УДК 517.95

©2006 р. **Коркуна О. Є., Лавренюк С. П.**

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО $2b$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Знайдено умови існування та єдиності узагальненого розв'язку мішаної задачі для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною.

Conditions of the existence and uniqueness of the generalized solution of the mixed problem are obtained for the non-linear differential equation with the derivative of the first order on time variable.

У 1960 році С. Д. Ейдельман [1] розглянув узагальнення параболічних за Петровським систем, ввіши термін "$\vec{2b}$−параболічні системи". У цих системах диференціюванню за різними просторовими змінними приписують різну вагу по відношенню до диференціювання за змінною t. Було розроблено теорію задачі Коші для лінійних систем вказаного типу (див. праці [2 – 11]).

Мета цієї праці – дослідити мішану задачу для нелінійного диференціального рівняння з похідною першого порядку за часовою змінною, в якому за групою просторових змінних присутній диференціальний оператор четвертого порядку, і за всіма просторовими змінними – другого порядку. Зокрема, одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку у випадку обмеженої області за просторовими змінними і встановлено поведінку розв'язку при $t \to +\infty$.

Нехай Ω_x – обмежена область в $\mathbb{R}^k$ з регулярною межею $\partial\Omega_x$ [12, с. 45], Ω_y – обмежена область в $\mathbb{R}^m$ з регулярною межею $\partial\Omega_y$, $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$; $Q = \Omega \times (0, \infty)$; $S = \partial\Omega \times (0, \infty)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $T > 0$; $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$, $z = (x, y)$, $k + m = n$,

$$D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k,$$

$$D_z^\beta = \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial z_1^{\beta_1} \dots \partial z_n^{\beta_m}},\ |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m,$$

$D_x^j u$ – вектор всіх похідних порядку j ($j = 1, 2$) за змінними x, $D_z u$ – вектор всіх похідних за змінними z.

В області Q розглянемо рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|=2} D_x^\alpha \left(a_\alpha(z, t, u, D_x^1 u, D_x^2 u) \right) - \\ - \sum_{|\beta|=1} D_z^\beta \left(b_\beta(z, t, u, D_z u) \right) + \\ + c(z, t, u) = f(z, t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(z, 0) = u_0(z), \qquad z \in \Omega \qquad (2)$$

і крайовими умовами

$$u|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega_x \times \Omega_y \times (0,\infty)} = 0, \qquad (3)$$

де ν – вектор зовнішньої нормалі.

Приймемо позначення

$$|D_x^j u|_p = \left(\sum_{|\alpha|=j} |D_x^\alpha u|^p \right)^{1/p}, \\ j = 1, 2, \quad p \in (1, +\infty),$$

$$|D_z u|_q = \left(\sum_{|\beta|=1} |D_z^\beta u|^q \right)^{1/q}, \\ q \in (1, +\infty).$$

Припустимо, що виконуються такі умови:

(A) : функції $a_\alpha(\cdot, \cdot, \xi, \eta, \zeta)$ вимірні в Q для всіх $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{1+k+N(k)}$, де $N(k)$ – довжина вектора ζ_α при $|\alpha| = 2$; функції

$a_\alpha(z,t,\cdot,\cdot,\cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ майже для всіх $(z,t)\in Q$, $|\alpha|=2$; майже для всіх $(z,t)\in Q$ і для всіх $(\xi,\eta,\zeta)\in\mathbb{R}^{1+k+N(k)}$ правильні нерівності

$$\sum_{|\alpha|=2}(a_\alpha(z,t,\xi,\eta,\zeta)-a_\alpha(z,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta},\widetilde{\zeta}))(\zeta_\alpha-\widetilde{\zeta}_\alpha)\geqslant$$

$$\geqslant A_0\sum_{|\alpha|=2}|\zeta_\alpha-\widetilde{\zeta}_\alpha|^p,$$

стала $A_0>0$ при $p\in[2,+\infty)$ і $A_0=0$ при $p\in(1,2)$,

$$\sum_{|\alpha|=2}a_\alpha(z,t,\xi,\eta,\zeta)\zeta_\alpha\geqslant\widehat{A}_0\sum_{|\alpha|=2}|\zeta_\alpha|^p$$

при $p\in(1,2)$, стала $\widehat{A}_0>0$,

$$|a_\alpha(z,t,\xi,\eta,\zeta)|\leqslant A_1\sum_{|\sigma|=2}|\zeta_\sigma|^{p-1},\quad |\alpha|=2,$$

де стала $A_1>0$.

