УДК 517.929

©2006 р. І.І.Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА СТІЙКОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Розглядається періодична система диференціальних рівнянь. Метод усереднення застосовується до вивчення періодичних розв'язків збуреної гамільтонової системи, консервативної системи з малим запізненням та сингулярно збуреної системи. Одержано зліченну послідовність періодичних розв'язків для деякого рівняння другого порядку. Досліджено стійкість лінійної системи.

The periodic system of differential equations is considered. The averaging method is applied for studying of periodic solutions for perturbed hamiltonian system, conservative system with small delay and singularly perturbed system. The countable sequence of periodic solutions for some equation of second order is obtained. The stability of linear system has been investigated.

1. Розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \varepsilon F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right), \qquad (1)$$

де $F(t+T, x, y) = F(t, x, y)$, функції f та F тричі неперервно диференційовні за всіма аргументами.

Нехай рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = 0 \qquad (2)$$

має періодичний розв'язок

$$x = z(\psi, a), \quad z(\psi + 2\pi, a) = z(\psi, a),$$
$$\psi = w(a)t + \varphi. \qquad (3)$$

Дослідженню рівняння (1) присвячено праці М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського [1], І.Г.Малкіна [2], А.М.Самойленка [9] та ін. До таких рівнянь можна застосувати критерій Мельникова, який встановлює умови існування гомоклінічних точок та розщеплення сепаратрис [3]. У цій статті за допомогою методу усереднення [1] встановлено існування періодичних розв'язків рівняння (1). Ці результати застосовано до рівнянь із запізненням. Розглянуто приклад, в якому спостерігається зліченна послідовність біфуркацій періодичних розв'язків. Метод усереднення застосовано також до дослідження стійкості систем із запізненням.

Зробимо в рівнянні (1) заміну

$$x = z(\psi, a), \quad \frac{dx}{dt} = w(a) z'_\psi(\psi, a). \qquad (4)$$

Врахувавши співвідношення $w^2(a) z''_{\psi^2} + f(z) = 0$, рівняння (1) зведемо до стандартної форми

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{D(a)} F(t, z, w z'_\psi) z'_\psi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = w(a) - \frac{\varepsilon}{D(a)} F(t, z, w z'_\psi) z'_a, \qquad (5)$$

де $D(a) = -w z'_a z''_{\psi^2} + z'_\psi (w z'_\psi)'_a$.

Розглянемо резонансний випадок. Нехай $\dfrac{2\pi}{w(\overline{a})} = mT$, де m – натуральне число, $D(\overline{a}) \neq 0$, $w(\overline{a}) \neq 0$. Із другого рівняння системи (5) знайдемо $\psi = w(a)t + \varphi + O(\varepsilon)$, підставимо в перше рівняння і усереднимо його за часом t. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\varepsilon}{D(a_1)} \Phi(a_1), \qquad (6)$$

де $\Phi(a) = \dfrac{1}{mT} \displaystyle\int_0^{mT} F(t, z, w z'_\psi) z'_\psi dt.$

Нехай $\Phi(\overline{a})=0$, $\Phi'(\overline{a})D(\overline{a})-D'(\overline{a})\Phi(\overline{a})\neq 0$. Тоді згідно з другою теоремою Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі існує періодичний розв'язок рівняння (1).

2. Як приклад розглянемо рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x^3-x+\varepsilon\delta\frac{dx}{dt}+\varepsilon\beta x^2\frac{dx}{dt}-$$
$$-\varepsilon\gamma x\cos(\Omega(t+t_0))=0. \tag{7}$$

Розв'язок рівняння (7) при $\varepsilon=0$ можна одержати із розкладу еліптичної функції в ряд Фур'є [4, с. 47] або зведенням рівняння (7) до нормальної форми

$$x=z(\psi,q)=\sqrt{\frac{2}{2-k^2}}\mathrm{dn}\,t_1=\frac{2\pi}{K}\sqrt{\frac{2}{2-k^2}}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1+q^{2n}}\cos n\psi\right],$$

де $\psi=\dfrac{\pi t_1}{K}$, $t_1=\dfrac{t}{\sqrt{2-k^2}}$, $q=\exp\left(-\frac{\pi K'}{K}\right)$, k – модуль еліптичної функції, K - повний еліптичний інтеграл. Умова резонансу набуде вигляду $2K\sqrt{2-k^2}=\dfrac{2m\pi}{\Omega}$.

