УДК 517.9

©2006 р. Д.П.Керекеша

Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова, Одеса

КОНСТРУКТИВНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ОДНОГО КЛАСУ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМИ

Запропоновано конструктивний розв'язок одного класу операторних рівнянь із застосуваннями.

The constructive solution of a ceratin class of operator equations is propose.

1. Постановка проблеми та її аналіз. У 2000 році в роботі [1] був отриманий розв'язок інтегрального рівняння вигляду

$$p(x)g(x) + \int_0^x k(x-t)g(t)dt = f(x), \qquad (1)$$

де функції $p(x)$, $k(x)$, $f(x)$ – відомі. Вони характеризують ймовірнісний зміст рівняння (1), причому функція

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & p(x) \le u_0, \\ p_2, & p(x) > u_0. \end{cases}$$

В даній статті розглядається питання про вилучення класу операторних рівнянь, розв'язки яких будуються конструктивно. У якості застосування запропонованої теорії у п.4 буде досліджено більш загальне рівняння ніж рівняння (1).

2. Основна теорема про побудову розв'язку операторних рівнянь спеціальної структури. Нехай K_j: $L \to L$, $j = \overline{1,n}$ – лінійні, обмежені й оборотні оператори; L – простір локально інтегровних функцій, заданих на множині $E = (0,T), T \leqslant \infty$.

Уведемо оператор

$$K = \sum_{j=1}^{n} M\left(\chi_{E_j}\right) K_j. \qquad (1)$$

Тут оператори $M\left(\chi_{E_j}\right)$ у просторі L діють так: $M(\chi_{E_j})\varphi = \chi_{E_j}\varphi$, де χ_{E_j} характеристичні функції, які задані на вимірних за Лебегом множинах E_1, E_2, …, E_n, $E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} E_j$, $E_j \cap E_k = \emptyset$ (j $\neq k$), $mE_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Очевидно, що K – лінійний і обмежений оператор, причому він діє із простору L в простір L.

Теорема 1. *Якщо оператор K – оборотний в L, то розв'язок операторного рівняння*

$$K\varphi = \psi \qquad (2)$$

можна одержати в просторі L у такий спосіб:

$$\varphi = \varphi_n(x), \qquad (3)$$

де функція $\varphi_n(x)$ будується за наступною рекурентною формулою

$$\varphi_j(x) = K_j^{-1}\left(\chi_{\bigcup\limits_{k=j}^{n} E_k}\psi + \chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{j-1} E_k}\varphi_{j-1}\right)(x),$$
$$j = \overline{1,n}; \quad \varphi_0 \equiv 0, E_0 = \emptyset. \qquad (4)$$

Доведення. Нехай φ – розв'язок операторного рівняння (2). При цьому припущенні розглянемо ланцюжок операторних рівнянь

$$K_j\varphi = \chi_{\bigcup\limits_{k=j}^{n} E_k}\psi + \chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{j-1} E_k} K_j\varphi_{j-1}, j = \overline{1,n}. \qquad (5)$$

Оскільки оператори K_j передбачаються оберненими в L, то будуть справедливі рівності (4). Далі, з рівностей (5) убачаємо, що

$$\varphi_{j-1}(x) = \varphi_j(x), x \in \bigcup_{k=0}^{j-1} E_k, j = \overline{1,n}. \qquad (6)$$

Тепер покажемо, що $\varphi_j = \varphi$ при $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{j} E_k, j = \overline{1,n}$. Доведемо це твердження методом математичної індукції. При $j = 1$ це твердження вірне. Припустимо, що воно вірне при $j = k$:

$$\varphi_k = \varphi, \text{при} \quad x \in \bigcup_{l=1}^{k} E_l. \qquad (7)$$

Доведемо, що твердження (6) буде вірним при $j = k + 1$. Дійсно, якщо $x \in \bigcup\limits_{j=1}^{k} E_j$, то згідно з (5) і припущенню (7) $\varphi_{k+1}(x) = \varphi_k(x) = \varphi(x)$. Якщо ж $x \in E_{k+1}$, то з (5) випливає, що $K_j \equiv K$, а це означає, що $\varphi_{k+1} = K_j^{-1}\psi = K^{-1}\psi = \varphi$.