(B) : функції $b_\beta(\cdot,\cdot,\xi,\eta)$ вимірні в Q для всіх $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{1+m}$, функції $b_\beta(z,t,\cdot,\cdot)$ неперервні в $\mathbb{R}^{1+m}$ майже для всіх $(z,t)\in Q$, $|\beta|=1$; майже для всіх $(z,t)\in Q$ і для всіх $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{1+m}$ правильні нерівності

$$\sum_{|\beta|=1}(b_\beta(z,t,\xi,\eta)-b_\beta(z,t,\widetilde{\xi},\widetilde{\eta}))(\eta_\beta-\widetilde{\eta}_\beta)\geqslant$$

$$\geqslant B_0\sum_{|\beta|=1}|\eta_\beta-\widetilde{\eta}_\beta|^q,$$

стала $B_0>0$ при $q\in[2,+\infty)$ і $B_0=0$ при $q\in(1,2)$,

$$\sum_{|\beta|=1}b_\beta(z,t,\xi,\eta)\eta_\beta\geqslant\widehat{B}_0\sum_{|\beta|=1}|\zeta_\beta|^q$$

при $q\in(1,2)$, стала $\widehat{B}_0>0$,

$$|b_\beta(z,t,\xi,\eta)|\leqslant B_1\sum_{|\sigma|=2}|\zeta_\sigma|^{q-1},\quad |\beta|=1,$$

де стала $B_1>0$.

(C) : функція $c(\cdot,\cdot,\xi)$ вимірна в Q для всіх $\xi\in\mathbb{R}$, функція $c(z,t,\cdot)$ неперервна в $\mathbb{R}$ майже для всіх $(z,t)\in Q$; майже для всіх $(z,t)\in Q$ і для всіх $\xi\in\mathbb{R}$ правильні нерівності

$$(c(z,t,\xi)-c(z,t,\widetilde{\xi}))(\xi-\widetilde{\xi})\geqslant c_0|\xi-\widetilde{\xi}|^r,$$

де стала $c_0>0$ при $r\in[2,+\infty)$ і $c_0=0$ при $r\in(1,2)$,

$$|c(z,t,\xi)|\leqslant c_1|\xi|^{r-1},\ \text{де } c_1>0.$$

(F) : $f(x,t)=\sum\limits_{|\alpha|=2}D_x^\alpha f_\alpha(z,t)+\sum\limits_{|\beta|\leqslant1}(-1)^{|\beta|}D_z^\beta g_\beta(z,t)$, де $f_\alpha\in L^{p'}(Q_T)$, $|\alpha|=2$, $g_\beta\in L^{q'}(Q_T)$, $|\beta|=1$, $g_0\in L^{r_0'}(Q_T)$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$, $\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{r_0'}=1$, $r_0=\min\{2,r\}$.

(U) : $u_0\in L^2(\Omega)$.

Введемо простори

$$V_0^1(\Omega)=W_0^{1,q}(\Omega)\cap L^2(\Omega),$$

$$V_0^2(\Omega)=L^p(\Omega_y;L^p(W_0^{2,p}(\Omega_x)))\cap L^2(\Omega).$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (A), (B), (C), (F), (U). Тоді існує єдиний розв'язок u задачі (1) – (3) у сенсі розподілів такий, що $u\in L^\infty((0,T);L^2(\Omega))$, $u\in L^p((0,T);V_0^2(\Omega))\cap L^q((0,T);V_0^1(\Omega))\cap L^{r_0}(Q_T)$ для довільного $T>0$.*

Крім того, якщо $p\geqslant2$ і $q\geqslant\frac{2n}{n+2}$, то $u\in C([0,T];L^2(\Omega))$.

Доведення. Нехай маємо довільне $T>0$. Розглянемо оператори

$$A_0(u)=c(\cdot,\cdot,u),$$

$$A_1(u)=-\sum_{|\beta|=1}D_z^\beta(b_\beta(\cdot,\cdot,u,D_zu)),$$

$$A_2(u)=\sum_{|\alpha|=2}D_x^\alpha(a_\alpha(\cdot,\cdot,u,D_x^1u,D_x^2u)).$$

На підставі умов (A), (B), (C) очевидно, що

$$A_0:\ L^{r_0}(Q_T)\to\ L^{r_0'}(Q_T),$$

$$A_1:\ V_0^1(\Omega)\to(V_0^1(\Omega))^*,$$

$$A_2:\ V_0^2(\Omega)\to(V_0^2(\Omega))^*$$

для майже всіх $t \in (0,T)$, де $*$ позначено спряжений простір. Зазначимо, що простір $V(\Omega) = V_0^2(\Omega) \cap V_0^1(\Omega) \cap L^{r_0}(\Omega)$ сепарабельний і щільно вкладений в $L^2(\Omega)$. Тому

$$V(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset V^*(\Omega)$$

і, крім того,

$$V_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (V_0^2(\Omega))^*,$$
$$V_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (V_0^1(\Omega))^*,$$
$$L^{r_0}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^{r_0'}(\Omega).$$

