УДК 517.956

©2006 р. В.В. Ковдриш

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ШИРИНА ЧЛЕНІВ НИЖНЬОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДУ ГРУПИ ВЕРХНІХ УНІТРИКУТНИХ МАТРИЦЬ НАД КОМУТАТИВНИМ КІЛЬЦЕМ З ОДИНИЦЕЮ

Досліджується вербальна ширина підгруп групи унітрикутних матриць над комутативним кільцем з одиницею.

The verbal width of subgroups of group of unitriangle matrixes under commutative ring with unity is investigated

1. Нехай G — довільна група, wG — її вербальна підгрупа, породжена деяким груповим словом w. Шириною вербальної підгрупи wG називається таке найменше число k, що будь-який елемент із wG можна подати у вигляді добутку не більше ніж k значень слів w і w^{-1} в групі G. Якщо такого k не існує, то вважають, що wG має нескінченну ширину. Поняття ширини вербальної підгрупи wG ввів Ф.Холл, а термін "ширина" було введено Ю.І.Мерзляковим [1] (див. також [2, §12]). Використовуються також терміни "еліптична ширина" для вербальних підгруп скінченної ширини і "параболічна ширина" для вербальних підгруп нескінченної ширини.

Серед відомих результатів про ширину вербальних підгруп зазначимо такі.

1.*Ширина довільної вербальної підгрупи wG алгебраїчної групи матриць G скінченна* [1, 2].

2.*Ширина комутанта вільної метабелевої групи скінченного рангу n скінченна, а нескінченного рангу нескінченна.*

Перше твердження фактично доведено А.І.Мальцевим в [3], друге випливає з результатів статей [4 – 6]. Робіт, в яких ширина вербальної підгрупи даної групи точно обчислюється не так вже й багато. Серед них виділимо дослідження Н.Одрібець (див. [7] і список літератури до неї), в яких знайдено ширину різних вербальних підгруп групи автоморфізмів 2-адичного дерева.

2. Нехай, $\mathbf{K}$ — довільне комутативне кільце з одиницею, n — фіксоване натуральне число, $n \geq 2$, $UT_n(\mathbf{K})$ — група верхніх унітрикутних матриць порядку n над кільцем $\mathbf{K}$, $UT_n^m(\mathbf{K})$ — підгрупа матриць з $UT_n(\mathbf{K})$ в яких над головною діагоналлю знаходиться m нульових діагоналей, $1 \leq m \leq n-1$, $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — комутатор довільних двох матриць. Символом e_{ij} $(i,j = 1,2,...,n)$ далі позначатимемо матричну одиницю порядку n, тобто $n \times n$-матрицю у якої на перетині i-го рядка та j-го стовпця знаходиться одиниця, а решта елементі є нулями, а символом e — одиничну матрицю, порядку n.

Нехай

$$a = e + \sum_{j-i=m+1} e_{ij} \tag{1}$$

Зрозуміло, що матриця a міститься в підгрупі $UT_n^m(\mathbf{K})$. Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Для довільної матриці $b \in UT_n^{m+1}(\boldsymbol{K})$ рівняння*

$$[a,x] = b \tag{2}$$

має принаймні один розв'язок в групі $UT_n(\boldsymbol{K})$

Доведення. Нехай

$$b = e + \sum_{j-i>m+2} \beta_{ij} e_{ij}$$

— деяка матриця з $UT_n^{m+1}(\mathbf{K})$,

$$x = e + \sum_{i<j} x_{ij} e_{ij}$$

— унітрикутна матриця з невідомими елементами. Покладемо

$$ax = e + \sum_{i<j} \gamma_{ij} e_{ij},$$

$$xa = e + \sum_{i<j} \gamma'_{ij} e_{ij},$$

$$xab = e + \sum_{i<j} \varepsilon_{ij} e_{ij},$$

де

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} x_{ij} + x_{i+m+1,j} & , \text{ якщо } j-i \geq m, \\ x_{ij} & , \text{ якщо } j-i < m; \end{cases}$$

і

$$\gamma'_{ij} = \begin{cases} x_{i,j-m-1} + x_{i,j} & , \text{ якщо } j-i \geq m, \\ x_{ij} & , \text{ якщо } j-i < m. \end{cases}$$