Теорема доведена.

Надалі нам знадобляться деякі поняття і допоміжні твердження.

3. Допоміжні твердження.

Означення 1. Позначимо [2] через $L_{2+}(L_{2-})$ простір функцій $f_+(f_-)$, які належать простору L_2 і мають такі властивості

$$f_+(t) = \begin{cases} f(t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases};$$

$$f_-(t) = \begin{cases} 0, & t > 0 \\ f(t), & t < 0 \end{cases}.$$

Означення 2. Позначимо через $L_2^{\pm}$ простір функцій Φ образів Фур'є простору $L_{2\pm}$.

Означення 3. Позначимо через $L_{p+}^{\nu}\{M\}$ простір функцій виду $\chi_M\varphi_+$, де M – вимірна за Лебегом множина $M \subseteq R_+$.

Означення 4. Позначимо через $L_{2,\nu}^{+}\{M\}$ простір функцій Φ образів Фур'є простору $L_{2+}^{\nu}\{M\}$.

Означення 5. Позначимо через $P_{\{M\}}^{+\beta}$, $\beta \geqslant 0$ оператор проектування у просторі $L_{2,\beta}^{+}(-\infty,\infty)$ на підпростір $L_{2,\beta}^{+}(\mathrm{M})$.

Зауваження. Простір L_2^{+} збігається із простором Харді H_2^{+} [3] у верхній півплощині.

Тепер розглянемо рівняння

$$\lambda\varphi - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\int_0^x k_j(x-t)\varphi(t)dt = f(x), x > 0, \qquad (8)$$

у якого $b_j(x)$– обмежені вимірні функції, що прямують до скінченних границь при $x \to +\infty$, $\lambda = const$; $k_j(x), j = \overline{1,n}$ відомі функції, що належать простору $L_{1+}^{\nu_j}, \nu_j \geqslant 0, j = \overline{1,n}$; $f(x)$ – відома функція, що належить простору $L_{2+}^{\nu_0}, \nu_0 \geqslant 0$. Невідома функція $\varphi(x)$ шукається у просторі L_{2+}^{ν}, $\nu \geqslant 0$.

Уведемо $\eta = \max\limits_{k=\overline{0,n}} \nu_k$ й зробимо заміну $\psi(x) = e^{-\eta x}\varphi(x)$. Тоді інтегральне рівняння (8) буде мати такий вигляд

$$\lambda\psi - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\int_0^x s_j(x-t)\psi dt = f_1(x), x > 0, \qquad (9)$$

де

$$s_j(x) = e^{-\eta x}k_j(x), j = \overline{1,n}, f_1(x) = e^{-\eta x}f(x).$$

Очевидно, що $s_j(x) \in L_{1+}^{\nu_j-\eta}$, $j = \overline{1,n}$, $f_1(x) \in L_{2+}^{\nu_0-\eta}$.

Уведемо тепер таку константу ν, що:

$$\lambda - \sum_{j=1}^{n} b_j(\infty) S_j^{+}(z) \neq 0 \text{ при } \operatorname{Im} z \geqslant \nu. \qquad (10)$$

Це завжди можна здійснити на підставі властивостей функцій $S_j^{+}(z)$. Далі знову зробимо заміну : $\omega(x) = e^{-\nu x}\psi(x)$. Тоді інтегральне рівняння буде мати такий вигляд

$$\lambda\omega - \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\int_0^x r_j(x-t)\omega dt = f_2(x), x > 0, \qquad (11)$$

де

$$r_j(x) = e^{-\nu x}s_j(x), j = \overline{1,n}, f_2(x) = e^{-\nu x}f_1(x).$$

Очевидно, що $r_j(x) \in L_{1+}^{\nu_j-\eta-\nu}$, $j = \overline{1,n}$; $f_2(x) \in L_{2+}^{\nu_0-\eta-\nu}$. При цьому індекс рівняння (11), завдяки умові (10), дорівнює нулю, а це рівносильне тому, що рівняння (11) має єдиний розв'язок у просторі L_{2+}^{ν}. З наведених міркувань випливає, що рівняння (8) має завжди єдиний розв'язок, який пов'язаний з розв'язком рівняння (11) співвідношенням $\varphi(x) = e^{(\nu+\eta)x}\omega(x)$.

