і в умовах спряження.

In this paper the own elements for linear differential operator of the second order of selfconjugate type with partial-homogeneous coefficients is constructed in the segment with n conjugate points in the case if spectral parameter takes part in the conjugate conditions.

Скінічені гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку, запроваджені в роботі [1]. В даній статті ми подаємо їх узагальнення на випадок, коли спектральний параметр спеціальним чином входить в крайові умови та умови спряження. Наявність таких інтегральних перетворень дає можливість одержати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку достатньо широкого класу задач квазістатики й динаміки для областей з м'якими межами.

Задача Штурма-Ліувілля на кусково-однорідному сегменті зі спектральним параметром в крайових умовах та умовах спряження. Розглянемо задачу побудови на множині

$$I_n = \{x : x \in \bigcup_{m=1}^{n+1} (a_{m-1}, a_m); a_0 \equiv a, a_{n+1} \equiv b\}$$

обмеженого ненульового розв'язку сепаратної системи лінійних однорідних звичайних диференціальних рівнянь

$$L[u] \equiv \sum_{m=1}^{n+1} \theta(x - a_{m-1})\theta(a_m - x)\times$$

$$\times(L_m + b_m^2\rho_m(x))u_m(x) = 0 \qquad (1)$$

за крайовими умовами

$$\left(\tilde{\alpha}_{11}^0 d/dx + \tilde{\beta}_{11}^0\right) u_1\Big|_{x=a} = 0,$$

$$\left(\tilde{\alpha}_{22}^{n+1} d/dx + \tilde{\beta}_{22}^{n+1}\right) u_{n+1}\Big|_{x=b} = 0 \qquad (2)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\tilde{\alpha}_{j1}^m d/dx + \tilde{\beta}_{j1}^m\right) u_m -\right.$$

$$\left.- \left(\tilde{\alpha}_{j2}^m d/dx + \tilde{\beta}_{j2}^m\right) u_{m+1}\right]\Big|_{x=a_m} = 0;$$

$$j = 1, 2, m = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

У рівностях (1) – (3) $b_m = \sqrt{\lambda^2 + k_m^2}a_m^{-1}$, $k_m^2 \geq 0$, λ – числовий (спектральний) параметр, $L_m = d/dx(p_m(x)d/dx) - q_m(x)$, $a_m > 0$, функції $p_m(x)$, $q_m(x)$, $\rho_m(x)$ – дійсні функції дійсної змінної, $\tilde{\alpha}_{jk}^m = \alpha_{jk}^m - b_m^2\delta_{jk}^m$, $\tilde{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m - b_m^2\gamma_{jk}^m$, $\alpha_{jk}^m \geq 0$, $\beta_{jk}^m \geq 0$, $\delta_{jk}^m \geq 0$, $\gamma_{jk}^m \geq 0$, $j = 1, 2$, $m = \overline{0, n}$, $k = 1, 2$. Будемо вважати, що $d/dxp_m(x)$, $q_m(x)$, $\rho_m(x)$ неперервні на інтервалі (a_{m-1}, a_m) функції; $p_m(x) \geq p_0 > 0$, $\rho_m(x) \geq \rho_0 > 0$.

Розглянемо квадратні матриці:

$$A_{11,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^k & \beta_{11}^k \\ \alpha_{21}^k & \beta_{21}^k \end{bmatrix}, \quad A_{12,k} = \begin{bmatrix} \delta_{11}^k & \gamma_{11}^k \\ \delta_{21}^k & \gamma_{21}^k \end{bmatrix}.$$

$$A_{21,k} = \begin{bmatrix} \alpha_{12}^k & \beta_{12}^k \\ \alpha_{22}^k & \beta_{22}^k \end{bmatrix}, \quad A_{22,k} = \begin{bmatrix} \delta_{12}^k & \gamma_{12}^k \\ \delta_{22}^k & \gamma_{22}^k \end{bmatrix}.$$

Введемо до розгляду числа $c_{ij,k} = -\det A_{ij,k}$, $c_{ij;mn}^{i_1,j_1,k}$ – визначник розміру 2×2, перший стовпець в якому i_1 взятий із матриці $A_{ij,k}$, а другий стовпець j_1 – із матриці $A_{mn,k}$:

$$c^{11,k}_{11,12} = \begin{vmatrix} \alpha^k_{11} & \delta^k_{11} \\ \alpha^k_{21} & \delta^k_{21} \end{vmatrix} = \alpha^k_{11}\delta^k_{21} - \alpha^k_{21}\delta^k_{11},$$

$$c^{11,k}_{11,21} = \begin{vmatrix} \alpha^k_{11} & \alpha^k_{12} \\ \alpha^k_{21} & \alpha^k_{22} \end{vmatrix} = \alpha^k_{11}\alpha^k_{22} - \alpha^k_{21}\alpha^k_{12}.$$

$$c^{22,k}_{11,21} = \begin{vmatrix} \beta^k_{11} & \beta^k_{12} \\ \beta^k_{21} & \beta^k_{22} \end{vmatrix} = \beta^k_{11}\beta^k_{22} - \beta^k_{21}\beta^k_{12},$$

$$c^{22,k}_{21,22} = \beta^k_{12}\gamma^k_{22} - \beta^k_{22}\delta^k_{12}.$$

Вимагаємо виконання умов на коефіцієнти:

$$c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0, \quad c_{12,k} = 0, \quad c_{22,k} = 0;$$

$$c^{12,k}_{11,12} = c^{21,k}_{11,12}.$$

Означення 1. Розв'язком крайової задачі (1) – (3) назвемо вектор-функцію $V(x,\beta) = \{V_1(x,\beta); V_2(x,\beta); \ldots; V_{n+1}(x,\beta)\}$ з такими властивостями: 1) функції $V_j(x,\beta)$ задовольняють однорідне рівняння

$$(L_m + b_m^2)V_m(x,\beta) = 0, \quad x \in [a_{m-1}, a_m) \quad (4)$$

та умови спряження (3); 2) справджуються крайові умови

$$\left(\tilde{\alpha}^0_{11} d/dx + \tilde{\beta}^0_{11}\right) V_1(x,\beta)\Big|_{x=a_0} = 0,$$

$$\left(\tilde{\alpha}^{n+1}_{22} d/dx + \tilde{\beta}^{n+1}_{22}\right) V_{n+1}(x,\beta)\Big|_{x=b} = 0. \quad (5)$$

Виділимо з рівняння (1) гібридний диференціальний оператор (ГДО)

$$\mathfrak{M} = \sum_{m=1}^{n+1} \theta(x - a_{m-1})\theta(a_m - x))L_m. \quad (6)$$

Означення 2. Областю визначення ГДО $\mathfrak{M}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(x) = \{g_1(x); g_2(x); \ldots; g_{n+1}(x)\}$, які задовольняють умови: 1) вектор-функція $f(x) = \{L_1[g_1(x)]; L_2[g_2(x)]; \ldots L_n[g_n(x)]; L_{n+1}[g_{n+1}(x)]\}$ неперервна на множині I_n; 2) функції $g_j(x)$ задовольняють умови спряження (3) та крайові умови (2).