Оскільки рівняння $[a,x] = b$ можна записати у вигляді $ax = xab$, то остання рівність буде справедливою тоді і тільки тоді, коли $\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}$, тобто тоді, коли виконується рівність: $\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = 0$.
Тоді

$$\gamma_{ij} - \varepsilon_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{k=i}^{j} \gamma'_{ik}\beta_{kj} =$$

$$= x_{ij} + x_{i+m+1,j} - \sum_{k=i}^{j}(x_{i,k-m-1} + x_{i,k})\beta_{kj} =$$

$$= x_{ij} + x_{i+m+1,j} - \sum_{k=i}^{j-1}(x_{i,k-m-1} + x_{i,k})\beta_{kj} -$$

$$- x_{i,j-m-1} - x_{ij} =$$

$$= x_{i+m+1,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1}(x_{i,k-m-1} + x_{i,k})\beta_{kj} -$$

$$- x_{i,j-m-1} - \beta_{ij} =$$

$$= x_{i+m+1,j} - \sum_{k=i+1}^{i+m} x_{ik}\beta_{kj} -$$

$$- \sum_{k=i+m+1}^{j-1}(x_{i,k-m-1} + x_{ik})\beta_{kj} - x_{i,j-m-1} - \beta_{ij} = 0,$$

$$i, j = 1, 2, ..., n$$

Звідси для довільних i та j дістаємо рівності

$$x_{i+m+1,j} = x_{i,j-m-1} + \sum_{k=i+1}^{i+m} x_{ik}\beta_{kj} +$$

$$+ \sum_{k=i+m+1}^{j-1}(x_{i,k-m-1} + x_{ik})\beta_{kj} + \beta_{ij}$$

або

$$x_{i,j} = x_{i-m-1,j-m-1} + \sum_{k=i-m}^{i-1} x_{i-m-1,k}\beta_{kj} +$$

$$+ \sum_{k=i}^{j-1}(x_{i-m-1,k-m-1} + x_{i-m-1,k})\beta_{kj} + \tag{3}$$

$$+ \beta_{i-m-1,j}$$

З останніх рівностей видно, що довільний елемент $x_{i,j}$ матриці x лінійно виражається через елементи цієї ж матриці, які знаходяться лівіше і вище від нього. Іншими словами, рівності (3) є рекурентними співвідношеннями для обчислення елементів матриці x. При цьому перші $m+1$ рядки матриці x можна визначити довільним чином, що дає можливість застосувати співвідношення (3) для обчислення всіх елементів матриці x. Теорему доведено.

Таким чином, розв'язком рівняння (2) буде матриця x з групи $UT_n(\mathbf{K})$, яка визначається умовами

1) при $i = 1, 2, ..., m+1$, $j = i+1, ..., n$ елемент $x_{i,j}$ вибирається довільно,

2) при $i = m+2, ..., n-1$ та $j = i+1, ..., n$ елементи $x_{i,j}$ обчислюються згідно формул (3).

Наслідок 1. *Якщо матрицю x будувати так, щоб її перші m рядків були одиничними векторами, то вона матиме такий ви-*

гляд

$$x = \begin{pmatrix} 1\dots0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots\ddots\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0\cdots1 & \beta_{1,m+3} & \beta_{1,m+4} & \cdots & \beta_{1,n} \\ 0\cdots0 & 1 & \lambda_{m+3,m+4} & \cdots & \lambda_{m+3,n} \\ 0\cdots0 & 0 & 1 & \cdots & \lambda_{m+4,n} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\cdots0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

де $\lambda_{i,j}$ $(i = m+2, ..., n-1,\ j = i+1, ..., n)$ є лінійними комбінаціями елементів матриці b.

Зауваження 1. *Аналогічне твердження можна довести для матриці a більш загального вигляду,*

$$a = \begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ \dots\ 1 & \alpha_{1,m+3} & \alpha_{1,m+4} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0\ 1\ 0\ \dots\ 0 & 1 & \alpha_{2,m+4} & \dots & \alpha_{2n} \\ 0\ 0\ 1\ \dots\ 0 & 0 & 1 & \dots & \alpha_{3n} \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 1 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{m+2,n} \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots\ \vdots\ \vdots\ \dots\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

де α_{ij} — довільні елементи кільця $\mathbf{K}$.