Згідно з умовами (A), (B) , (C) оператори A_i $(i = 0,1,2)$ монотонні (рівномірно за змінною t). Отже, поняття демінеперервності [12, с. 20] і семінеперервності [13, с. 166] збігаються [12, с. 85]. Оскільки $a_\alpha(|\alpha| = 2)$, $b_\beta(|\beta| = 1)$ і задовольняють умови леми 2.2 [12, с. 57], то оператори $A_i (i = 0,1,2)$ демінеперервні (рівномірно за t.) Крім того, на підставі умов (A), (B), (C) правильні оцінки

$$\|A_0(u)\|_{L^{r_0'}(\Omega)} \leqslant \mu_0 \|u\|^{r_0-1}_{L^{r_0}(\Omega)^*},$$

$$\|A_1(u)\|_{(V_0^1(\Omega))^*} \leqslant \mu_0 \|u\|^{q-1}_{V_0^1(\Omega)},$$

$$\|A_2(u)\|_{(V_0^2(\Omega))^*} \leqslant \mu_0 \|u\|^{p-1}_{V_0^2(\Omega)}$$

для довільних $u \in V(\Omega)$ рівномірно за t.

Введемо півнорму $[\cdot]_q$ на просторі $V_0^1(\Omega)$ за формулою

$$[u]_q = \left(\int\limits_\Omega |D_z u|_q^q \, dz \right)^{1/q}.$$

(У випадку $q \geqslant \dfrac{2n}{n+2}$ згідно з нерівністю Фрідріхса [12, с. 50] і теоремою вкладення Соболєва [12, с. 47] ця формула визначає норму на $V_0^1(\Omega)$), півнорму $[\cdot]_p$ на просторі $V_0^2(\Omega)$ за формулою

$$[u]_p = \left(\int\limits_\Omega |D_x^2 u|_p^p \, dt \right)^{1/p}.$$

(У випадку $p \geqslant 2$ згідно з нерівністю Фрідріхса і теоремою Фубіні ця формула визначає норму на $V_0^2(\Omega)$).

Очевидно, що $[u]_q + \|u\|_{L^2(\Omega)}$ визначає норму в $V_0^1(\Omega)$, а $[u]_p + \|u\|_{L^2(\Omega)}$ – норму в $V_0^2(\Omega)$. Крім того, на підставі умов (A) і (B)

$$\langle A_1(u), u \rangle_1 \geqslant b_1 [u]_q^q,$$
$$\langle A_2(u), u \rangle_2 \geqslant a_1 [u]_p^p$$

рівномірно за t, де через $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ позначено скалярний добуток між просторами $(V_0^i(\Omega))^*$ і $V_0^i(\Omega)$ $(i = 1,2)$ відповідно, а $b_1 = B_0$ при $q \geqslant 2$, $b_1 = \widehat{B}_0$ при $q \in (1,2)$, $a_1 = A_0$ при $p \geqslant 2$ і $a_1 = \widehat{A}_0$ при $p \in (1,2)$.

Крім того, на підставі умови (C)

$$\langle A_0(u), u \rangle \geqslant c_0 \|u\|_r^r$$

рівномірно за t при $r \geqslant 2$.

Отже, виконуються всі умови Зауваження 1.13 [13, с. 180], згідно з яким існує єдиний розв'язок u в сенсі розподілів задачі (1)–(3) такий, що $u \in L^\infty((0,T); L^2(\Omega))$, $u \in L^p((0,T); V_0^2(\Omega)) \cap L^q((0,T); V_0^1(\Omega)) \cap L^{r_0}(Q_T)$. Тоді

$$u_t = -A_2(u) - A_1(u) - A_0(u) + f \in$$
$$\in L^{p'}((0,T); (V_0^2(\Omega))^*) + L^{q'}((0,T); (V_0^1(\Omega))^*) +$$
$$+ L^{r_0'}(Q_T).$$

Звідси зокрема випливає, що

$$u_t \in L^{p_0}((0,T); (V(\Omega))^*),$$

де $p_0 = \min\{p', q', r_0'\}$. Отже, на підставі леми 1.2 [13, с. 20] $u \in C([0,T]; (V(\Omega))^*)$. Крім того, якщо $p \geqslant 2$, $q \geqslant \dfrac{2n}{n+2}$, то на підставі теореми 1.17 [12, с. 177] $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$, оскільки у цьому випадку

$$V(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset V^*(\Omega)$$

щільно і неперервно. Теорему доведено.

