УДК 515.12

©2006р. Р.В. Кожан

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

ПРО НЕПРЕРЕРВНІСТЬ ВІДПОВІДНОСТЕЙ ЙМОВІРНІСНИХ МІР В КАТЕГОРІЇ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНИХ ПРОСТОРІВ

У цій статті розглядається багатозначне відображення, яке кожному набору ймовірнісних радонівських мір на цілком регулярних координатних просторах ставить у відповідність множину мір на добутку з заданими маргінальними розподілами. Доведено, що ця відповідність є неперервною.

In this note we consider a multivalued map which sends a collection of probability Radon measures on completely regular coordinate spaces, to a set of measures with given marginale distributions. It is proved that this correspondence is continuous.

1. Вступ. В даній статті досліджується співвідношення між сукупними розподілами на добутку топологічних просторів та їх маргінальними розподілами. Ця тематика в контексті топологічних просторів розглядалася в [5], [7], [9]. Зокрема, доосліджується багатозначне відображення, яке кожному набору ймовірнісних мір на координатних просторах ставить у відповідність множину мір на добутку з заданими маргінальними розподілами. У статтях, так само як і в даній роботі, ставиться питання про неперервність цієї відповідності. Цей тип задач є актуальним в теорії ігор та математичній економіці. Зокрема, в теорії ігор ймовірнісна міра розглядається як змішана стратегія кожного з гравців, а неперервність вище описаної відповідності є достатньою умовою існування рівноваги Неша статичних ігор зі змішаними стратегіями.

Дж. Бергін [5] розглядає проблему неперервності відповідності для метризовних координатних просторів, а М. Зарічний [9] поширив її на загальний випадок випадок компактих гаусдорфових просторів. В цій статті задача неперервності відповідності поширюється на випадок цілком регулярних просторів. Існує кілька продовжень функтора ймовірнісних мір P на категорію Tych, які були запропоновані А. Чигогідзе [4] та В. Федорчуком [3]. В даній роботі ми розглядаємо багатозначні відповідності на просторах радонівських мір та на просторі мір з компактними носіями P_β.

В розділі 2 дано необхідні для подальшого аналізу означення та результати. Неперервність відповідностей встановлена в розділі 3.

2. Поняття та означення. Для цілком регулярного простору X розглянемо простір мір

$$P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) \colon \mathrm{supp}(\mu) \subset X \subset \beta X\},$$

де βX є Стоун-Чехівською компактифікацією простору X та через $\mathrm{supp}(\mu)$ ми позначаємо носій міри μ. Ця конструкція продовжує функтор ймовірнісних мір $P\colon \mathrm{Comp} \to \mathrm{Comp}$ до функтора $P_\beta\colon \mathrm{Tych} \to \mathrm{Tych}$ і була запропонована в [4] (див. також [8]).

Множина всіх борелівських мір на цілком регулярному просторі X позначається через $M(X)$. Слабка* топологія на $M(X)$ породжується базою, яка складається з множин вигляду

$$O(\mu, V_1, ..., V_k, \varepsilon) = \{\nu \in \hat{P}(X) \colon \nu(V_i) > \\ > \mu(V_i) - \varepsilon, i = 1, ..., k\},$$

де $V_i \subset X$ є відкритими множинами та $\varepsilon > 0$.

Борелівська міра $\mu \in M(X)$ зветься *радонівською мірою*, якщо

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \colon A \supset K - \text{ компактна підмножина в } X\}$$

для кожної борелевої підмножини $A \subset X$.

Борелівська міра $\mu \in M(X)$ зветься *τ-гладкою*, якщо для кожної спадної послідовності $\{Z_\alpha\}$ замкнених підмножин в X, таких, що $\bigcap\limits_\alpha Z_\alpha = \varnothing$, послідовність $\{\mu(Z_\alpha)\}$ прямує до нуля.