Нагадаємо, що ряд спадних підгруп

$$\Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq \dots$$

групи G визначених умовами $\Gamma_1(G) = G$ і $\Gamma_{n+1}(G) = [\Gamma_n(G), G]$, де $[A, B]$ — взаємний комутант підгруп A та B, називається *нижнім центральним рядом* цієї групи.

Слова

$$\Gamma_1 = x_1, \Gamma_2 = [x_1, x_2], ...,$$

$$\Gamma_n = [x_1, x_2, ..., x_n] = [[x_1, x_2, ..., x_{n-1}], x_n]$$

$$n = 1, 2, ...$$

називаються простими комутаторами, а число n називають довжиною комутатора Γ_n.

Нижній центральний ряд групи $UT_n(\mathbf{K})$ має вигляд

$$UT_n(\mathbf{K}) \geq UT_n^1(\mathbf{K}) \geq ... \geq$$

$$\geq UT_n^{n-2}(\mathbf{K}) \geq UT_n^{n-1}(\mathbf{K}) = \{e\}.$$

Теорема 2. *Довільний член нижнього центрального ряду групи $UT_n(\boldsymbol{K})$ має ширину 1.*

Доведення. Індукція за числом k. База індукції — випадок $k = 1$

Довільну матрицю b з групи $UT_n^1(\mathbf{K})$, згідно з теоремою 1, можна подати у вигляді комутатора двох матриць з групи $UT_n(\mathbf{K})$, а це означає, що ширина групи $UT_n^1(\mathbf{K})$ відносно слова Γ_2 дорівнює одиниці.

Припустимо, що група $UT_n^k(\mathbf{K})$ відносно слова Γ_{k+1} має ширину один, тобто для довільної матриці b з $UT_n^k(\mathbf{K})$ існують матриці $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ такі, що $b = [x_1, x_2, ..., x_{k+1}]$, де x_i – матриці з групи $UT_n(\mathbf{K})$.

Нехай, b — деяка матриця із $UT_n^{k+1}(\mathbf{K})$ відносно слова w_{k+2} має ширину один. Згідно з теоремою 1 матрицю b з групи $UT_n^{k+1}(\mathbf{K})$ можна подати у вигляді $b = [a, x]$, де $x \in UT_n(\mathbf{K})$. Оскільки $a \in UT_n^k(\mathbf{K})$, то за припущенням індукції існують матриці $x_1, x_2, ..., x_{k+1}$ такі, що $a = [x_1, x_2, ..., x_{k+1}]$. Тоді $b = [[x_1, x_2, ..., x_{k+1}], x] = [x_1, x_2, ..., x_{k+1}, x]$, де $x_i, x \in UT_n(\mathbf{K})$. Це й означає, згідно з означенням, що ширина групи $UT_n^{k+1}(\mathbf{K})$ відносно слова Γ_{k+2} дорівнює одиниці. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мерзляков Ю.И.* Алгебраические линейные группы как полные группы автоморфизмов и замкнутость их вербальных подгрупп // Алгебра и логика. 1967. Т.6, №1. С. 83-94. 2. *Мерзляков Ю.И.* Рациональные группы.М.: Наука, 1987.

3. *Мальцев А.И.* О свободных разрешимых группах // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, №3. С. 495-498.

4. *Алламбергенов Х.С., Романьков В.А.* О произвидениях комутаторов в группах. М., 1985. 19 с. Деп.в ВИНИТИ, №4566-85.

5. *Алламбергенов Х.С., Романьков В.А.* О произвидениях комутаторов в группах // Докл. АН УзССР. 1981. Т.4. С. 14-15.

6. *Bavard C., Meighiez G.* Commutateurs dans les groupes metabeliens // Indag. Math. 1992. V.3, N 2. P. 129-135.

7. *Одрібець Н.В.* Дисертація кандидата фізико-математичних наук., Київський університет, 2000, 124 с.