Для елементів $u(x) \in G$ та $v(x) \in G$ визначимо скалярний добуток

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x)v(x)\sigma(x) \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{n+1} \int_{a_{i-1}}^{a_i} u_i(x)v_i(x)\sigma_i dx, \quad (7)$$

де числа $\sigma_i > 0$ підлягають визначенню.

Теорема 1. *Якщо $u(x) \in G$, $v(x) \in G$, то справджується базова тотожність*

$$[u'_k(x)v_k(x) - u_k(x)v'_k(x)]_{x=a_k} =$$

$$= \frac{c_{21,k}}{c_{11,k}}[u'_{k+1}(x)v_{k+1}(x) - u_{k+1}(x)v'_{k+1}(x)]_{x=a_k}. \quad (8)$$

Доведення. Приймемо позначення:

$$\tilde{a}^m_{11} = \tilde{\alpha}^m_{11}\tilde{\alpha}^m_{22} - \tilde{\alpha}^m_{21}\tilde{\alpha}^m_{12},\ \tilde{a}^m_{12} = \tilde{\alpha}^m_{11}\tilde{\beta}^m_{22} - \tilde{\alpha}^m_{21}\tilde{\beta}^m_{12},$$

$$\tilde{a}^m_{21} = \tilde{\beta}^m_{11}\tilde{\alpha}^m_{22} - \tilde{\beta}^m_{21}\tilde{\alpha}^m_{12},\ \tilde{a}^m_{22} = \tilde{\beta}^m_{11}\tilde{\beta}^m_{22} - \tilde{\beta}^m_{21}\tilde{\beta}^m_{12}.$$

Запишемо для $u(x)$ умови спряження:

$$\tilde{\alpha}^m_{11}u'_m(a_m) + \tilde{\beta}^m_{11}u_m(a_m) =$$

$$= \tilde{\alpha}^m_{12}u'_{m+1}(a_m) + \tilde{\beta}^m_{12}u_{m+1}(a_m),$$

$$\tilde{\alpha}^m_{21}u'_m(a_m) + \tilde{\beta}^m_{21}u_m(a_m) =$$

$$= \tilde{\alpha}^m_{22}u'_{m+1}(a_m) + \tilde{\beta}^m_{22}u_{m+1}(a_m). \quad (9)$$

Визначник алгебраїчної системи (9)

$$d_m = \tilde{\alpha}^m_{11}\tilde{\beta}^m_{21} - \tilde{\alpha}^m_{21}\tilde{\beta}^m_{11} =$$

$$= (\alpha^m_{11} - b_m^2\delta^m_{11})(\beta^m_{21} - b_m^2\gamma^m_{21}) -$$

$$-(\alpha^m_{21} - b_m^2\delta^m_{21})(\beta^m_{11} - b_m^2\gamma^m_{11}) =$$

$$= \alpha^m_{11}\beta^m_{21} - \alpha^m_{21}\beta^m_{11} + b_m^2[-\alpha^m_{11}\gamma^m_{21} - \delta^m_{11}\beta^m_{21} +$$

$$+\alpha^m_{21}\gamma^m_{11} + \beta^m_{11}\delta^m_{21}] + b_m^4(\delta^m_{11}\gamma^m_{21} - \delta^m_{21}\gamma^m_{11}) =$$

$$= -c_{11,m} + b_m^2(-c^{12,m}_{11,12} + c^{21,m}_{11,12}) + b_m^4 c_{12,m} =$$

$$= -c_{11,m} \neq 0.$$

За правилами Крамера маємо співвідношення:

$$u_m(a_m) = -c^{-1}_{11,m}(\tilde{a}^m_{11}u'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}^m_{12}u_{m+1}(a_m)),$$

$$u'_m(a_m) = c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{21}^m u'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{22}^m u_{m+1}(a_m)). \quad (10)$$

Такі ж рівності мають місце для компонент $v_m(x)$ вектор-функції $v(x) \in G$:

$$v_m(a_m) = -c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{11}^m v'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{12}^m v_{m+1}(a_m)),$$

$$v'_m(a_m) = c_{11,m}^{-1}(\tilde{a}_{21}^m v'_{m+1}(a_m) + \tilde{a}_{22}^m v_{m+1}(a_m)). \quad (11)$$

Із рівностей (10), (11) безпосередньо одержуємо:

$$u'_m(a_m)v_m(a_m) - u_m(a_m)v'_m(a_m) =$$
$$= c_{11,m}^{-2}(\tilde{a}_{11}^m\tilde{a}_{22}^m - \tilde{a}_{12}^m\tilde{a}_{21}^m)[u'_{m+1}(a_m)v_{m+1}(a_m)-$$
$$-u_{m+1}(a_m)v'_{m+1}(a_m)]. \quad (12)$$

В силу умов на коефіцієнти

$$\tilde{a}_{11}^m\tilde{a}_{22}^m - \tilde{a}_{12}^m\tilde{a}_{21}^m = (\tilde{\alpha}_{11}^m\tilde{\alpha}_{22}^m - \tilde{\alpha}_{21}^m\tilde{\alpha}_{12}^m)(\tilde{\beta}_{11}^m\tilde{\beta}_{22}^m-$$
$$-\tilde{\beta}_{21}^m\tilde{\beta}_{12}^m)-(\tilde{\alpha}_{11}^m\tilde{\beta}_{22}^m-\tilde{\alpha}_{21}^m\tilde{\beta}_{12}^m)(\tilde{\beta}_{11}^m\tilde{\alpha}_{22}^m-\tilde{\beta}_{21}^m\tilde{\alpha}_{12}^m) =$$
$$= -\tilde{\alpha}_{11}^m\tilde{\alpha}_{22}^m\tilde{\beta}_{21}^m\tilde{\beta}_{12}^m-\tilde{\alpha}_{21}^m\tilde{\alpha}_{12}^m\tilde{\beta}_{11}^m\tilde{\beta}_{22}^m+\tilde{\alpha}_{11}^m\tilde{\beta}_{22}^m\tilde{\alpha}_{12}^m\tilde{\beta}_{21}^m+$$
$$+\tilde{\alpha}_{21}^m\tilde{\alpha}_{22}^m\tilde{\beta}_{11}^m\tilde{\beta}_{12}^m = -\tilde{\alpha}_{11}^m\tilde{\beta}_{21}^m(\tilde{\alpha}_{22}^m\tilde{\beta}_{12}^m - \tilde{\alpha}_{12}^m\tilde{\beta}_{22}^m)+$$
$$+\tilde{\alpha}_{21}^m\tilde{\beta}_{11}^m(\tilde{\alpha}_{22}^m\tilde{\beta}_{12}^m - \tilde{\alpha}_{12}^m\tilde{\beta}_{22}^m) = c_{21,m}c_{11,m}$$

Рівність (12) при $m = k$ набуває вигляду (8).

