УДК 517.51

©2006 р. Карлова О.О.

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича

НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНІ σ-ДИСКРЕТНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Доводиться, що кожне нарізно неперервне відображення, визначене на добутку метризовних просторів і діє в лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір, належить до першого класу Бера.

We prove that every separately continuous mapping which defined on a product of metrizable spaces and acts into an arcwise connected and locally arcwise connected metrizable space belongs to the first Baire class.

1. Для топологічних просторів X і Y позначимо через $H_1(X,Y)$ сукупність всіх відображень $f : X \to Y$ *першого класу Лебеґа*, тобто таких, що для довільної замкненої в Y множини F прообраз $f^{-1}(F)$ подається у вигляді перетину послідовності відкритих множин в X.

Сукупність всіх неперервних відображень $f : X \to Y$ будемо позначати символом $B_o(X,Y)$. Нехай класи $B_\xi(X,Y)$ вже визначені для всіх $\xi < \alpha$, де α – не більш ніж зліченний ординал. Ми кажемо, що відображення $f : X \to Y$ належить до *α-го класу Бера*, якщо існують така послідовність порядкових чисел $\xi_n < \alpha$ і послідовність відображень $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, яка поточково на X збігається до відображення f.

Якщо Z – ще один топологічний простір, то $CC(X\times Y,Z)$ – це сукупність всіх нарізно неперервних відображень $f : X\times Y \to Z$.

Будемо позначати через $C\overline{B}_\alpha(X\times Y,Z)$ сукупність всіх відображень $f : X\times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної і $\overline{X_{B_\alpha}(f)} = X$, де

$$X_{B_\alpha}(f) = \{x \in X : f^x \in B_\alpha(Y,Z)\}.$$

Згідно з теоремою Рудіна [1] кожне нарізно неперервне відображення $f : X\times Y \to Z$, яке визначене на добутку метризовного простору X та топологічного простору Y і діє у локально опуклий простір Z, належить до першого класу Бера.

Т. Банахом у [2] було поставлено питання: чи кожне нарізно неперервне відображення $f : X\times Y \to Z$ належить до першого класу Бера, якщо X та Y – метризовні компакти, а Z – метризовний топологічний векторний простір?

Тут ми даємо позитивну відповідь на це питання. Більше того, ми доводимо, що включення $C\overline{C}(X\times Y,Z) \subseteq B_1(X\times Y,Z)$ має місце, якщо X та Y – метризовні простори, а Z – лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір.

2. Нагадаємо, що система $\mathcal{A}$ множин в топологічному просторі X називається *дискретною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл U, який перетинається не більше ніж з однією з множин $A \in \mathcal{A}$.

Система $\mathcal{A}$ називається *σ-дискретною*, якщо її можна подати у вигляді зліченного об'єднання дискретних систем.

Система $\mathcal{B}$ підмножин топологічного простору X називається *базою для функції* $f : X \to Y$, якщо для довільної відкритої в Y множини V існує підсистема $\mathcal{B}_V \subseteq \mathcal{B}$, така, що $f^{-1}(V) = \bigcup \mathcal{B}_V$. Якщо, до того ж, система $\mathcal{B}$ є σ-дискретною, то її називають σ-дискретною базою для f, а відображення $f : X \to Y$, яке має σ-дискретну базу, – *σ-дискретним*. Сукупність усіх σ-дискретних відображень ми будемо позначати через $\Sigma(X,Y)$.

Очевидно, що довільне відображення,

яке діє в простір з другою аксіомою зліченності, є σ-дискретним. Також легко бачити, що кожне неперервне відображення з метризовною областю визначення чи простором значень є σ-дискретним, адже метризовний простір має σ-дискретну базу [3, с. 416]. Для метризовних просторів X і Y клас $\Sigma(X,Y)$ замкнений відносно взяття поточкової границі [4], тому всі відображення α-того класу Бера, $\alpha < \omega_1$, будуть σ-дискретними.

Розпочнемо з встановлення σ-дискретності відображень скінченного класу Бера зі значеннями в метризовному просторі.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, Y – метризовний простір і $f \in B_n(X,Y)$. Тоді відображення f є σ-дискретним.*

Доведення. Відображення $f : X \to Y$ належить до n-го класу Бера, тому існує сім'я неперервних відображень

$$T = (g_{k_1k_2\ldots k_n} : k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}),$$

$g_{k_1k_2\ldots k_n} : X \to Y$, така, що

$$\lim_{k_1\to\infty} \lim_{k_2\to\infty} \ldots \lim_{k_n\to\infty} g_{k_1k_2\ldots k_n}(x) = f(x)$$

для кожного $x \in X$.

Розглянемо відображення $\varphi : X \to Y^T$,

$$\varphi(x)(g) = g(x).$$

Оскільки всі відображення $g \in T$ є неперервними, то φ також неперервне.

Розглянемо образ $Z = \varphi(X)$ з топологією, індукованою з добутку Y^T. Оскільки множина T не більш ніж злічення, то простір Y^T метризовний, тому і простір $Z \subseteq Y^T$ метризовний. Зауважимо, що для кожного $g \in T$ відображення $\pi_g : Z \to Y$,

$$\pi_g(z) = z(g),$$

також неперервне.

