УДК 517.983

©2006 р. Т.І. Звоздецький, С.С. Лінчук

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ОДНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ДІЮТЬ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

У даній роботі встановлюється взаємно однозначна відповідність між одним класом аналітичних функцій двох змінних та множиною всіх лінійних неперервних операторів $T:\ \mathcal{A}(G_1)\ \rightarrow\ \mathcal{A}(G_2)$, де G_1 – ϱ-опукла, а G_2 – довільна області комплексної площини.

We establish an one-to-one correspondence between a class of analytic functions of two variables and the set of all linear continues operators $T:\mathcal{A}(G_1)\rightarrow\mathcal{A}(G_2)$, where G_1 is a ϱ-convex domain and G_2 is an arbitrary domain of the complex plane.

Нехай G – область комплексної площини, а $\mathcal{A}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Для областей G_1 і G_2 з $\mathbb{C}$ через $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ позначатимемо сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з простору $\mathcal{A}(G_1)$ у простір $\mathcal{A}(G_2)$. При розв'язуванні різних задач комплексного аналізу важливим є опис у різних формах операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$.

У роботі [1] вивчався взаємозв'язок між операторами $T\in\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ і локально аналітичними на множині $\mathcal{C}G_1\times G_2$ ($\mathcal{C}G_1=\mathbb{C}\setminus G_1$) функціями двох змінних $\tilde{t}(\lambda,z)$, для яких

$$\tilde{t}(\lambda,z)=\underset{z}{T}\left(\frac{1}{\lambda-z}\right).$$

У цьому випадку функція $\tilde{t}(\lambda,z)$ називається характеристичною за Кете для оператора T. Зауважимо, що при цьому для кожного компакта $K_2\subset G_2$ існує такий компакт $K_1\subset G_1$, що для всіх функцій $f\in\mathcal{A}(G_1)$ та всіх $z\in K_2$

$$(Tf)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_z}\tilde{t}(\lambda,z)f(\lambda)\,d\lambda,$$

де γ_z – замкнений контур, що міститься в G_1 і охоплює K_1.

У роботі [2] введені оператори узагальненого диференціювання, які лінійно й неперервно діють у просторах функцій, аналітичних у кругових областях, за правилом

$$(\mathcal{D}_\alpha f)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\,z^{n-1},$$

де $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ – деяка послідовність комплексних чисел, що задовольняє певну умову. Якщо функція $\alpha(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n$ є аналітичною в початку координат, то система функцій $\{\alpha(\lambda z):\lambda\in\Lambda\}$ є повною у відповідному просторі для деякої множини $\Lambda\subseteq\mathbb{C}$. Тому для випадку кругових областей G_1 і G_2 кожен оператор T з класу $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ однозначно визначається за допомогою характеристичної функції виду

$$t(\lambda,z)=\underset{z}{T}[\alpha(\lambda z)]. \tag{1}$$

У [3] для певного класу функцій $\alpha(z)$ описано взаємозв'язок між характеристичними функціями $t(\lambda,z)$ виду (1) і операторами з $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ у цьому випадку. Відзначимо, що характеристичні функції (1) зручно використовувати при вивченні різних властивостей операторів узагальненого диференціювання та узагальненого інтегрування, оскільки функції $f_\lambda(z)=\alpha(\lambda z)$, $\lambda\in\Lambda$, є власними для відповідного оператора узагальненого диференціювання $\mathcal{D}_\alpha$.

У роботі [4] встановлено, що оператор узагальненого диференціювання

Гельфонда-Леонтьєва $\mathcal{D}_{\varrho,\mu}$, що побудований за функцією Міттаґ-Лефлера $E_\varrho(z;\mu)$, продовжується до лінійного неперервного оператора, який діє у просторі $\mathcal{A}(G)$, де G – довільна зіркова відносно нуля область комплексної площини. Тому важливою є задача про опис операторів з класу $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$, який був би зручним при вивченні різних властивостей оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва. Розв'язанню цієї задачі присвячена дана стаття.

Зафіксуємо сталі $\varrho > 0$ та $\mu \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu > 0$) і через $E_\varrho(z;\mu)$ позначимо функцію Міттаґ-Лефлера, тобто

$$E_\varrho(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\varrho}+\mu\right)}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Нехай G_1 і G_2 – довільні області в $\mathbb{C}$, причому G_1 – однозв'язна. Функцію $t(\lambda,z)$, яка для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ визначається формулою

$$t(\lambda,z) = \underset{z}{T}[E_\varrho(\lambda z;\mu)],\ \lambda \in \mathbb{C},\ z \in G_2,$$

будемо називати характеристичною функцією цього оператора. Зауважимо, що оскільки функція Міттаґ-Лефлера є цілою, всі її тейлорівські коефіцієнти відмінні від нуля і область G_1 однозв'язна, то система функцій $\{E_\varrho(\lambda z;\mu) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ є повною в $\mathcal{A}(G_1)$. Тому різним операторам із $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$ відповідають різні характеристичні функції.