Теорема 2. *Якщо виконані умови на коефіцієнти, то ГДО $\mathfrak{M}$ самоспряжений.*

Доведення. Нехай $u(x) \in G$ та $v(x) \in G$. Розглянемо скалярний добуток

$$I = (\mathfrak{M}[u], v(x)) = \sum_{m=1}^{n+1}\int_{a_{m-1}}^{a_m} L_m[u_m]\cdot v_m(x)\sigma_m dx.$$

Проінтегруємо двічі частинами під знаком інтегралів:

$$I = \sum_{m=1}^{n+1}\sigma_m[p_m(x)(u'_m(x)v_m(x)-$$
$$-u_m(x)v'_m(x))]_{a_{m-1}}^{a_m} + (u,\mathfrak{M}[v]) = (u,\mathfrak{M}[v])+$$
$$+\sigma_{n+1}p_{n+1}(b)[u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b)-u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b)]-$$
$$-\sigma_1 p_1(a)[u'_1(a)v_1(a) - u_1(a)v'_1(a)]+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\{\sigma_j p_j(a_j)[u'_j(a_j)v_j(a_j) - u_j(a_j)v'_j(a_j)]-$$
$$-\sigma_{j+1}p_{j+1}(a_j)[u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j)-$$
$$-u_{j+1}(a_j)v'_{j+1}(a_j)]\}. \quad (13)$$

Якщо $\alpha_{22}^{n+1} = 0$, то, поклавши $\beta_{22}^{n+1} = 1$, маємо:

$$u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b) =$$
$$= u'_{n+1}(b)\cdot 0 + 0\cdot v'_{n+1}(b) = 0.$$

Якщо $\alpha_{22}^{n+1} \neq 0$, то

$$u'_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b) =$$
$$= \frac{1}{\alpha_{22}^{n+1}}[\alpha_{22}^{n+1}u'_{n+1}(b) + \beta_{22}^{n+1}u_{n+1}(b)]v_{n+1}(b)-$$
$$-\frac{\beta_{22}^{n+1}}{\alpha_{22}^{n+1}}u_{n+1}(b)v_{n+1}(b) - u_{n+1}(b)v'_{n+1}(b) =$$
$$= (\alpha_{22}^{n+1})^{-1}\cdot 0\cdot v_{n+1}(b) - (\alpha_{22}^{n+1})^{-1}u_{n+1}(b)\times$$
$$\times[\alpha_{22}^{n+1}v'_{n+1}(b) + \beta_{22}^{n+1}v_{n+1}(b)] = 0.$$

Аналогічні міркування показують, що $u'_1(a)v_1(a) - u_1(a)v'_1(a) = 0$.

В силу базової тотожності (8)

$$\sigma_j p_j(a_j)[u'_j(a_j)v_j(a_j) - u_j(a_j)v'_j(a_j)] =$$
$$= \sigma_j p_j(a_j)\frac{c_{21,j}}{c_{11,j}}[u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j)-$$
$$-v'_{j+1}(a_j)u_{j+1}(a_j)].$$

Внаслідок цього маємо суму:

$$\sum_{j=1}^{n}[\sigma_j p_j(a_j)\frac{c_{21,j}}{c_{11,j}} - \sigma_{j+1}p_{j+1}(a_j)]\times$$
$$\times[u'_{j+1}(a_j)v_{j+1}(a_j) - u_{j+1}(a_j)v'_{j+1}(a_j)].$$

Звідси випливає рівність

$$\sigma_j p_j(a_j)\frac{c_{21,j}}{c_{11,j}} - \sigma_{j+1}p_{j+1}(a_j) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Якщо покласти $\sigma_{n+1}p_{n+1}(a_n) = 1$, то маємо рекурентні співвідношення

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{p_{n+1}(a_n)}, \quad \sigma_j = \prod_{m=j}^{n}\frac{c_{11,m}}{c_{21,m}}\frac{p_{m+1}(a_m)}{p_{m+1}(a_{m+1})}\times$$
$$\times\frac{p_{n+1}(a_{n+1})}{p_j(a_j)p_{n+1}(a_n)}, j = \overline{1,n}. \quad (14)$$

При такому виборі чисел σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_n, σ_{n+1} рівність (13) набуває вигляду:

$$(\mathfrak{M}[u], v(x)) = (u, \mathfrak{M}[v(x)]).$$

Значить, оператор $\mathfrak{M}$ самоспряжений. Отже, його спектр дійсний [2].

Висновок. Для того, щоб ГДО $\mathfrak{M}$ був самоспряженим, необхідно й досить, щоб числа σ_j визначалися із рекурентних співвідношень (13).

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння

$$[L_m + b_m^2\rho_m(x)]u_m(x) = 0, \quad m = \overline{1, n+1} \tag{15}$$

утворюють регулярні функції $u_{1m}(x, b_m)$ та $u_{2m}(x, b_m)$ [3].