Зауваження 1. У випадку $p \geqslant 2$, $q \geqslant \dfrac{2n}{n+2}$, як випливає з теореми 1.17 [12, с. 177] для розв'язку u задачі (1)–(3) правильна формула інтегрування частинами

$$2 \int\limits_{t_1}^{t_2} \langle u_t, u \rangle \, dt = \int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2 \, dz - \int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2 \, dz,$$

де $\Omega_\tau = Q \cap \{t=\tau\}$, $t_1, t_2 \in [0,\infty)$.

Позначимо

$$w(t) = \int\limits_{\Omega_t} |u|^2\,dz,$$

де u – розв'язок в сенсі розподілів задачі (1)–(3). Користуючись ідеями праці [14], доведемо деякі властивості розв'язків задачі (1)–(3).

Теорема 2. *Нехай* $p \geqslant 2,\ q>2,\ f(z,t)\equiv 0$. *Тоді*

$$w(t) \leqslant \left([w(0)]^{-\frac{q-2}{2}} + \mu_1 R^{-\theta_0} t\right)^{-\frac{2}{q-2}} \leqslant \leqslant \mu_2 \left(\frac{R^\theta}{t}\right)^{\frac{2}{q-2}}, \qquad (4)$$

де стала μ_1 *залежать від* $q,\ n,\ B_0,\ R$ *– радіус найменшої кулі, яка містить область* Ω, $\theta_0 = \dfrac{qn+2(q-n)}{2}$.

Доведення. Згідно із зауваженням 1

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_2}} |u|^2\,dz - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_{t_1}} |u|^2\,dz + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x^1u,D_x^2u)D_x^\alpha u + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_zu)D_z^\beta u + c(z,t,u)u\Big]\,dz\,dt = = 0,\ \forall t_1,\ t_2,\ t_1<t_2. \qquad (5)$$

Отже,

$$w'(t) = -\int\limits_{\Omega_t}\Big[\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(z,t,u,D_x^1u,D_x^2u)D_x^\alpha u + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t,u,D_zu)D_z^\beta u + c(z,t,u)u\Big]\,dz \equiv g(t),$$

майже для всіх $t\in(0,\infty)$. Оскільки на підставі умов (A), (B), (C)

$$g(t) \geqslant B_0 \int\limits_{\Omega_t} |D_zu|_q^q\,dz,$$

то з (4) випливає нерівність

$$w'(t) + 2B_0 \int\limits_{\Omega_t} |D_zu|_q^q\,dz \leqslant 0 \qquad (6)$$

майже для всіх $t\in(0,\infty)$. Згідно з нерівністю Гальярдо-Ніренберга [15, т. 7.1]

$$\|D_z^2 u\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} \geqslant \beta_0 R^{\frac{(\theta-1)q}{2\theta}} \|u\|^q_{L^2(\Omega)}$$

для майже всіх $t\in(0,\infty)$, де $\theta = \dfrac{qn}{2(qn-n+q)}$, а стала β_0 залежить тільки від $n,\ q$. Отже, з (6) одержуємо

$$w'(t) + 2B_0\beta_0 R^{\frac{(\theta-1)q}{2\theta}} [w(t)]^{\frac{q}{2}} \leqslant 0. \qquad (7)$$

Розв'язавши нерівність (6), матимемо оцінку (4). Теорему доведено.

Теорема 3. *Нехай* $p\geqslant 2$, $\dfrac{2n}{n+2} \leqslant q < 2$. *Тоді* $u(z,t)=0$ *майже для всіх* $(z,t)\in Q\setminus Q_{t_0}$, *де* $t_0 = \mu_3 [w(0)]^{\frac{2-q}{2}}$, *а стала* μ_3 *залежить від* $B_0,\ n,\ q,\ \Omega$.