4. Рівняння згортки із змінною границею інтегрування на скінченному інтервалі. Рівняння згортки із змінною границею інтегрування на скінченному інтервалі має вигляд

$$\lambda\varphi(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x k(x-t)\varphi(t)dt=g(x),$$

$$0<x<T, \tag{12}$$

де задані функції $k(x)$, $g(x)$ відповідно належать просторам L_{1+}, $L_{2+}\{(0,T)\}$, а невідома функція $\varphi(x)$ шукається у просторі $L_{2+}\{(0,T)\}$.

Увівши в розгляд простори типу $L_{2\pm}$, рівняння (12) запишемо в такому вигляді

$$\lambda\varphi_+(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_+\left(x-t\right)\varphi_+\left(t\right)dt=$$

$$=g_+\left(x\right)+e_+\left(x\right)+\varphi_-\left(x\right), x\in R, \tag{13}$$

де $e_+\left(x\right)\in L_{2+}\left\{(T,+\infty)\right\}$.

Тепер до рівняння (13) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є. У результаті одержимо таку крайову задачу

$$\Phi^+\left(x\right)\left(\lambda+K^+\left(x\right)\right)=G^+\left(x\right)+E^+\left(x\right)+$$

$$+\Phi^-\left(x\right)x\in R, \tag{14}$$

де $G^+\left(x\right)=\left(Vg_+\right)\left(x\right)$, $\mathrm{K}^+\left(x\right)=\left(Vk_+\right)\left(x\right)$, $\Phi^-\left(x\right)=\left(V\varphi_-\right)\left(x\right)$.

Завдяки властивостям функцій $\Phi^+\left(x\right)$, $K^+(x)$, $G^+\left(x\right)$ і теореми Ліувіля функція $\Phi^-\left(x\right)\equiv 0$. Тоді з рівності (14) знаходимо, що

$$\Phi^+\left(z\right)=\frac{G^+\left(z\right)}{\lambda+K^+\left(z\right)}+\frac{E^+\left(z\right)}{\lambda+K^+\left(z\right)}, \operatorname{Im}z\geqslant 0. \tag{15}$$

Тут стала ν така, що при $\operatorname{Im}z\geq\nu$ функція $\lambda+K^+(z)\neq 0$.

Тепер застосуємо властивості оператора проектування $\mathrm{P}^{\nu}_{\{(0,T)\}}$. У результаті отримаємо

$$P^{\nu}_{\{(0,T)\}}\Phi^+(z)=P^{\nu}_{\{(0,T)\}}\frac{G^+\left(z\right)}{\lambda+K^+\left(z\right)}+$$

$$P^{\nu}_{\{(0,T)\}}\frac{E^+\left(z\right)}{\lambda+K^+\left(z\right)}=P_{\{(0,T)\}}\frac{G^+\left(z\right)}{\lambda+K^+\left(z\right)}.$$

Нарешті, застосовуючи обернене перетворення Фур'є, одержимо

$$\varphi\left(x\right)=P^{\nu}_{\{(0,T)\}}\frac{G^+(z)}{\lambda+K^+\left(z\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty+i\nu}^{\infty+i\nu}\frac{G^+(z)e^{-ixz}dz}{\lambda+K^+\left(z\right)},\quad 0<x<\mathrm{T}. \tag{16}$$

Отже, справедлива

Теорема 2. *Нехай задані функції $k\left(x\right)$, $g\left(x\right)$, які відповідно належать просторам L_{1+}, L_{2+}. Тоді у просторі $L_{2+}\{(0,T)\}$ рівняння (12) має единий розв'язок $\varphi\left(x\right)$, що будується за формулою (16).*

Зауваження. Розв'язок рівняння (13) наведено у роботі [4]. У данній статті для побудови розв'язку рівняння (13) запропоновано інший підхід, який викладено у цьому пункті.