Підпростір в $M(X)$, який складається з усіх радонівських мір, позначається через $\hat{M}(X)$. Через $M_\tau(X)$ ми позначаємо підпростір всіх τ-гладких борелівських мір. Позначимо через $\hat{P}(X)$ та $P_\tau(X)$ підпростори радонівських та τ-гладких ймовірнісних мір на X відповідно. Топологічні властивості просторів $\hat{P}(X)$ та $P_\tau(X)$ читач може знайти в [1].

Нехай X та Y – деякі цілком регулярні простори.

За теоремою Ріса про зображення існує однозначна відповідність між борелівськими мірами на топологічному просторі X та лінійними функціоналами на просторі всіх обмежених неперервних функцій $C_b(X)$, наділеному нормою рівномірної збіжності. В. Варадараян [2] дає означення τ-гладких та щільних функціоналів, які репрезентують радонівські та τ-гладкі міри.

Обмежений лінійний функціонал Λ зветься *τ-гладким*, якщо з $f_\alpha \downarrow 0$ слідує, що $\Lambda(f_\alpha) \to 0$ для кожної напрямленості $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$.

Обмежений лінійний функціонал Λ зветься *щільним*, якщо $\Lambda(f_\alpha) \to 0$ для кожної напрямленості $\{f_\alpha\} \subset C_b(X)$ такої, що $\|f_\alpha\| \leq 1$ для всіх α і $f_\alpha \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах в X.

В. Варадараян [2] довів, що міра μ є радонівською (τ-гладкою), тоді і лише тоді, коли існує щільний (τ-гладкий) обмежений лінійний функціонал Λ такий, що для кожної $f \in C_b(X)$ виконується $\Lambda(f) = \int\limits_X f d\mu$ та $\|\Lambda\| = \|\mu\|$.

Позначимо через $u_X : C(\beta X) \to C(P(\beta X))$ відображення, означене за формулою $u_X(\varphi)(\mu) = \mu(\varphi)$. Дане відображення є лінійним оператором з нормою $\|u_X\| = 1$.

Для кожної функції $\varphi \in C_b(X)$ ми можемо розглядати звуження функції $u_X(\varphi)$ на простір $\hat{P}(X)$.

Означимо відображення $\psi_X \colon P^2(\beta X) \to P(\beta X)$ за формулою $\psi_X(M)(\varphi) = M(u_X(\varphi))$.

Лема 2.1. $\psi_X(\hat{P}^2(X)) \subseteq \hat{P}(X)$.

Доведення. Розглянемо послідовність функцій $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ таких, що $\|\varphi_\alpha\| \leq 1$ для кожного $\alpha \in \Gamma$ і $\varphi_\alpha \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах в X. Легко показати, що $\|u_X(\varphi_\alpha)\| \leq 1$ для всіх $\alpha \in \Gamma$ та $u_X(\varphi_\alpha) \to 0$ рівномірно на компактних підмножинах в $\hat{P}(X)$. Це випливає з нерівності $\|u_X(\varphi_\alpha)\| \leq \|u_X\| \cdot \|\varphi_\alpha\| = \|\varphi_\alpha\|$. Тоді для кожної радонівської міри $M \in \hat{P}^2(X)$ виконується

$$\psi_X(M)(\varphi_\alpha) = M(u_X(\varphi_\alpha)) \to 0,$$

і з цього випливає, що $\psi_X(M) \in \hat{P}(X)$.

Лема 2.2. *i) Для кожної пари радонівських мір $\mu \in \hat{M}(X)$ та $\nu \in \hat{M}(Y)$ таких, що $\|\mu\| = \|\nu\|$, існує міра $\lambda \in \hat{M}(X \times Y)$, для якої виконуються співвідношення $\hat{M}\mathrm{pr}_1(\lambda) = \mu$ та $\hat{M}\mathrm{pr}_2(\lambda) = \nu$.*

ii) Твердження i) залишиться справедливим, якщо замінити $\hat{M}$ на M_β.