Звівши рівняння (7) до стандартної форми і усереднюючи, одержимо рівняння вигляду (6), де

$$2\pi\Phi(q)=-\delta F_1(q)-\beta F_2(q)+\gamma F_3(q),$$

$$F_1(q)=\int\limits_0^{2K\sqrt{2-k^2}}(x'(t))^2dt,$$

$$F_2(q)=\int\limits_0^{2K\sqrt{2-k^2}}x^2(t)(x'(t))^2dt,$$

$$F_3(q)=\int\limits_0^{2K\sqrt{2-k^2}}x(\tau)x'(\tau)\cos(\Omega\tau+\Omega t_0)d\tau.$$

Для обчислення $F_1(q)$ розглянемо неповний еліптичний інтеграл другого роду $E(t)=\int\limits_0^t\mathrm{dn}^2xdx$. Тоді $E(t+2K)=E(t)+2E$, де E – повний еліптичний інтеграл другого роду. Звідси випливає, що

$$2E=\int\limits_0^{2K}\mathrm{dn}^2xdx.$$

Позначимо $\mathrm{dn}\,t=d$ і використаємо формули для похідних функції $\mathrm{dn}\,t$. Тоді одержимо

$$\frac{dE(t)}{dt}=d^2,\quad \frac{d^2E(t)}{dt^2}=2dd',$$

$$\frac{d^3E(t)}{dt^3}=2(d')^2+2dd''=2(1-d^2)(d^2-k'^2)+$$
$$+2d^2(1-2d^2+k'^2),$$

$$\int\limits_0^{2K}\frac{d^3E(t)}{dt^3}dt=\left.\frac{d^2E(t)}{dt^2}\right|_0^{2K}=0,$$

де k' – доповнювальний модуль. З останніх рівностей випливає, що

$$\int\limits_0^{2K}d^4dt=\int\limits_0^{2K}\left[\frac{2}{3}d^2+\frac{2}{3}d^2k'^2-\frac{1}{3}k'^2\right]dt=$$
$$=\frac{4}{3}E(1+k'^2)-\frac{2}{3}Kk'^2.$$

Отже, $F_1(q)=2(2-k^2)^{-3/2}\int\limits_0^{2K}(d^2-d^4-k'^2+d^2k'^2)dt=\dfrac{4}{3}[(2-k^2)E-2k'^2K](2-k^2)^{-3/2}$.

Для обчислення $F_2(q)$ спочатку двічі продиференціюємо функцію $d^4=\mathrm{dn}^4t$:

$$(d^4)'=4d^3d',\quad (d^4)''=12d^2d'^2+4d^3d''=$$
$$=16(2-k^2)d^4-12k'^2d^2-20d^6.$$

Використовуючи рівність $\int\limits_0^{2K}(d^4)''dt=0$, одержимо

$$\int\limits_0^{2K}d^6dt=\int\limits_0^{2K}\left[\frac{4}{5}(2-k^2)d^4-\frac{3}{5}k'^2d^2\right]dt=$$
$$=\frac{1}{15}[E(16k^4+46k'^2)+8Kk'^2(k^2-2)].$$

Звідси знаходимо

$$F_2(q) = 4(2-k^2)^{-\frac{5}{2}} \int_0^{2K} (d^4 - d^6 + d^4 k'^2 - d^2 k'^2) dt =$$

$$= \frac{8}{15}[2(k'^2 + k^4)E + (k^2-2)k'^2 K](2-k^2)^{-5/2}.$$

Для обчислення $F_3(q)$ використаємо формули

$$\cos\left(\frac{m\pi}{K}x + \Omega t_0\right) = \cos\left(\frac{m\pi x}{K}\right)\cos(\Omega t_0) -$$

$$-\sin\left(\frac{m\pi x}{K}\right)\sin(\Omega t_0),$$

$$\operatorname{dn} x(\operatorname{dn} x)' = -\frac{\pi^3}{K^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2 q^m}{1-q^{2m}}\sin\left(\frac{m\pi x}{K}\right).$$

Тоді

$$F_3(q) = \frac{2}{2-k^2}\int_0^{2K} \operatorname{dn} x(\operatorname{dn} x)' \times$$

$$\times \cos(\Omega\sqrt{2-k^2}x + \Omega t_0)dx =$$

$$= \frac{2}{2-k^2}\int_0^{2K} \operatorname{dn} x(\operatorname{dn} x)' \cos\left(\frac{m\pi}{K}x + \Omega t_0\right)dx =$$

$$= \frac{2\pi^3 m^2 q^m \sin(\Omega t_0)}{(2-k^2)K^3(1-q^{2m})}\int_0^{2K} \sin^2\frac{m\pi x}{K}dx =$$

$$= \frac{2\pi^3 m^2 q^m \sin(\Omega t_0)}{(2-k^2)K^2(1-q^{2m})} = \frac{2\Omega^2 \pi q^m}{1-q^{2m}}\sin(\Omega t_0),$$

оскільки $\Omega^2 = \dfrac{m^2\pi^2}{K^2(2-k^2)}$.