Загальним розв'язком рівняння (10) є функція

$$V_m(x, \lambda) = A_m u_{1m}(x, b_m) + B_m u_{2m}(x, b_m),$$
$$m = \overline{1, n+1}. \tag{16}$$

Визначимо функції

$$U_{ik,s}^{m1}(a_m, b_m(\lambda)) = (\tilde{\alpha}_{ik}^m d/dx + \tilde{\beta}_{ik}^m)u_{1s}(x, b_m)\Big|_{x=a_m},$$

$$U_{ik,s}^{m2}(a_m, b_m(\lambda)) = (\tilde{\alpha}_{ik}^m d/dx + \tilde{\beta}_{ik}^m)u_{2s}(x, b_m)\Big|_{x=a_m}.$$

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення $(2n+2)$ невідомих A_m, B_m $(m = \overline{1, n+1})$ дають алгебраїчну систему з $(2n+2)$ рівнянь:

$$U_{11,1}^{01}(a, b_1(\lambda))A_1 + U_{11,1}^{02}(a, b_1(\lambda))B_1 = 0,$$
$$k = 1, 2, m = \overline{1, n},$$
$$U_{j1,m}^{m1}(a_m, b_m)A_m + U_{j1,m}^{m2}(a_m, b_m)B_m -$$
$$-U_{j2,m+1}^{m1}(a_m, b_{m+1})A_{m+1} -$$
$$-U_{j2,m+1}^{m2}(a_m, b_{m+1})B_{m+1} = 0, \tag{17}$$
$$U_{22,n+1}^{n+1,1}(b, b_{n+1})A_{n+1} + U_{22,n+1}^{n+1,2}(b, b_{n+1})B_{n+1} = 0.$$

Для того, щоб алгебраїчна система (12) мала ненульові розв'язки, необхідно й досить, щоб її визначник був рівний нулю [4]:

$$\Delta_n(\lambda) = 0. \tag{18}$$

Оскільки параметр λ входить в систему (1) аналітично, то фундаментальна система розв'язків

$$\{u_{1m}(x, \lambda); u_2(x, \lambda)\}_{m=1}^{n+1}$$

є цілими функціями цього параметра на площині λ. Тоді функції $U_{ik,s}^{mj}(a_m, \lambda)$ теж є цілими аналітичними функціями параметра λ. Тому $\Delta_n(\lambda)$ – ціла аналітична функція параметра λ. Оскільки $\Delta_n(\lambda) \neq 0$, то згідно теореми про нулі аналітичної функції [3], корені трансцендентного рівняння (13) є ізольованими точками на площині λ. Отже, множина власних чисел крайової задачі (1) – (3) не більше, ніж зліченна, й не має жодної скінченної граничної точки на площині λ. Іншими словами, точкою згущення нулів трансцендентного рівняння (13) є нескінченно віддалена точка.

Висновок. Власні числа оператора L дійсні й утворюють дискретну множину.

Введемо до розгляду функції:

$$\Psi_{ij}^m(a_m, b_m, b_{m+1}) = U_{12,m+1}^{mi}(a_m, b_{m+1})\times$$
$$\times U_{21,m}^{mj}(a_m, b_m) - U_{11,m}^{mj}(a_m, b_m)U_{22,m+1}^{mi}(a_m, b_{m+1}),$$
$$k_1^{(0)}(a_0, \lambda) = U_{11,1}^{01}(a, b_1),$$
$$k_2^{(0)}(a_0, \lambda) = U_{11,1}^{02}(a, b_1), a_0 = a,$$
$$k_j^{(1)}(a_0, a_1, b_1, b_2) = k_1^{(0)}(a_0, \lambda)\Psi_{j2}^1(a_1, b_1, b_2) -$$
$$-k_2^0(a_0, \lambda)\Psi_{j1}^1(a_1, b_1, b_2), \quad j = 1, 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$k_j^{(p)}(a_0, a_1, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}) =$$
$$= k_1^{(p-1)}(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}; b_1, b_2, \ldots, b_p)\times$$
$$\times\Psi_{j2}^p(a_p, b_p, b_{p+1}) -$$
$$-k_2^{(p-1)}(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}; b_1, b_2, \ldots, b_p)\times$$
$$\times\Psi_{j1}^p(a_p, b_p, b_{p+1}), \quad p = \overline{1, n}.$$

Для знаходження власних чисел ГДО $\mathfrak{M}$ маємо рекурентні співвідношення:

$$\Delta_n(\lambda) \equiv U_{22,n+1}^{n+1,2}(a_{n+1}, b_{n+1})k_1^{(n)}(a_0, a_1, \ldots, a_n;$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}) - U_{22,n+1}^{n+1,1}(a_{n+1}, b_{n+1})\times$$

$$\times k_2^{(n)}(a_0,a_1,\ldots,a_n;b_1,b_2,\ldots,b_n,b_{n+1})=0. \quad (19)$$

Корінь λ_j ($b_{mj}=\sqrt{\lambda_j^2+b_m^2}$) рівняння (19) підставимо в алгебраїчну систему (17) й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Покладемо $A_1=A_0U_{11,1}^{02}(a_0,b_{1j})$, $B_1=-A_0U_{11,1}^{01}(a_0,b_{1j})$, де величина A_0 підлягає визначенню. Перше рівняння стає тотожністю, а решта утворюють попарно сепаратну систему:

$$U_{i2,m+1}^{m1}(a_m,b_{m+1,j})A_{m+1}+$$
$$+U_{i2,m+1}^{m2}(a_m,b_{m+1,j})B_{m+1}=U_{i1,m}^{m1}(a_m,b_{mj})A_m+$$
$$+U_{i1,m}^{m2}(a_m,b_{mj})B_m,\quad m=\overline{1,n},i=1,2. \quad (20)$$

Визначник алгебраїчної системи (20)

$$\Delta_{m+1}(\lambda_j)\equiv U_{12,m+1}^{m1}(a_m,b_{m+1,j})\times$$
$$\times U_{22,m+1}^{m2}(a_m,b_{m+1,j})-$$
$$-U_{22,m+1}^{m1}(a_m,b_{m+1,j})U_{12,m+1}^{m2}(a_m,b_{m+1,j})=$$
$$=c_{21,m}W[u_{1,m+1}(x,b_{m+1,j}),u_{2,m+1}(x,b_{m+1,j})]\equiv$$
$$\equiv c_{21,m}\delta_{m+1}(\lambda_j)\neq 0. \quad (21)$$

Отже, алгебраїчна системи (20) має єдиний розв'язок. Згідно правил Крамера знаходимо:

$$A_2=\frac{A_0}{c_{21,1}\delta_2(\lambda_j)}k_2^{(1)}(a_0,a_1,b_{1j},b_{2j}),$$

$$B_2=-\frac{A_0}{c_{21,1}\delta_2(\lambda_j)}k_1^{(1)}(a_0,a_1,b_{1j},b_{2j}),$$

$$A_3=\frac{A_0}{\Delta_2(\lambda_j)\Delta_3(\lambda_j)}k_2^{(2)}(a_0,a_1,a_2;b_{1j},b_{2j},b_{3j}),$$

$$B_3=-\frac{A_0}{\Delta_2(\lambda_j)\Delta_3(\lambda_j)}k_1^{(2)}(a_0,a_1,a_2;b_{1j},b_{2j},b_{3j}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{m+1}=\frac{A_0}{\prod\limits_{i=2}^{m+1}\Delta_i(\lambda_j)}k_2^{(m)}(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_m;$$
$$b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{m+1,j}),m=\overline{1,n},$$

$$B_{m+1}=-\frac{A_0}{\prod\limits_{i=2}^{m+1}c_{21,i-1}\Delta_i(\lambda_j)}\times$$
$$k_1^{(m)}(a_0,a_1,a_2,\ldots,a_m;b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{m+1,j}).$$