Доведення. i). Припустимо спочатку, що $\mu \in \hat{P}(X)$ та $\nu \in \hat{P}(Y)$. Позначимо через $i_x \colon Y \to X \times Y$ відображення вкладення, означене для кожної точки $x \in X$ за формулою $i_x(y) = (x, y)$. Розглянемо функцію $f_\nu \colon X \to \hat{P}(X \times Y)$, яка діє наступним чином: $f_\nu(x) = \hat{P}i_x(\nu)$ для кожної точки $x \in X$. Перевіримо, що міра $\lambda = \psi_{X\times Y}(\hat{P}f_\nu(\mu)) \in \hat{P}(X \times Y)$ задовольняє умови леми. Для довільної неперервної функції $f \in C_b(X)$ справджується

$$\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda)(f) = \psi_{X\times Y}(\hat{P}f_\nu(\mu))(f \circ \mathrm{pr}_1) =$$

$$\hat{P}f_\nu(\mu)(u_{x\times Y}(f \circ \mathrm{pr}_1)) = \mu(u_{X\times Y}(f \circ \mathrm{pr}_1) \circ f_\nu).$$

Оскільки є справедливим співвідношення

$$(u_{X\times Y}(f \circ \mathrm{pr}_1) \circ f_\nu)(x) = u_{X\times Y}(f \circ \mathrm{pr}_1)(f_\nu) =$$

$$= u_{X\times Y}(f \circ \mathrm{pr}_1)(\hat{P}i_x(\nu)) = \hat{P}i_x(\nu)(f \circ \mathrm{pr}_1) =$$

$$= \nu(f \circ \mathrm{pr}_1 \circ i_x) = \nu(f(x)) = f(x),$$

то ми можемо зробити висновок, що $u_{X\times Y}(f\circ \mathrm{pr}_1)\circ f_\nu \equiv f$ та $\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda)=\mu$.

Аналогічно, для кожної функції $g\in C_b(Y)$ має місце рівність

$$\hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda)(g)=\psi_{X\times Y}(\hat{P}f_\nu(\mu))(f\circ \mathrm{pr}_1)=$$

$$=\mu(u_{X\times Y}(g\circ \mathrm{pr}_2)\circ f_\nu).$$

Оскільки

$$(u_{X\times Y}(g\circ \mathrm{pr}_2)\circ f_\nu)(x)=\nu(g\circ \mathrm{pr}_2\circ i_x)=\nu(g),$$

то з цього випливає, що

$$\hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda)(g)=\mu(\nu(g))=\nu(g).$$

Згідно з лемою 2.1 міра $\lambda\in\hat{P}(X\times Y)$. Позначимо цю міру як $\lambda=\mu\otimes\nu$ та будемо називати її тензорним добутком мір μ та ν. Детальніше про конструкцію тензорного добутку можна дізнатися у монографії [8].

Далі, якщо $c=\|\mu\|=\|\nu\|\neq 1$, то легко перевірити, що міра $c(\frac{\mu}{c}\otimes\frac{\nu}{c})$ задовольняє умови леми.

ii). Позначимо через $K_\mu=\mathrm{supp}(\mu)$ та $K_\nu=\mathrm{supp}(\nu)$ носії мір. За означенням функтора P_β множини K_μ та K_ν є компактами. Звідси випливає, що міри $\frac{\mu}{c}$ та $\frac{\nu}{c}$ належать відповідно до $P(K_\mu)$ та $P(K_\nu)$. Твердження ii) леми випливає з бікомутативності функтора P.