4. Інтегральне рівняння Вольтерра типу згортки на промені $(0,\infty)$ **з кусково-сталими коефіцієнтами.** Воно має такий вигляд

$$\varphi(x)+\sum_{k=j}^{n}\chi_{E_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x k\left(x-t\right)\varphi\left(t\right)dt=f(x),$$

$$x\in(0,T), T\leqslant\infty, \tag{17}$$

де $(0,T)=E=\bigcup\limits_{j=1}^{n}E_j$, $E_j\cap E_k=\emptyset$ $(j\neq k)$, E_1, E_2, $\ldots$, E_n вимірні за Лебегом множини, $mE_k\neq 0, k=\overline{1,n}$; задані функції $k_j\left(x\right)$, $j=\overline{1,n}$ належать просторам L_{1+} $f\left(x\right)$, а функція $f(x)$ належить L_{2+}. Невідома функція $\varphi\left(x\right)$ шукається у просторі $L^{\mu}_{2+}\left\{(0,T)\right\}$, $\mu\geqslant 0$.

Уведемо оператори

$$K\varphi\equiv\varphi(x)+\sum_{k=j}^{n}\chi_{E_j}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x k\left(x-t\right)\varphi\left(t\right)dt,$$

$$x\in E, \tag{18}$$

$$K_j\varphi \equiv \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x k_j(x-t)\varphi(t)\,dt,$$

$$j = \overline{1,n}, x \in E. \qquad (19)$$

Очевидно, що оператори K_j є оберненими у просторі L. Оператор K також обернений. Дійсно, оператор K можна зобразити у такому вигляді

$$K\varphi \equiv \varphi(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, x \in E, \qquad (20)$$

де

$$k(x,t) = \sum_{j=1}^n \chi_{E_j} k_j(x-t).$$

Відомо, що з таким ядром $k(x,t)$ оператор K є оберненим у просторі L [5].

Тоді згідно з теоремою 1 розв'язок рівняння (17) можна побудувати у просторі $L^{\mu}_{2+}\{(0,T)\}$ так:

$$\varphi = \varphi_n(x), \qquad (21)$$

де функція $\varphi_n(x)$ будується за наступною рекурентною формулою

$$\varphi_j(x) = K_j^{-1}\left(\chi_{\bigcup\limits_{k=j}^{n} E_k} f + \chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{j-1} E_k} \varphi_{j-1}\right)(x),$$

$$j = \overline{1,n}; \varphi_0 \equiv 0, E_0 = \emptyset. \qquad (22)$$

Тут

$$K_j^{-1} f_{j+} = \left(P^{\nu_j}_{\{(0,T)\}} \frac{F_j^+(z)}{1 + K_j^+(z)}\right)(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty+i\nu_j}^{\infty+i\nu_j} \frac{F_j^+(z)e^{-ixz}dz}{1 + K_j^+(z)},$$

$$F_j^+(x) = (Vf_{j+})(x), K_j^+(x) = (Vk_{j+})(x),$$

$$f_{j+} = \chi_{\bigcup\limits_{k=j}^{n} E_k} f + \chi_{\bigcup\limits_{k=0}^{j-1} E_k} \varphi_{j-1}, j = \overline{1,n}. \qquad (23)$$

5. Застосування результатів п.4 в узагальненій теорії ризику. Нехай u – початковий капітал страхової компанії; T_i, U_i, $i \geqslant 1$ – послідовність моментів і розмірів виплат відповідно; N_t – число страхових виплат за проміжок часу $[0,t]$. Визначимо [1] процес ризику R_t, $t \geqslant 0$ рівнянням балансу

$$R_t = u + \int\limits_0^t p(R_s)ds - \sum_{i=1}^{N_t} U_i,$$

де U_i послідовність незалежних однаково розподілених невід'ємних випадкових величин з функцією розподілу $B(t) = P(U_1 < t)$ і з скінченним математичним сподіванням $\mu = EU_1$, а функція $p(x)$ – відома. При цьому в моделі, що ми розглядаємо, передбачається, що випадкові величини $\theta_i = T_i - T_{i-1}, i \geqslant 1$ незалежні, однаково розподілені величини з функцією розподілу$K(t) = P(\theta_1 < t)$. Передбачається також, що два набори випадкових величин $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ і $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots\}$ взаємно незалежні; при цьому N_t і $\{U_1, U_2, \dots, U_n, \dots\}$ теж взаємно незалежні.