Покладемо $A_0=\prod\limits_{i=2}^{n+1}\Delta_i(\lambda_j)\equiv\prod\limits_{i=2}^{n+1}c_{21,i-1}\delta_i(\lambda_j)$. Одержуємо:

$$V_{m+1}(x,\lambda_j)=A_{m+1}u_{1,m+1}(x,b_{m+1,j})+$$
$$+B_{m+1}u_{2,m+1}(x,b_{m+1,j})=$$
$$=\Big[\prod_{i=m+2}^{n+1}c_{21,i-1}\delta_i(\lambda_j)\Big]\{k_2^{(m)}(a_1,a_1,\ldots,a_m;$$
$$b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{m+1,j})u_{1,m+1}(x,b_{m+1,j})-$$
$$-k_1^{(m)}(a_1,a_1,\ldots,a_m;b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{m+1,j})\times$$
$$\times u_{2,m+1}(x,b_{m+1,j})\};\quad m=\overline{0,n-1}, \quad (22)$$
$$V_{n+1}(x,\lambda_j)=k_2^{(n)}(a_1,a_1,\ldots,a_n;$$
$$b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{n+1,j})u_{1,n+1}(x,b_{n+1,j})-$$
$$-k_1^{(n)}(a_1,a_1,\ldots,a_n;b_{1j},b_{2j},\ldots,b_{n+1,j})\times$$
$$\times u_{2,n+1}(x,b_{n+1,j}).$$

За відомими $V_m(x,\lambda_j)$ ($m=\overline{1,n+1}$) стає відомою власна вектор-функція $V(x,\lambda_j)$, що відповідає власному числу λ_j:

$$V(x,\lambda_j)=\sum_{m=1}^{n+1}\theta(x-a_{m-1})\theta(a_m-x)V_m(x,\lambda_j). \quad (23)$$

Обчислимо квадрат норми власної функції $V(x,\lambda_j)$.

Для $\lambda_i\neq\lambda_j$ розглянемо $V_m(x,\lambda_i)$ та $V_m(x,\lambda_j)$. За побудовою функція $V_m(x,\lambda_i)$ задовольняє рівняння

$$[L_m+a_m^{-2}(\lambda_i^2+k_m^2)\rho_m(x)]V_m(x,\lambda_i)=0, \quad (24)$$

а функція $V_m(x,\lambda_j)$ задовольняє рівняння

$$[L_m+a_m^{-2}(\lambda_j^2+k_m^2)\rho_m(x)]V_m(x,\lambda_j)=0. \quad (25)$$

Рівняння (24) помножимо на функцію $V_m(x,\lambda_j)$, а рівняння (25) помножимо на функцію $V_m(x,\lambda_i)$ й віднімемо від першого друге:

$$V_m(x,\lambda_j)L_m[V_m(x,\lambda_i)]-V_m(x,\lambda_i)L_m[V_m(x,\lambda_j)]+$$

$$+[b_m^2(\lambda_i)-b_m^2(\lambda_j)]V_m(x,\lambda_i)V_m(x,\lambda_j)=0.$$

Одержану рівність перепишемо так:

$$[b_m^2(\lambda_i)-b_m^2(\lambda_j)]V_m(x,\lambda_i)V_m(x,\lambda_j)\rho_m(x)=$$
$$=\frac{d}{dx}\{p_m(x)[V_m(x,\lambda_i)\frac{dV_m(x,\lambda_j)}{dx}-$$
$$-V_m(x,\lambda_j)\frac{dV_m(x,\lambda_i)}{dx}]\}. \tag{26}$$

Рівність (26) помножимо на $\sigma_m dx$ та проінтегруємо по x від $x=a_{m-1}$ до $x=a_m$:

$$\int\limits_{a_{m-1}}^{a_m} V_m(x,\lambda_i)V_m(x,\lambda_j)\sigma_m\rho_m(x)dx=$$
$$=\frac{\sigma_m p_m(x)}{b_m^2(\lambda_i)-b_m^2(\lambda_j)}[V_m(x,\lambda_i)\frac{dV_m(x,\lambda_j)}{dx}-$$
$$-V_m(x,\lambda_j)\frac{dV_m(x,\lambda_i)}{dx}]\Big|_{a_{m-1}}^{a_m}.$$

Просумуємо по m від $m=1$ до $m=n+1$:

$$\int\limits_a^b V(x,\lambda_i)V(x,\lambda_j)\sigma(x)\rho(x)dx=$$
$$=\sum_{m=1}^{n+1}\frac{\sigma_m p_m(x)}{b_m^2(\lambda_i)-b_m^2(\lambda_j)}[V_m(x,\lambda_i)\frac{dV_m(x,\lambda_j)}{dx}-$$
$$-V_m(x,\lambda_j)\frac{dV_m(x,\lambda_i)}{dx}]\Big|_{a_{m-1}}^{a_m}. \tag{27}$$

Праву частину рівності (27) зобразимо у такому вигляді:

$$\mathcal{R}_n=-\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}p_{n+1}(a_{n+1})}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}\times$$
$$\times[-V_{n+1}(a_{n+1,\lambda_i})V'_{n+1}(a_{n+1,\lambda_j})+V_{n+1}(a_{n+1,\lambda_j})\times$$
$$\times V'_{n+1}(a_{n+1,\lambda_i})]+\sum_{s=1}^{n}\left\{\frac{a_s^2\sigma_s p_s(a_s)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[V_s(a_s,\lambda_i)\times\right.$$
$$\times V'_s(a_s,\lambda_j)-V_s(a_s,\lambda_j)V'_s(a_s,\lambda_i)]-$$
$$-\frac{a_{s+1}^2\sigma_{s+1}p_{s+1}(a_s)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[V_{s+1}(a_s,\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)-$$
$$\left.-V_{s+1}(a_s,\lambda_j)V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)]\right\}-$$
$$-\frac{a_1^2\sigma_1 p_1(a_0)}{\lambda_i^2-\lambda_j^2}[-V_1(a_0,\lambda_i)V'_1(a_0,\lambda_j)+$$
$$+V_1(a_0,\lambda_j)V'_1(a_0,\lambda_i)]. \tag{28}$$