Лема 2.3. *Нехай $\lambda\in\hat{P}(X\times Y)$. Тоді для кожної відкритої підмножини $V\subset X\times Y$ та $\varepsilon>0$ знайдуться такі елементи бази топології добутку $\tilde{V}_1,...,\tilde{V}_k$, що $\tilde{V}_i\subset V$ для всіх $i=1,...,k$ та є справедливим співвідношення*

$$\lambda(V)-\lambda(\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{V}_i)<\varepsilon.$$

Доведення. Те, що множини $\tilde{V}_1,...,\tilde{V}_k$ є елементами бази топології добутку, означає, що існують відкриті множини $\tilde{V}_i'\subset X$ та $\tilde{V}_i''\subset Y$ такі, що $\tilde{V}_i=\tilde{V}_i'\times\tilde{V}_i''$ для кожного $i=1,...,k$. Оскільки λ є радонівською мірою, то існує компакт $K\subset V$, який справджує умову $\lambda(V\setminus K)<\varepsilon$. Розглянемо покриття елементами бази $\{\tilde{V}_i\}_{i\in\Gamma}$ компакта K, які містяться в множині V. Можна знайти скінченне підпокриття $\tilde{V}_1,...,\tilde{V}_k$ компакта K таке, що $K\subset\bigcup_{i=1}^{k}\tilde{V}_i\subset V$. Легко бачити, що твердження леми випливає з останньої нерівності.

Лема 2.4. *Нехай $\lambda\in\hat{P}(X\times Y)$, $\mu=\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda)$, $\nu=\hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda)$ та $\varepsilon>0$. Тоді для відкритих підмножин $V,V'\subset X$, для яких виконується умова $\mu(V\setminus V')<\varepsilon$, є справедливим співвідношення*

$$\lambda((V\setminus V')\times W)<\varepsilon$$

для кожної відкритої підмножини $W\subset Y$.

Аналогічно, для відкритих підмножин $W,W'\subset Y$ таких, що $\nu(W\setminus W')<\varepsilon$, справедливою є нерівність

$$\lambda(V\times(W\setminus W'))<\varepsilon$$

для кожної відкритої підмножини $V\subset Y$.

Доведення. Оскільки виконується умова $\mu=\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda)$, то бачимо, що

$$\mu(V)=\lambda(\mathrm{pr}_1^{-1}(V))=\lambda(V\times Y).$$

Для кожної відкритої підмножини $W\subset Y$ отримуємо співвідношення

$$\lambda((V\setminus V')\times W)<\lambda((V\setminus V')\times Y)=\mu(V\setminus V')<\varepsilon.$$

Друге твердження леми доводиться аналогічно.

Лема 2.5. *Нехай $\lambda\in\hat{P}(X\times Y)$, $\mu=\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda)$, $\nu=\hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda)$, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$. Для відкритих підмножин $V,V'\subset X$ таких, що $\mu(V\setminus V')<\varepsilon_1$ та відкритих підмножин $W,W'\subset Y$, для яких є справедливою нерівність $\nu(W\setminus W')<\varepsilon_2$, виконується*

$$\lambda((V\times W)\setminus(V'\times W'))<\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

Доведення. Легко перевірити, що

$$\lambda((V\times W)\setminus(V'\times W'))<\lambda(((V\setminus V')\times W)\cup$$

$$\cup(V\times(W\setminus W')))\leq\lambda((V\setminus V')\times W)+$$

$$+\lambda(V\times(W\setminus W'))<\varepsilon_1+\varepsilon_2.\quad\square$$

Лема 2.6. *Розглянемо деяку радонівську міру $\lambda\in\hat{P}(X\times Y)$, відкриті в добутку тихоновських просторів $X\times Y$ підмножини*

$V_1, ..., V_n$ *та* $\varepsilon_0 > 0$. *Існують попарно неперетинні елементи бази топології на добутку просторів* $W_1, ..., W_m \subset X \times Y$ *та число* $\delta > 0$, *для яких справджуються наступні умови:*
(i) $\lambda(V_i) - \sum\limits_{\{j\colon W_j \subset V_i\}} \lambda(W_j) < \varepsilon$ *для всіх* $i = 1, ..., n$,
(ii) $O(\lambda, W_1, ..., W_m, \delta) \subset O(\lambda, V_1, ..., V_n, \varepsilon_0)$,
(iii) $(\mathrm{pr}_l(W_{j'}) \cap \mathrm{pr}_l(W_{j''}) = \varnothing) \vee (\mathrm{pr}_l(W_{j'}) = \mathrm{pr}_l(W_{j''}))$ *для* $l = 1, 2$ *та* $j', j'' = 1, ..., m$.