В рівнянні (7) при зміні модуля k від 0 до 1 можна так вибрати параметри δ, β, γ, що для m, починаючи з деякого номера, буде виконуватися рівність $\Phi(q) = 0$ і існуватиме зліченна послідовність біфуркацій періодичних розв'язків [5].

3. Дослідимо періодичні коливання в рівнянні [6]

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + F(x(t), x(t-\varepsilon)) = 0, \qquad (8)$$

де ε – малий додатний параметр.

Позначимо

$$f(x) = F(x,x), \quad g(x) = \left.\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right|_{y=x}.$$

Тоді

$$F(x(t), x(t-\varepsilon)) = F(x(t), x(t) - \varepsilon\frac{dx(t)}{dt} +$$

$$+O(\varepsilon^2)) = f(x(t)) - \varepsilon g(x(t))\frac{dx(t)}{dt} + O(\varepsilon^2).$$

Підставляючи в рівняння (8), одержимо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x) = \varepsilon g(x)\frac{dx}{dt} + O(\varepsilon^2). \qquad (9)$$

Це рівняння з точністю до $O(\varepsilon^2)$ зводиться до вигляду (1). Нехай рівняння (2) має періодичний розв'язок (3). Зробивши в рівнянні (9) заміну (4), одержимо систему

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{D(a)}g(z)w(a)(z'_\psi)^2,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = w(a) - \frac{\varepsilon}{D(a)}g(z)w(a)z'_\psi z'_a.$$

Поділивши в цій системі перше рівняння на друге, одержимо

$$\frac{da}{d\psi} = \frac{\varepsilon}{D(a)}g(z)(z'_\psi)^2 + O(\varepsilon^2). \qquad (10)$$

Поставимо у відповідність рівнянню (10) усереднене рівняння

$$\frac{da_1}{dt} = \varepsilon G(a_1),$$

де

$$G(a) = \frac{\Phi(a)}{D(a)},$$

$$\Phi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(z(\psi,a))(z'_\psi(\psi,a))^2 d\psi.$$

Теорема 1. *Нехай F – тричі неперервно диференційовна функція в області $(\alpha,\beta)\times(\alpha,\beta)$, $\alpha < \beta$. Припустимо, що рівняння (2) має періодичний розв'язок (3) для a, що* *належать деякому околу значення $\overline{a}$, причому $z(w(\overline{a})t+\varphi,\overline{a})\in(\alpha,\beta)$ для довільних значень t та φ. Якщо $D(\overline{a})\neq 0$, $w(\overline{a})\neq 0$, $\Phi(\overline{a})=0$, $G'(\overline{a})\neq 0$, то рівняння (8) має цикл з періодом, близьким до $2\pi/w(\overline{a})$. Цей цикл буде стійким, якщо $G'(\overline{a})<0$ і нестійким, якщо $G'(\overline{a})>0$.*

Для доведення досить застосувати до рівняння (10) другу теорему Боголюбова про усереднення на нескінченному інтервалі [1].

4. Розглянемо сингулярно збурену систему

$$\frac{dx}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=f(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta))+$$
$$+\varepsilon h(t,x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)),$$
$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=G(x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta))+$$
$$+\varepsilon P(t,x(t),y(t),y(t-\varepsilon\Delta)), \tag{11}$$

де ε – малий додатний параметр, Δ – фіксоване додатне число, $x\in\mathbb{R}$, $z\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}^n$, функції $h(t,x,y,z)$, $P(t,x,y,z)$ мають період 2π відносно t. Нехай $f(0,0,0)=G(0,0,0)=0$; для всіх $x\in\mathbb{R}$ рівняння $G(x,y,y)=0$ має ізольований розв'язок $y=\varphi(x)$, причому $\varphi(0)=0$, а функція $\varphi(x)$ та її похідні по x до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені; функції $f(x,y,z)$, $h(t,x,y,z)$, $G(x,y,z)$, $P(t,x,y,z)$ і їх частинні похідні по t, x, y, z до третього порядку включно рівномірно неперервні і обмежені при $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $|y-\varphi(x)|\le\rho$, $|z-\varphi(x)|\le\rho$. Лінеаризуючи функцію $G(x,y,z)$ в точці $y=\varphi(x)$, $z=\varphi(x)$ відносно y, z, одержимо $G(x,y+\varphi(x),z+\varphi(x))=B_1(x)y+B_2(x)z+G_1(x,y,z)$, де $G_1(x,y,z)=O(|y|^2+|z|^2)$ при $|y|+|z|\to 0$. Нехай всі корені характеристичного рівняння $(B_1(x)+B_2(x)\exp(-\lambda\Delta)-\lambda E)=0$ лежать у півплощині $\operatorname{Re}\lambda\le -2\alpha<0$.