Доведення. Використавши теорему вкладення Соболєва [12, с. 47], одержимо оцінку

$$\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \geqslant \mu_4 \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

для майже всіх $t\in(0,\infty)$, де стала μ_4 залежить від $n,\ q,\ \Omega$. Отже, з (6) випливає нерівність

$$w'(t) + B_0\mu_4 [w(t)]^{\frac{q}{2}} \leqslant 0.$$

Звідси,

$$[w(t)]^{\frac{2-q}{2}} \leqslant -\frac{B_0\mu_4(2-q)}{2} t + [w(0)]^{\frac{2-q}{2}}.$$

Оскільки $w(t)\geqslant 0$ майже для всіх $t\in(0,\infty)$, то з останньої нерівності одержуємо, що $w(t)=0$ для всіх $t\geqslant t_0$, $\mu_3 = \dfrac{2}{B_0\mu_4(2-q)}$. Теорему доведено.

Зауваження 2. Аналогічно до теореми 1 можна довести існування розв'язку u в сенсі розподілів задачі (2), (3) для рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|=|\beta|=2} D_x^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(z,t) D_x^\beta u \right) + \\ + \sum_{|\alpha|\leqslant 2} a_\alpha(z,t) D_x^\alpha u - \\ - \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} D_y^\alpha \left(b_{\alpha\beta}(z,t) D_y^\beta u \right) + \\ + \sum_{|\beta|=1} b_\beta(z,t) D_y^\beta u + c(z,t,u) = f(z,t),$$

якщо виконуються умови (C), (F) при $p = 2$, $q = 2$ і, крім того, $a_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $a_\alpha(|\alpha| \leqslant 2)$, $b_{\alpha\beta}(|\alpha| = |\beta| = 1)$, $b_\beta(|\beta| = 1) \in L^\infty(Q)$ для майже всіх $(z,t) \in Q$,

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2} a_{\alpha\beta}(z,t)\zeta_\alpha\zeta_\beta \geqslant A_0 \sum_{|\alpha|=2} |\zeta_\alpha|^2, \\ A_0 > 0, \ \forall \zeta_\alpha \in \mathbb{R}^{N(k)},$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} b_{\alpha\beta}(z,t)\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant B_0 \sum_{|\beta|=1} |\eta_\beta|^2, \\ B_0 > 0 \quad \forall \eta_\beta \in \mathbb{R}^m.$$

Зокрема, тоді

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap \\ \cap L^2((0,T); L^2(\Omega_y; H_0^2(\Omega_x))) \cap \\ \cap L^2((0,T); L^2(\Omega_x \times H_0^1(\Omega_y))) \cap L^{r_0}(Q_T)$$

для довільного $T > 0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем// Доклады АН СССР. – 1960. – Т. 133. – N 1. – С. 40-43.

2. *Матійчук М. І.* Фундаментальні матриці розв'язків загальних $\vec{2b}$-параболічних і $\vec{2b}$-еліптичних систем, коефіцієнти яких задовольняють інтегральну умову Гельдера// Доповіді НА УРСР. – 1964. – N 8. – С. 1010-1013.

3. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М., Наука, 1964. – 443 с.

4. *Матийчук М. И., Эйдельман С. Д.* О фундаментальных решениях и задаче Коши для параболических систем, коэффициенты которых удовлетворяют условию Дини// Труды семинара по функциональному анализу. – Воронеж, 1967. – Вып. 9. – С. 54-83.

5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\vec{2b}$-параболические системы// Труды семинара по функциональному анализу. – Киев. Ин-т математики АН УССР. – 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.

6. *Мартыненко М. Д., Бойко Д. Ф.* $\vec{2b}$-параболические граничные задачи// Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14. – N 12. – С. 2212-2222.

7. *Ивасишен С. Д.* Интегральное представление и начальные значения решений $\vec{2b}$-параболических систем// Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42. – N 4. – С. 500-506.

8. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1998. – N 12. – С. 7-12.

9. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Про сильно вироджені на початковій гіперплощині $\vec{2b}$-параболічні системи// Вісник держ. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. – 1998. – N 337. – С. 73-76.

10. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ, Ін-тут математики НАН України, 1999. – 176 с.

11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\vec{2b}$-параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині// Доп. НАН України. – 1999. – N 6. – С. 18-22.

12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М., Мир, 1978, 336 с.

13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М., Мир, 1972, 588 с.

14. *Bernis F.* Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations// Huston J. Mathem. – 1988. – Vol. 14. – N 3. – P. 319-352.

15. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М., Наука, 1973, 408 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.2006