Доведення. Згідно з лемою 2.2 з праці В. Богачова та А. Колесникова [6] можемо вважати, що множини $V_1, ..., V_n$ є попарно неперетинні. За лемою 2.2 існують елементи бази топології добутку $\tilde{V}_{ij} \subset V_i$, $j = 1, ..., k_i$ такі, що

$$\lambda(V_i) - \lambda(\bigcup_{j=1}^{k_i} \tilde{V}_{ij}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оскільки кожна множина $\tilde{V}_{ij}$ є елементом бази, то вона може бути зображена як добуток $\tilde{V}_{ij} = \tilde{V}'_{ij} \times \tilde{V}''_{ij}$ деяких відкритих множин $\tilde{V}'_{ij} \subset X$ та $\tilde{V}''_{ij} \subset Y$. За лемою 2.2 В. Богачова та А. Колесникова [6], існують попарно неперетинні відкриті множини $W'_1, ..., W'_{m'} \subset X$ та $W''_1, ..., W''_{m''} \subset Y$ для яких є справедливими нерівності

$$\mu(\tilde{V}'_{ij}) - \sum_{\{s\colon W'_s \subset \tilde{V}'_{ij}\}} \mu(W'_s) < \frac{\varepsilon}{4k}$$

та

$$\nu(\tilde{V}''_{ij}) - \sum_{\{t\colon W''_t \subset \tilde{V}''_{ij}\}} \nu(W''_t) < \frac{\varepsilon}{4k}$$

для всіх $i = 1, ..., n$, де $k = \max\{k_1, ..., k_n\}$. Розглянемо всі попарно неперетинні добутки множин вигляду $W'_q \times W''_s$ для $q = 1, ..., m'$, $s = 1, ..., m''$, яка міститься в принаймні одній з множин $\tilde{V}_{ij}$ при $j = 1, ..., k_i$ та $i = 1, ..., n$. Позначимо ці добутки через $W_1, ..., W_m$. Зрозуміло, що вони попарно не перетинаються і множина $I_j = \{i\colon W_j \subset V_i\}$ складається з однієї точки. На додаток, з леми 2.5 випливає, що для всіх $j = 1, ..., k_i$ справджується співвідношення

$$\lambda(\tilde{V}_{ij}) - \sum_{\{t\colon W_t \subset \tilde{V}_{ij}\}} \lambda(W_t) = \lambda(\tilde{V}'_{ij} \times \tilde{V}''_{ij} \setminus$$

$$\setminus((\bigcup_{\{q\colon W'_q \subset \tilde{V}'_{ij}\}} W'_q) \times (\bigcup_{\{s\colon W''_s \subset \tilde{V}''_{ij}\}} W''_s))) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4k} + \frac{\varepsilon}{4k} < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Покажемо, що для всіх $i = 1, ..., n$ виконується нерівність

$$\lambda(\bigcup_{j=1}^{k_i} \tilde{V}_{ij}) - \sum_{q=1}^{m} \lambda(W_q) < \varepsilon.$$

Для кожного $j = 1, ..., k_i$ справджується умова

$$\lambda(\tilde{V}_{ij} \setminus (\bigcup_{q=1}^{m} W_q)) \leq \lambda(\tilde{V}_{ij} \setminus (\bigcup_{\{q\colon W_q \subset \tilde{V}_{ij}\}} W_q)) < \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Використовуючи цей факт бачимо, що для міри λ є справдливим твердження, що

$$\lambda((\bigcup_{j=1}^{k_i} \tilde{V}_{ij}) \setminus (\bigcup_{q=1}^{m} W_q)) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \lambda(\tilde{V}_{ij} \setminus (\bigcup_{q=1}^{m} W_q)) <$$

$$< k_i \frac{\varepsilon}{2k} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Умова (i) легко впливає з останнього співвідношення.