Аналогічно до [7, 8] інтегральний многовид системи (11) будемо шукати у вигляді $y(t)=\varphi(x(t))+\varepsilon\Psi(t,x(t),z(t))+O(\varepsilon^2)$, де $\Psi(t,x,z)$ – функція, яку ми визначимо пізніше. Тоді

$$y(t+\theta)=\varphi(x(t+\theta))+\varepsilon\Psi(t,x,z)+O(\varepsilon^2)=$$
$$=\varphi(x+\theta\frac{dx}{dt})+\varepsilon\Psi(t,x,z)+O(\varepsilon^2)=$$
$$=\varphi(x)+\theta z\frac{d\varphi(x)}{dx}+\varepsilon\Psi(t,x,z)+O(\varepsilon^2).$$

Звідси

$$y(t-\varepsilon\Delta)=\varphi(x)-\varepsilon\Delta z\frac{d\varphi}{dx}+\varepsilon\Psi(t,x,z)+O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$G(x,y(t),y(t-\varepsilon\Delta))=G(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi(t,x,z),$$
$$\varphi(x)-\varepsilon\Delta z\frac{d\varphi}{dx}+\varepsilon\Psi(t,x,z))=\varepsilon(B_1(x)+$$
$$+B_2(x))\Psi(t,x,z)-\varepsilon\Delta B_2(x)z\frac{d\varphi}{dx}+O(\varepsilon^2).$$

Крім того, $\dfrac{dy}{dt}=z\dfrac{d\varphi}{dx}+O(\varepsilon)$. Підставляючи знайдені вирази в систему (11) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержимо

$$\varepsilon z\frac{d\varphi}{dz}=\varepsilon(B_1(x)+B_2(x))\Psi(t,x,z)-$$
$$-\varepsilon\Delta B_2(x)z\frac{d\varphi}{dx}+\varepsilon P(t,x,\varphi(x),\varphi(x)),$$

звідки

$$\Psi(t,x,z)=(B_1(x)+B_2(x))^{-1}\times$$
$$\times\left[z\frac{d\varphi}{dx}(E+\Delta B_2(x))-P(t,x,\varphi(x),\varphi(x))\right].$$

Позначимо $\eta(t,x,z)=\Psi(t,x,z)-\Delta z\dfrac{d\varphi}{dx}$. Тоді рівняння на многовиді системи (11) набудуть вигляду

$$\frac{dx}{dt}=z,\quad \frac{dz}{dt}=f(x,\varphi(x)+\varepsilon\Psi(t,x,z),\varphi(x)+$$
$$+\varepsilon\eta(t,x,z))+\varepsilon h(t,x,\varphi(x),\varphi(x))+O(\varepsilon^2). \tag{12}$$

Підставляючи $z=dx/dt$ у друге рівняння системи (12), одержимо рівняння другого порядку, яке з точністю до $O(\varepsilon^2)$ зводиться до рівняння вигляду (1). Це дозволить знаходити періодичні розв'язки системи (11).

5. Розглянемо систему

$$x'=\varepsilon F(t)x(t-h+g(t)), \tag{13}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbb{R}^p$, $|g(t)| \leq h$, $F(t) = \sum_{m=1}^{n}(A_m e^{ib_m t} + \overline{A}_m e^{-ib_m t})$, $g(t) = \sum_{m=1}^{n}(\alpha_m e^{ib_m t} + \overline{\alpha}_m e^{-ib_m t})$, b_m – дійсні додатні різні числа, $\alpha_m \in \mathbb{C}$, A_m – матриці з комплексними елементами.