Для кожного $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$h_{k_1k_2\ldots k_n} = \pi_{g_{k_1k_2\ldots k_n}}.$$

Нехай $x \in X$, $z \in Z$ і $z = \varphi(x)$. Тоді

$$h_{k_1k_2\ldots k_n}(z) = \pi_{g_{k_1k_2\ldots k_n}}(z) =$$

$$= z(g_{k_1k_2\ldots k_n}) = \varphi(x)(g_{k_1k_2\ldots k_n}) =$$

$$= g_{k_1k_2\ldots k_n}(x).$$

Покладемо

$$h(z) = \lim_{k_1\to\infty} \lim_{k_2\to\infty} \ldots \lim_{k_n\to\infty} h_{k_1k_2\ldots k_n}(z).$$

Тоді $h(z) = f(x)$.

Зрозуміло, що відображення $h : Z \to Y$ належить до n-го класу Бера. Згідно з [4], $h \in \Sigma(Z,Y)$.

Нехай $\mathcal{V}$ – це σ-дискретна база для h. Покладемо

$$\mathcal{B} = \{\varphi^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

і покажемо, що $\mathcal{B}$ – база для відображення f.

Нехай G – відкрита в Y множина. Оскільки $f(x) = h(\varphi(x))$ для кожного $x \in X$, то $f^{-1}(G) = \varphi^{-1}(h^{-1}(G))$. З того, що $\mathcal{V}$ – це база для відображення h випливає, що існує система $\mathcal{V}_G \subseteq \mathcal{V}$, така, що

$$h^{-1}(G) = \bigcup \mathcal{V}_G.$$

Позначимо

$$\mathcal{B}_G = \{\varphi^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}_G\}.$$

Тоді

$$f^{-1}(G) = \varphi^{-1}(\bigcup \mathcal{V}_G) = \bigcup \mathcal{B}_G.$$

Відображення φ неперервне, тому система $\mathcal{B}$ є σ-дискретною в X. Таким чином, відображення $f : X \to Y$ є σ-дискретним. $\diamondsuit$

Теорема 2. *Нехай X – метризовний простір, Y – топологічний простір, Z – метризовний простір і $f \in C\overline{B}_n(X \times Y, Z)$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тоді відображення f є σ-дискретним.*

Доведення. Згідно з [5, с. 88], існує гомеоморфне вкладення $\psi : Z \to \ell_\infty(Z)$. Позначимо $g = \psi \circ f$. Тоді

$$g \in C\overline{B}_n(X \times Y, \psi(Z)).$$

З [6, теорема 8.2.3] випливає, що

$$g \in B_{n+1}(X \times Y, \ell_\infty(Z)),$$

адже простір $\ell_\infty(Z)$ локально опуклий. Застосувавши твердження 1, отримаємо, що

$$g \in \Sigma(X \times Y, \ell_\infty(Z)).$$

Тоді $g \in \Sigma(X \times Y, \psi(Z))$.

Нехай $\mathcal{B}$ – це σ-дискретна база для відображення g. Покажемо, що $\mathcal{B}$ – база для відображення f. Нехай G – відкрита множина в Z. Тоді $\psi(G)$ – відкрита в $\psi(Z)$ множина. Тоді існує система $\mathcal{B}_G \subseteq \mathcal{B}$, така, що

$$g^{-1}(\psi(G)) = \bigcup \mathcal{B}_G.$$

Оскільки $f^{-1} = g^{-1} \circ \psi$, то

$$f^{-1}(G) = g^{-1}(\psi(G)) = \bigcup \mathcal{B}_G.$$

Отже, $\mathcal{B}$ – це база для f.

Таким чином, відображення $f : X \times Y \to Z$ є σ-дискретним. $\diamondsuit$

Зауважимо, що Р. Ганселл у [7] показав, що довільне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ має σ-локально скінченну базу, якщо X та Z – метризовні простори, а Y – топологічний простір.

Теорема 3. *Нехай X і Y – метризовні простори, Z – лінійно зв'язний і локально лінійно зв'язний метризовний простір. Тоді*

$$C\overline{C}(X \times Y, Z) \subseteq B_1(X \times Y, Z).$$

Доведення. Нехай $f \in C\overline{C}(X \times Y, Z)$. З [6, теорема 8.5.5] випливає, що

$$f \in H_1(X \times Y, Z).$$

Згідно з теоремою 2, відображення f є σ-дискретним. Тому з теореми Фосґерау [8] маємо, що відображення $f : X \times Y \to Z$ належить до першого класу Бера. $\diamondsuit$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Rudin W.* Lebesgue first theorem // Math. Analysis and Applications, Part B. Edited by Nachbin. Adv. in Math. Supplem. Studies 78. – Academic Press, 1981. – P. 741 - 747.

2. *Banakh T.O.* (Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications // Мат. студії. – **18**, №1. – С. 10 - 28. – 2002.

3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

4. *Hansell R.* Extended Bochner measurable selectors // Math. Ann. – 1987. – **277**. – P. 79 - 94.

5. *Борсук К.* Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971. – 292 с.

6. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете: Дис...докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. – Чернівці, 1999. – 345 с.

7. *Hansell R.* Sums, products and continuity of Borel maps in nonseparable metric spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – **104**, №2. – P. 465 - 471.

8. *Fosgerau M.* When are Borel functions Baire functions? // Fund. Math. – 1993. – **143**. – P. 137 - 152.