Справді, для кожного $i = 1, ..., n$ маємо

$$\lambda(V_i) - \sum_{q=1}^{m} \lambda(W_q) = \lambda(V_i) - \lambda(\bigcup_{j=1}^{k_i} \tilde{V}_{ij}) +$$

$$+ \lambda(\bigcup_{j=1}^{k_i} \tilde{V}_{ij}) - \sum_{q=1}^{m} \lambda(W_q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Для того, щоб довести твердження (ii) даної леми, необхідно знайти таке $\delta > 0$, що для всіх $i = 1, ..., n$

$$\lambda'(V_i) - \lambda(V_i) > -\varepsilon_0$$

для кожної міри $\lambda' \in O(\lambda, W_1, ..., W_m, \delta)$. З умови (i) випливає, що для $\delta < \frac{\varepsilon_0}{2m}$ та $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2}$ виконується

$$\lambda'(V_i) - \lambda(V_i) > \sum_{\{q\colon W_q \in V_i\}} \lambda'(W_q) -$$

$$- \sum_{\{q\colon W_q \in V_i\}} \lambda(W_q) - \varepsilon > \sum_{\{q\colon W_q \in V_i\}} (\lambda'(W_q) - \lambda(W_q)) -$$

$$-\varepsilon > -m\delta - \varepsilon > -\varepsilon_0.$$

Оскільки твердження (iii) є очевидним за алгоритмом побудови, то лему доведено.

В подальшому нам буде потрібним поняття звуження міри на борелівську множину. Введемо на множині

$$\{\psi \in C_b(X,[0,1]), \psi|_A \equiv 1\}$$

обернене поточкове відношення порядку. Для кожної міри $\mu \in M(X)$ та борелівської підмножини $A \subset X$ означимо міру $\mu|_A(\varphi) = \lim\{\mu(\varphi\cdot\psi\colon \psi \in C_b(X,[0,1])), \psi|_A \equiv 1\}$ для кожної функції $\varphi \in C_b(X)$ (див. [8]). Легко показати, що для кожної борелівської множини $B \subset X$ справджується рівність $\mu|_A(B) = \mu(A \cap B)$.

Означимо відображення $\hat{\chi}\colon \hat{P}(X \times Y) \to \hat{P}(X) \times \hat{P}(Y)$ За формулою

$$\hat{\chi}(\lambda) = (\hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda), \hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda))$$

для кожної міри $\lambda \in \hat{P}(X \times Y)$.

3.Основний результат. Наступна теорема є основним результатом даного розділу.

Теорема 3.1. *Відображення $\hat{\chi}$ є відкритим.*

Доведення. Нехай $\lambda^0 \in \hat{P}(X \times Y)$ – деяка радонівська міра та $O(\lambda^0, V_1, ..., V_n, \varepsilon)$ є її околом в слабкій* топології, де множини $V_i \subset X \times Y$ є відкритими, та $\varepsilon > 0$. Згідно з лемою 2.6, ми можемо вважати без обмеження загальності, що множини V_i є попарно неперетинні та існують відкриті множини $W_i' \subset X$ та $W_i'' \subset Y$ такі, що $V_i = W_i' \times W_i''$ і для яких виконуються умови $(W_{i_1}' \cap W_{i_2}' = \varnothing) \vee (W_{i_1}' = W_{i_2}')$ і $(W_{i_1}'' \cap W_{i_2}'' = \varnothing) \vee (W_{i_1}'' = W_{i_2}'')$ для $i, i_1, i_2 = 1, ..., n$. Розглянемо маргінальні для λ міри $\mu^0 = \hat{P}\mathrm{pr}_1(\lambda^0)$ та $\nu^0 = \hat{P}\mathrm{pr}_2(\lambda^0)$. Позначимо через $m' = \mathrm{Card}\{W_i', i = 1, ..., n\}$ та $m'' = \mathrm{Card}\{W_i'', i = 1, ..., n\}$ і покладемо $\delta < \varepsilon$. Введемо наступні позначення: $W_{qs} = W_q' \times W_s''$ для всіх $q \in \{1, ..., m'\}$ і $s \in \{1, ..., m''\}$.