Функції $V_m(x,\lambda)$ задовольняють умови спряження. В силу рівностей (10) маємо співвідношення:

$$V_s(a_s,\lambda_i)=-c_{11,s}^{-1}[\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)+$$
$$+\tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)V_{s+1}(a_s,\lambda_i)],$$
$$V'_s(a_s,\lambda_i)=c_{11,s}^{-1}[\tilde{a}_{21}^s(\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)+$$
$$+\tilde{a}_{22}^s(\lambda_i)V_{s+1}(a_s,\lambda_i)],$$
$$V_s(a_s,\lambda_j)=-c_{11,s}^{-1}[\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)+$$
$$+\tilde{a}_{12}^s(\lambda_j)V_{s+1}(a_s,\lambda_j)],$$
$$V'_s(a_s,\lambda_j)=c_{11,s}^{-1}[\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)+$$
$$+\tilde{a}_{22}^s(\lambda_j)V_{s+1}(a_s,\lambda_j)]. \tag{29}$$

На основі рівностей (29) безпосередніми підрахунками знаходимо:

$$\tilde{\alpha}_{11}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{si})-\tilde{\alpha}_{11}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{sj})=$$
$$=(q_{sj}-q_{si})_R C_{11,12}^{11,s},$$
$$\tilde{\alpha}_{21}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{sj})-\tilde{\alpha}_{11}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{si})=$$
$$=c_{11,s}+_R C_{11,12}^{12,s}q_{si}-_R C_{11,12}^{21,s}q_{sj},$$
$$\tilde{\alpha}_{21}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{11}^s(q_{si})-\tilde{\alpha}_{11}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{sj})=$$
$$=c_{11,s}+_R C_{11,12}^{12,s}q_{sj}-_R C_{11,12}^{21,s}q_{si},$$
$$\tilde{\alpha}_{21}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{si})-\tilde{\alpha}_{21}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{21}^s(q_{sj})=$$
$$=(q_{sj}-q_{si})_R C_{11,12}^{22,s} \tag{30}$$

Буква R означає, що беруться елементи із рядків: ${}_R c_{11,12}^{11}=\alpha_{11}^s\gamma_{11}^s-\beta_{11}^s\delta_{11}^s$ – визначник другого порядку, в якому перший рядок утворюють елементи першого рядка матриці $A_{11,s}$, а другий рядок – елементи першого рядка матриці $A_{12,s}$, ...

Зауважимо, що із рівності $C_{11,12}^{12,s}=C_{11,12}^{21,s}$ одразу випливає рівність ${}_R C_{11,12}^{12,s}={}_R C_{11,12}^{21,s}$.

Розглянемо вираз

$$I_s\equiv V_s(a_s,\lambda_i)V'_s(a_s,\lambda_j)-V_s(a_s,\lambda_j)V'_s(a_s,\lambda_i). \tag{31}$$

В силу співвідношень (29) маємо:

$$I_s = \frac{1}{c_{11,s}^2}\{[\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)]\times$$

$$\times V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j) + [\tilde{a}_{12}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_i)-$$

$$-\tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_j)]V_{s+1}(a_s,\lambda_i)V_{s+1}(a_s,\lambda_j)+$$

$$+[\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j)]V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)\times$$

$$\times V_{s+1}(a_s,\lambda_i)-[\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_j)-\tilde{a}_{21}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{12}^s(\lambda_j)]\times$$

$$\times V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)V_{s+1}(a_s,\lambda_j)\}.$$

На основі рівностей (25) встановлюємо:

1)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si})\times$$

$$\times\{\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si})\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj})_R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si})\tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times{}_R C_{11,12}^{22,s} -_R C_{11,12}^{12,s}[\tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si})\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj})] - c_{11,s}C_{21,22}^{11,s}\},$$

2)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si})\times$$

$$\times\{\tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj})_R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\beta}_{12}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times{}_R C_{11,12}^{22,s} -_R C_{11,12}^{12,s}[\tilde{\beta}_{12}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times\tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})] - c_{11,s}C_{21,22}^{11,s}\}, \qquad (33)$$

3)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_j)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_i) - \tilde{a}_{12}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{21}^s(\lambda_j) = (q_{sj} - q_{si})\times$$

$$\times\{\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})_R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj})\tilde{\beta}_{12}^s(q_{si})\times$$

$$\times{}_R C_{11,12}^{22,s} -_R C_{11,12}^{12,s}[\tilde{\beta}_{12}^s(q_{si})\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times\tilde{\beta}_{22}^s(q_{si})] - c_{11,s}C_{21,22}^{12,s}\} + c_{11,s}c_{21,s},$$

4)

$$\tilde{a}_{11}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{22}^s(\lambda_j) - \tilde{a}_{21}^s(\lambda_i)\tilde{a}_{12}^s(\lambda_j) = -(q_{sj} - q_{si})\times$$

$$\times\{\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj})_R C_{11,12}^{11,s} + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj})\times$$

$$\times{}_R C_{11,12}^{22,s} -_R C_{11,12}^{12,s}[\tilde{\alpha}_{22}^s(q_{si})\tilde{\beta}_{12}^s(q_{sj}) + \tilde{\alpha}_{12}^s(q_{si})\times$$

$$\times\tilde{\beta}_{22}^s(q_{sj})] - c_{11,s}C_{21,22}^{12,s}\} + c_{11,s}c_{21,s}.$$

Підстановка рівностей (32) у вираз (31) дає:

$$c_{11,s}^2 I = (q_{sj}-q_{si})\{[{}_R C_{11,12}^{11,s}Z_{22}^s(a_s,\lambda_j)Z_{22}^s(a_s,\lambda_i)+$$

$$+{}_R C_{11,12}^{22,s}Z_{12}^s(a_s,\lambda_j)Z_{12}^s(a_s,\lambda_i) -_R C_{11,12}^{12,s}\times$$

$$\times[Z_{12}^s(a_s,\lambda_i)Z_{22}^s(a_s,\lambda_j)+Z_{12}^s(a_s,\lambda_j)Z_{22}^s(a_s,\lambda_i)]-$$

$$-c_{11,s}[C_{21,22}^{11}V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j) + C_{21,22}^{12}\times$$

$$\times(V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)V_{s+1}(a_s,\lambda_i) + V_{s+1}(a_s,\lambda_j)\times$$

$$\times V'_{s+1}(a_s,\lambda_i))+C_{21,22}^{22}V_{s+1}(a_s,\lambda_i)V_{s+1}(a_s,\lambda_j)]\}+$$

$$+c_{11,s}c_{21,s}[V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)V_{s+1}(a_s,\lambda_i)-$$

$$-V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)]. \qquad (34)$$

У рівності (34) беруть участь функції

$$Z_{m2}^s(a_s,\lambda_j) = \tilde{\alpha}_{m2}^s(q_{sj})V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)+$$