У системі (13) зробимо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon \tilde{F}(t)\xi(t)$, де

$$\tilde{F}(t) = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{ib_m}A_m e^{ib_m t} - \frac{1}{ib_m}\overline{A}_m e^{-ib_m t}\right).$$

Тоді $x(t-h+g(t)) = \xi + (g(t)-h)\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи цей вираз в систему (13), одержимо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' = \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon^2 F(t)\times$$
$$\times\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h+g(t))\xi + O(\varepsilon^3). \quad (14)$$

У системі (14) можна ще раз застосувати метод усереднення [9] і одержати усереднену систему $\xi' = \varepsilon^2 B\xi$, де

$$B = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\tilde{F}(t-h+g(t))dt.$$

Якщо $g(t) = 0$, то

$$F(t)\tilde{F}(t-h) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}(A_k e^{ib_k t} + \overline{A}_k e^{-ib_k t})\times$$
$$\times\left(\frac{1}{ib_m}A_m e^{ib_m(t-h)} - \frac{1}{ib_m}\overline{A}_m e^{-ib_m(t-h)}\right).$$

Тому в цьому випадку

$$B = -\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{b_m}\sin(b_m h)(A_m\overline{A}_m + \overline{A}_m A_m).$$

Теорема 2. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (13) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (13) нестійка.*

Доведення теореми випливає з теореми Хейла про усереднення [10]. Якщо існують власні значення матриці B з нульовою та додатною дійсними частинами, то треба використати схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням.

6. Розглянемо систему слабко зв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t)y(t-h+g(t)) = 0, \quad (15)$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, \ldots, y_q)^T$, $L^2 = \mathrm{diag}\{\lambda_1^2, \ldots, \lambda_q^2\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$, $k \neq s$, $h > 0$, $|g(t)| \leq h$; $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_m t} + \overline{b}_{jsm}e^{-ia_m t}),$$
$$b_{jsm} \in \mathbb{C}, a_m > 0, \quad (16)$$

а функція $g(t)$ має такий вигляд, як у системі (13).

У праці [8] досліджено стійкість системи (15), якщо $g(t) = 0$.

Систему (15) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)y_s(t-h+g(t)).$$

Позначимо $z_j = y_j'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j,$$

$$z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j}\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)y_s(t-h+g(t)).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j}\sum_{s=1}^{q}P_{js}(t)(u_s(t-h+g(t))+$$
$$+\overline{u}_s(t-h+g(t))).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j\exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t)x(t-h+g(t))+$$

$$+\varepsilon G(t)\overline{x}(t-h+g(t)), \qquad (17)$$

де $x=(x_1,\ldots,x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t)=-\frac{i}{2\lambda_j}P_{js}(t)e^{i(\lambda_j-\lambda_s)t}e^{i\lambda_s(h-g(t))},$$

$$G_{js}(t)=-\frac{i}{2\lambda_j}P_{js}(t)e^{i(\lambda_j+\lambda_s)t}e^{i\lambda_s(g(t)-h)}, \quad (18)$$

відповідно.

Підставляючи (16) у (18), одержимо

$$F_{js}(t)=-\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s(h-g(t))}\sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}\times$$

$$\times e^{i(\lambda_j-\lambda_s+a_m)t}+\overline{b}_{jsm}e^{i(\lambda_j-\lambda_s-a_m)t}),$$

$$G_{js}(t)=-\frac{i}{2\lambda_j}e^{i\lambda_s(g(t)-h)}\sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}\times$$

$$\times e^{i(\lambda_j+\lambda_s+a_m)t}+\overline{b}_{jsm}e^{i(\lambda_j+\lambda_s-a_m)t}).$$

Якщо $g(t)\neq 0$, то аналогічно дослідженню стійкості в роботі [8] можна застосувати метод усереднення, але при цьому складніше знаходяться коефіцієнти усередненої системи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – К.: Наук. думка, 1971. – 440 с.

2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: ГТТИ, 1956. – 491 с.

3. *Гельфрейх В.Г., Лазуткин В.Ф.* Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциальная малость // Успехи мат. наук. – 2001. – **56**, вып. 3. – С. 79 – 142.

4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. – М.: Наука, 1967. – 300 с.

5. *Аврамов К.В.* Седло-узловые бифуркации параметрических колебаний гибких стержней с тремя положениями статического равновесия // Доп. НАН України. – 2003. – № 4. – С. 37 – 40.

6. *Долгий Ю.Ф., Захаров А.В.* Периодические колебания в консервативных системах с малым запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 10. – С. 1299 – 1309.

7. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567.

8. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 36 – 41.

9. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

10. *Hale J.K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J.Different. Equat. – 1966. – **2**, № 1. – P. 57 – 73.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2006