Для того, щоб довести теорему, достатньо показати, що кожна пара мір

$$(\mu, \nu) \in O(\mu^0, W_1', ..., W_{m'}', \delta) \times$$

$$\times O(\nu^0, W_1'', ..., W_{m''}'', \delta)$$

має прообраз в околі $O(\lambda^0, V_1, ..., V_n, \varepsilon)$.

Для всіх $(q, s) \in \{1, ..., m'\} \times \{1, ..., m''\}$ ми позначимо числа

$$\alpha_{qs}' = \frac{\lambda^0(W_{qs})\mu(W_q')}{\mu^0(W_q')}$$

та, аналогічно,

$$\alpha_{qs}'' = \frac{\lambda^0(W_{qs})\nu(W_s'')}{\nu^0(W_s'')}.$$

На додаток до цього, покладемо

$$\alpha_{qs} = \min(\alpha_{qs}', \alpha_{qs}''), \beta_{qs}' = \alpha_{qs}' - \alpha_{qs}$$

$$\text{та } \beta_{qs}'' = \alpha_{qs}'' - \alpha_{qs}.$$

Нехай $\mu_q = \mu|_{W_q'}$ та $\nu_s = \nu|_{W_s''}$ є звуженнями мір μ та ν на множини W_q' та W_s'' відповідно для всіх $q \in \{1, ..., m'\}$ та $s \in \{1, ..., m''\}$. Позначимо через

$$\lambda_{qs} = \alpha_{qs}\left(\frac{\mu_q}{\mu(W_q')} \otimes \frac{\nu_s}{\mu(W_s'')}\right),$$

якщо $\lambda^0(W_q' \times W_s'') \neq 0$ і $\lambda_{qs} = 0$ в іншому випадку. Зрозуміло, що

$$\lambda_{qs}(X \times Y) = \lambda_{qs}(W_q' \times W_s'') = \alpha_{qs}.$$

Далі, ми означимо міри

$$\tilde{\lambda} = \sum_{q=1}^{m'}\sum_{s=1}^{m''}\lambda_{qs} \in \hat{M}(X \times Y),$$

$$\tilde{\mu} = \mu - \hat{M}\mathrm{pr}_1(\tilde{\lambda}) \in \hat{M}(X)$$

та

$$\tilde{\nu} = \nu - \hat{M}\mathrm{pr}_2(\tilde{\lambda}) \in \hat{M}(Y).$$

Оскільки для кожного $q \in \{1, ..., m'\}$ справджується співвідношення

$$\tilde{\mu}(W_q') = \mu(W_q') - \sum_{s=1}^{m''}\alpha_{qs} \geq \mu(W_q') - \sum_{s=1}^{m''}\alpha_{qs}' =$$

$$= \frac{\mu(W_q')\lambda^0(W_q' \times (Y \setminus (\bigcup_{s=1}^{m''} W_s'')))}{\mu^0(W_q')} \geq 0,$$