$$+\tilde{\beta}_{m2}^s(q_{sj})V_{s+1}(a_s,\lambda_j), \quad m = 1,2,$$

$$Z_{m2}^s(a_s,\lambda_i) = \tilde{\alpha}_{m2}^s(q_{si})V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)+$$

$$+\tilde{\beta}_{m2}^s(q_{si})V_{s+1}(a_s,\lambda_i).$$

Оскільки

$${}_R C_{11,12}^{11,s}{}_R C_{11,22}^{12,s} -_R C_{11,12}^{12,s}{}_R C_{11,22}^{21,s} =$$

$$= c_{11,s}c_{12,s} = c_{11,s}\cdot 0 = 0,$$

$$C_{21,22}^{11,s}C_{21,22}^{22,s} - C_{21,22}^{12,s}C_{21,22}^{21,s} =$$

$$= c_{21,s}c_{22,s} = c_{21,s}\cdot 0 = 0,$$

та ${}_R C_{11,12}^{12,s} =_R C_{11,12}^{21,s}$ і $C_{21,22}^{12,s} = C_{21,22}^{12,s}$, то маємо рівності:

$${}_R C_{11,12}^{11,s}{}_R C_{11,22}^{22,s} = ({}_R C_{11,12}^{12,s})^2,$$

$$C_{21,22}^{11,s}C_{21,22}^{22,s} = (C_{21,22}^{12,s})^2.$$

Вираз I набуває вигляду:

$$c_{11,s}^2 I = (q_{s_j} - q_{si})\{[\sqrt{{}_R C_{11,12}^{11,s}}Z_{22}^s(a_s,\lambda_j)-$$

$$-\sqrt{{}_R C_{11,12}^{22,s}}Z_{12}^s(a_s,\lambda_j)][\sqrt{{}_R C_{11,12}^{11,s}}Z_{22}^s(a_s,\lambda_i)$$

$$-\sqrt{{}_R C_{11,12}^{22,s}}Z_{12}^s(a_s,\lambda_i)]-c_{11,s}[(\sqrt{C_{21,22}^{11,s}}V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)+$$

$$+\sqrt{C_{21,22}^{22,s}}V_{s+1}(a_s,\lambda_j)(\sqrt{C_{21,22}^{11,s}}V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)+$$

$$+\sqrt{C_{21,22}^{22,s}}V_{s+1}(a_s,\lambda_i))))]\} + c_{11,s}\cdot c_{21,s}\times$$

$$\times[V'_{s+1}(a_s,\lambda_j)V_{s+1}(a_s,\lambda_i) - V'_{s+1}(a_s,\lambda_i)\times$$

$$\times V_{s+1}(a_s,\lambda_j)]. \qquad (35)$$

Внаслідок вибору чисел σ_s

$$a_s^2\sigma_s p_s(a_s)\cdot\frac{c_{21,s}}{c_{11,s}} - a_{s+1}^2\sigma_{s+1}p_{s+1}(a_s) = 0.$$

Оскільки $q_{sj} - q_{si} = \lambda_j^2 + k_s^2 - (\lambda_i^2 + k_s^2) = \lambda_j^2 - \lambda_i^2$, то сума, яка бере участь у виразі (23), набуває вигляду:

$$\mathcal{R}_1 \equiv -\sum_{s=1}^{n} a_s^2\sigma_s p_s(a_s)\overline{c}_{11,s}^2\{[\sqrt{{}_RC_{11,12}^{11,s}}Z_{22}^s(a_s,\lambda_j) -$$

$$-\sqrt{{}_RC_{11,12}^{22,s}}Z_{12}^s(a_s,\lambda_j)]\times$$

$$\times[\sqrt{{}_RC_{11,12}^{11,s}}Z_{22}^s(a_s,\lambda_i) - \sqrt{{}_RC_{11,12}^{22,s}}Z_{12}^s(a_s,\lambda_i)] +$$

$$+c_{11,s}[(\sqrt{\overline{C}_{21,22}^{11,s}}V_{s+1}'(a_s,\lambda_j) + \sqrt{\overline{C}_{21,22}^{12,s}}\times$$

$$\times V_{s+1}(a_s,\lambda_j)(\sqrt{\overline{C}_{21,22}^{11,s}}V_{s+1}'(a_s,\lambda_i) +$$

$$+\sqrt{\overline{C}_{21,22}^{12,s}}V_{s+1}(a_s,\lambda_i)))]\} \equiv -\mathcal{R}_n^*(\lambda_i,\lambda_j),$$

$$\overline{C}_{21,22}^{11,s} = -C_{21,22}^{11,s} = \alpha_{22}^s\delta_{12}^s - \alpha_{12}^s\delta_{22}^s \geq 0,$$

$$\overline{C}_{21,22}^{22,s} = \beta_{22}^s\gamma_{12}^s - \beta_{12}^s\gamma_{22}^s \geq 0.$$

Розглянемо вираз

$$[\alpha_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_i) + \beta_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_i)]\times$$

$$\times[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j)] -$$

$$-[\alpha_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_j) + \beta_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j)]\times$$

$$\times[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j)] =$$

$$= (\alpha_{11}^0\gamma_{11}^0 - \beta_{11}^0\delta_{11}^0)\times$$

$$\times[V_1(a_0,\lambda_j)V_1'(a_0,\lambda_i) - V_1(a_0,\lambda_i)V_1'(a_0,\lambda_j)]. \tag{37}$$

Із крайової умови в точці a_0 маємо рівності:

$$\alpha_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_i) + \beta_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_i) =$$

$$= q_{1i}[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_i)],$$

$$\alpha_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_j) + \beta_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j) =$$

$$= q_{1j}[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j)]. \tag{38}$$

Із (37) внаслідок співвідношень (38) знаходимо:

$$V_1(a_0,\lambda_j)V_1'(a_0,\lambda_i) - V_1(a_0,\lambda_i)V_1'(a_0,\lambda_j) =$$

$$= \frac{q_{1i} - q_{1j}}{\alpha_{11}^0\gamma_{11}^0 - \beta_{11}^0\delta_{11}^0}\times$$

$$\times[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_i) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_i)]\times$$

$$\times[\delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda_j) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda_j)].$$