Ймовірність не банкрутства страхової компанії визначається так:

$$\varphi(u) = P\left(\inf_{t \geqslant 0} R_t > 0 \middle| R_0 = u\right).$$

Поряд з функцією $\varphi(u)$ уведемо функцію $g(x)$ за правилом

$$\varphi(u) = 1 - \int\limits_u^{\infty} g(x)dx. \qquad (24)$$

Відомо [1], що якщо розподіл $K(t)$ має щільність $\beta e^{-\beta t}$, то функція $g(x)$ задовольняє таке рівняння Вольтерра

$$\frac{p(x)}{\beta} g(x) - \int\limits_0^x \bar{B}(x-t)\, g(t)\, dt = \gamma_0 \bar{B}(x), \qquad (25)$$

де

$$\gamma_0 = \varphi(+0), \quad \bar{B}(x) = 1 - B(x). \qquad (26)$$

Припустимо також, що функція $p(x)$ задовольняє такі умови

$$1)\, p(x) \geqslant \alpha > 0; \quad 2)\, \lim_{x\to\infty} \frac{1}{p(x)} < \frac{1}{\mu}(\mu = EU_1) \qquad (27)$$

Неважко побачити, що якщо $\frac{p(x)}{\beta} = \sum_{j=1}^{n} p_j \chi_{E_j}$, то інтегральне рівняння (26) є частковим випадком рівняння (18). Цей факт обґрунтовується введенням нових функцій за наступними співвідношеннями

$$k_j(x) = -\frac{1}{p_j}\bar{B}(x), j = \overline{1,n}, f(x) = \gamma_0 \frac{\bar{B}(x)}{p(x)}.$$

Згідно з результатами робіт [1, 5] умови (27) гарантують єдиність розв'язку рівняння (25) і його обмеженість.

6. Приклад. Нехай $\bar{B}\,(x) = e^{-\mu x}$, $\frac{p\,(x)}{\beta} = \sum_{j=1}^{n} p_j \chi_{E_j}$,$E_1 = [0, x_1)$, $E_i = [x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{2, n-1}$, $E_n = [x_{n-1}, \infty)$.

У відповідності до теореми 1 розв'язок $g(x)$ відповідного рівняння (25) послідовно будується так:

$$\delta_i = \mu - \frac{1}{p_i}, i = \overline{1,n}, q_i = \exp\left(x_i\left(\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{i+1}}\right)\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \qquad (28)$$

$$g_0(x) = \frac{1}{p_i} e^{-\delta_i x} \prod_{k=1}^{i-1} q_k, x \in E_i, i = \overline{1,n}, \qquad (29)$$

$$\gamma_0 = \left(1 + \int_0^\infty g_0\,(x)\,dx\right)^{-1}, \qquad (30)$$

$$g\,(x) = \gamma_0 g_0\,(x)\,. \qquad (31)$$

І нарешті, за формулами (28), (29), (30), (31), (24) знаходимо шукану функцію $\varphi\,(u)$, яка визначає ймовірність небанкрутства страхової компанії.

Висновки. У поданій роботі, на підставі теореми 1, вказано клас операторних рівнянь, розв'язки яких будуються конструктивно. Щодо застосування запропонованої теорії, то вона продемонстровано у п. 5. Слід також сказати, що результати цього пункту суттєво узагальнюють результати Асмуссена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Asmussen S.* Ruin Probabilities, vol.2.- World scientific: Singapore, New jers, London, Hong Kong. – 2000. – 385 p.

2. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.:Наука, 1978. – 296 с.

3. *Ахиезер Н.И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – М.: Вища шк., 1984. – 120 с.

4. *Черский Ю.И.* К решению интегральных уравнений в квадратурах // Математические методы и физико-механические поля. – 1982. – **15**. – С. 3 – 5.

5. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик Л.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 448 с.

Стаття надійшла до редколегії 16.08.2006