то міри $\tilde{\mu}$ та $\tilde{\nu}$ є невід'ємними. Більше того, очевидно, що $\|\tilde{\mu}\| = \|\tilde{\nu}\| \geq 0$. Таким чином, за лемою 2.2 існує невід'ємна радонівська міра $\tilde{\tilde{\lambda}}$, для якої справджуються рівності $\hat{M}\mathrm{pr}_1(\tilde{\tilde{\lambda}}) = \tilde{\mu}$ та $\hat{M}\mathrm{pr}_2(\tilde{\tilde{\lambda}}) = \tilde{\nu}$. Покладемо $\lambda = \tilde{\lambda} + \tilde{\tilde{\lambda}}$. Очевидно, що $\lambda \in \hat{P}(X \times Y)$. Крім того, для кожного $q \in \{1, ..., m'\}$ та $s \in \{1, ..., m''\}$ виконується

$$\lambda(W_{qs}) - \lambda^0(W_{qs}) = \tilde{\lambda}(W_{qs}) + \tilde{\tilde{\lambda}}(W_{qs}) -$$

$$-\lambda^0(W_{qs}) \geq \tilde{\lambda}(W_{qs}) - \lambda^0(W_{qs}) = \alpha_{qs} - \lambda^0(W_{qs}) =$$

$$= \lambda^0(W_{qs}) \left(\min\left\{ \frac{\mu(W'_q)}{\mu^0(W'_q)}, \frac{\nu(W''_s)}{\nu^0(W''_s)} \right\} - 1 \right).$$

З умови $(\mu, \nu) \in O(\mu^0, W'_1, ..., W'_{m'}, \delta) \times O(\nu^0, W''_1, ...W''_{m''}, \delta)$ слідує, що

$$\min\left\{ \frac{\mu(W'_q)}{\mu^0(W'_q)}, \frac{\nu(W''_s)}{\nu^0(W''_s)} \alpha''_{qs} \right\} - 1 >$$

$$> -\frac{\delta}{\min\{\mu^0(W'_q), \nu^0(W''_s)\}},$$

а отже,

$$\lambda(W_{qs}) - \lambda^0(W_{qs}) > -\frac{\delta\lambda^0(W_{qs})}{\min\{\mu^0(W'_q), \nu^0(W''_s)\}} >$$

$$-\delta > -\varepsilon.$$

Таким чином, $\lambda \in O(\lambda^0, W_{11}, ..., W_{m', m''}, \varepsilon) \subset O(\lambda^0, V_1, ..., V_n, \varepsilon)$. Теорему доведено.

Аналогічно, означимо відображення

$$\chi_\beta = \hat{\chi}|_{P_\beta(X \times Y)}.$$

Має місце наступний наслідок попередньої теореми.

Наслідок. *Відображення χ_β є відкритим.*

Доведення цього наслідку напряму випливає з теореми 3.1 та леми 2.2 ii).

Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівникові Зарічному Михайлу Михайловичу за корисні поради та ідеї.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Банах Т.О.* Топология пространств вероятностных мер I: функторы $\hat{P}$ и P_τ // Математичні Студії — 1995. — 5 — С.65—87.

2. *Варадараян В.* Меры на топологических пространствах // Математический сборник. — 1961. — 55:1. — С.35—100.

3. *Федорчук В. В.* Вероятностные меры в топологии // Успехи мат. наук. — 1991. — **46**,№1. — С.41—80.

4. *Чигогидзе А.* О продолжении нормальных функторов // Вестник Моск. Унив., серия мат.-мех. — 1984. — №6 — С.23—26.

5. *Bergin J.* On the continuity of correspondences on sets of measures with restricted marginals // Economic Theory — 1999. — №13. — P.471—481.

6. *Bogachev V.I., Kolesnikov, A.V.* Open Mappings of Probability Measures and the Skorohod Retation Theorem // Theory Probab. and Appl. — 2001. — **46**, №1. — P.20—38.

7. *Eifler L.* Some open mapping theorems for marginals // Transactions of American Mathematical Society. — 1975. — 211. — P.311-319.

8. *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical Topology of Compact Hausdorff Spaces // Math. Studies Monograph Series. — 1995. — Volume 5.

9. *Zarichnyi M.M.* Correspondences of Probability Measures With Restricted Marginals Revisited, (2003), preprint.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.2006