Аналогічно знаходимо:

$$V_{n+1}(a_{n+1},\lambda_j)V_{n+1}'(a_{n+1},\lambda_i) -$$

$$-V_{n+1}(a_{n+1},\lambda_i)V_{n+1}'(a_{n+1},\lambda_j) =$$

$$= \frac{q_{n+1,i} - q_{n+1,j}}{\alpha_{22}^{n+1}\gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1}\delta_{22}^{n+1}}\times$$

$$\times[\delta_{22}^{n+1}V_{n+1}'(a_{n+1},\lambda_i) + \gamma_{22}^{n+1}V_{n+1}(a_{n+1},\lambda_i)]\times$$

$$\times[\delta_{22}^{n+1}V_1'(a_{n+1},\lambda_j) + \gamma_{22}^{n+1}V_{n+1}(a_{n+1},\lambda_j)].$$

На основі обчислених співвідношень вираз (28) набуває вигляду:

$$\mathcal{R}_n = -\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}p_{n+1}(a_{n+1})}{\alpha_{22}^{n+1}\gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1}\delta_{22}^{n+1}}\times$$

$$\times Z_{22}^{n+1}(a_{n+1},\lambda_i)Z_{22}^{n+1}(a_{n+1},\lambda_j) -$$

$$-\mathcal{R}_n^*(\lambda_i,\lambda_j) - \frac{a_1^2\sigma_1 p_1(a_0)}{\beta_{11}^0\delta_{11}^0 - \alpha_{11}^0\gamma_{11}^0}\times$$

$$\times Z_{11}^0(a_0,\lambda_0)Z_{11}^0(a_0,\lambda_j) \equiv -\theta_n(\lambda_i,\lambda_j),$$

$$Z_{11}^0(a_0,\lambda) = \delta_{11}^0 V_1'(a_0,\lambda) + \gamma_{11}^0 V_1(a_0,\lambda),$$

$$Z_{22}^{n+1}(a_{n+1},\lambda) = \delta_{22}^{n+1}V_{n+1}'(a_{n+1},\lambda) +$$

$$+\gamma_{22}^n V_{n+1}(a_{n+1},\lambda).$$

Ми вважаємо, що $(\alpha_{22}^{n+1}\gamma_{22}^{n+1} - \beta_{22}^{n+1}\delta_{22}^{n+1}) \equiv q_{n+1} > 0$, $(\beta_{11}^0\delta_{11}^0 - \alpha_{11}^0\gamma_{11}^0) \equiv q_0 > 0$.

Повертаючись до рівностей (22), маємо:

$$\int_a^b V(x,\lambda_i)V(x,\lambda_j)\sigma(x)\rho(x)dx + \theta_n(\lambda_i,\lambda_j) = 0. \tag{40}$$

Рівність (40) при $\lambda_i \neq \lambda_j$ означає, що система власних вектор-функцій $\{V(x,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ узагальнено ортогональна.

Ліва частина рівності (40) при $\lambda_i = \lambda_j$ визначає квадрат норми власної векторфункції

$$\|V(x,\lambda_j)\|_1^2 = \int_a^b [V(x,\lambda_j)]^2\sigma(x)\rho(x)dx +$$

$$+\theta_n(\lambda_j,\lambda_j). \qquad (41)$$

У рівності (41) функція

$$\theta_n(\lambda_j,\lambda_j)=\frac{a_{n+1}^2\sigma_{n+1}p_{n+1}(a_{n+1})}{\alpha_{22}^{n+1}\gamma_{22}^{n+1}-\beta_{22}^{n+1}\delta_{22}^{n+1}}\times$$

$$\times[Z_{22}^{n+1}(a_{n+1},\lambda_j)]^2+\sum_{s=1}^{n}a_s^2\sigma_s p_s(a_s)\times$$

$$\times c_{11,s}^{-2}\{[\sqrt{{}_R C_{11,12}^{11,s}}Z_{22}^s(a_s,\lambda_j)-\sqrt{{}_R C_{11,12}^{22,s}}\times$$

$$\times Z_{12}^s(a_s,\lambda_j)]^2+c_{11,s}[\sqrt{\overline{C}_{21,22}^{11,s}}V_{s+1}'(a_s,\lambda_j)+$$

$$+\sqrt{\overline{C}_{21,22}^{22,s}}V_{s+1}(a_s,\lambda_j)]^2\}+\frac{a_1^2\sigma_1 p_1(a_0)}{\beta_{11}^0\delta_{11}^0-\alpha_{11}^0\gamma_{11}^0}\times$$

$$\times[Z_{11}^0(a_0,\lambda_j)]^2. \qquad (42)$$

Наявність вагової функції $\sigma(x)$, спектральної вектор-функції $V(x,\lambda_j)$ та її квадрату норми $\|V(r,\lambda_j)\|_1^2$ дає можливість визначити пряме H_n й обернене H_n^{-1} скінченне гібридне інтегральне перетворення, породжене спектральною задачею Штурма-Ліувілля (1) – (3):

$$H_n[g(x)]=\int_a^b g(x)V(x,\lambda_j)\sigma(x)dx\equiv\tilde{g}_j=$$

$$=\sum_{m=1}^{n+1}\int_{a_{m-1}}^{a_m}g_m(x)V_m(x,\lambda_j)\sigma_m p_m(x)dx, \qquad (43)$$

$$H_n^{-1}[\tilde{g}_j]=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{g}_j\frac{V(x,\lambda_j)}{\|V(x,\lambda_j)\|_1^2}\equiv g(x). \qquad (44)$$

Математичним обгрунтуванням правил (42), (43) є твердження.

Теорема 3 (про дискретний спектр). *Корені трансцендентного рівняння $\Delta_n(\lambda)=0$ складають дискретний спектр: дійсні, різні, симетричні відносно $\lambda=0$, на додатній піввісі $\lambda>0$ утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\lambda=\infty$.*

Теорема 4 (про дискретну функцію). *Система $\{V(x,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ власних вектор-функцій гібридного диференціального оператора L узагальнено ортогональна, повна та замкнена.*

Теорема 5 (про зображення рядом Фур'є). *Будь-яка вектор-функція $g(x)\in G$ зображається абсолютно й рівномірно збіжним на множині E_n рядом Фур'є за системою $\{V(x,\lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$:*

$$g(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\int_a^b g(\xi)V(\xi,\lambda_j)\sigma(\xi)d\xi\frac{V(x,\lambda_j)}{\|V(x,\lambda_j)\|_1^2}. \qquad (45)$$

Ряд Фур'є (45) і визначає оператори інтегрального перетворення H_n та H_n^{-1}.

Доведення сформульованих тверджень й застосування запровадженого гібридного скінченного інтегрального перетворення до розв'язання задач математичної фізики неоднорідних структур автори подадуть в інших роботах.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Комаров Г.М., Ленюк М.П., Мороз В.В.* Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

2. *Березанский Ю.М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.

3. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

4. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1971. – 431 с.