Нехай $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$. Очевидно, що характеристична функція $t(\lambda,z)$ цього оператора аналітична при $\lambda \in \mathbb{C}$ і $z \in G_2$. Більше того, оскільки функція Міттаґ-Лефлера має порядок ϱ і скінченний тип при порядкові ϱ, а $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1),\mathcal{A}(G_2))$, то для кожного $z \in G_2$ порядок цілої відносно λ функції $t(\lambda,z)$ не перевищує ϱ, а у випадку, коли її порядок рівний ϱ, то її тип при порядкові ϱ є скінченним. Зауважимо, що сукупність усіх таких цілих функцій позначають символом $[\varrho;\infty)$. Отже, для кожного $z \in G_2$ характеристична функція $t(\lambda,z)$ оператора T належить до класу $[\varrho;\infty)$ як функція відносно λ. Крім цього, оскільки оператор T неперервний, то

$$\forall\, K_2 \subset G_2\ \exists\, C > 0\ \exists\, K_1 \subset G_1\ \forall\, f \in \mathcal{A}(G_1):$$
$$\max_{z\in K_2} |(Tf)(z)| \leqslant C \max_{z\in K_1} |f(z)|$$

(тут і далі K_1 і K_2 – компактні підмножини відповідних областей). Звідси, покладаючи $f(z) = E_\varrho(\lambda z;\mu)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, отримаємо, що

$$\forall\, K_2 \subset G_2\ \exists\, C > 0\ \exists\, K_1 \subset G_1\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}:$$
$$\max_{z\in K_2} |t(\lambda,z)| \leqslant C \max_{z\in K_1} |E_\varrho(\lambda z;\mu)|. \qquad (2)$$

Подамо далі умову (2) в іншому вигляді для випадку, коли G_1 є ϱ-опуклою областю.

Нагадаємо означення ϱ-опуклої області. Елементарною ϱ-опуклою областю, яка відповідає параметрам $\theta \in (-\pi;\pi]$ і $\nu > 0$ називається множина [5, с. 159]

$$D^*_\varrho(\theta;\nu) = \mathbb{C} \setminus \overline{D_\varrho(\theta;\nu)},$$

де

$$D_\varrho(\theta;\nu) = \Big\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(e^{-i\theta}z)^\varrho > \nu,$$
$$|\operatorname{Arg} z - \theta| \leqslant \min\left\{\pi, \frac{\pi}{2\varrho}\right\} \Big\}.$$

Зауважимо, що тут і надалі для $\theta \in (-\pi;\pi]$ і $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ під $(e^{-i\theta}z)^\varrho$ розумітимемо вираз

$$|z|^\varrho \exp[i\varrho(\operatorname{Arg} z - \theta)],$$

де $\theta - \pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \theta + \pi$. Розглянемо множину K вигляду

$$K = \bigcap_{j\in I} \overline{D^*_\varrho(\theta_j;\nu_j)},$$

де I – деяка сім'я індексів. Зрозуміло, що K є замкненою множиною. Якщо вона є ще й обмеженою, то матимемо ϱ-опуклий компакт. Тоді, наслідуючи [6], область G називатимемо ϱ-опуклою, якщо існує зростаюча послідовність ϱ-опуклих компактів, яка вичерпує G зсередини. Відзначимо, що кожна ϱ-опукла область є однозв'язною і містить нуль. Крім цього, для випадку $\varrho = 1$ поняття ϱ-опуклої області збігається з поняттям звичайної опуклої області, яка містить нуль.

Вважатимемо надалі, що G_1 – ϱ-опукла область. Зафіксуємо компакт $K_2 \subset G_2$. Як було відзначено вище, для всіх $z \in K_2$ ціла функція $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$ належить до класу $[\varrho; \infty)$. Нагадаємо, що для цілої функції $g \in [\varrho; \infty)$ її індикатором $h(\theta; g)$ називається функція [7, с. 72]

$$h(\theta; g) = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln|g(re^{i\theta})|}{r^\varrho}, \ \theta \in (-\pi; \pi].$$

Відзначимо, що функцію $h(\theta; g)$ можна продовжити до 2π-періодичної на $\mathbb{R}$ функції, яка буде неперервною на $\mathbb{R}$.

З умови (2) отримаємо, що для зафіксованого компакта $K_2 \subset G_2$ існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, що для всіх $z \in K_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$ індикатор $h(\theta; t_z)$ функції $t_z(\lambda)$ задовольняє нерівність

$$h(\theta; t_z) \leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\max\limits_{\zeta\in K_1} \ln|E_\varrho(re^{i\theta}\zeta; \mu)|}{r^\varrho}. \qquad (3)$$

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. З рівномірної оцінки модуля функції Міттаґ-Лефлера за допомогою її індикатора $h(\theta; E_\varrho)$ [5, с. 328] одержимо, що для цього ε існує таке $R(\varepsilon) > 0$, що при $|\xi| \geqslant R(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\ln|E_\varrho(\xi; \mu)| \leqslant [h(\arg\xi; E_\varrho) + \varepsilon]|\xi|^\varrho.$$

Тоді з (3), скориставшись співвідношенням [5, с. 329]

$$h(\theta; E_\varrho) = \begin{cases} \cos\varrho\theta, & |\theta| \leqslant \min\left\{\pi, \frac{\pi}{2\varrho}\right\}, \\ 0, & \min\left\{\pi, \frac{\pi}{2\varrho}\right\} < \theta \leqslant \pi, \end{cases}$$

будемо мати, що для $z \in K_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$

$$h(\theta; t_z) \leqslant \overline{\lim_{r\to+\infty}} \max_{\zeta\in K_1}[(h(\arg\zeta+\theta; E_\varrho)+\varepsilon)|\zeta|^\varrho] \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\zeta\in K_1, |\mathrm{Arg}\,\zeta+\theta|\leqslant\min\left\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\right\}} |\zeta|^\varrho \cos[\varrho(\mathrm{Arg}\,\zeta + \theta)] +$$

$$+\varepsilon \max_{\zeta\in K_1} |\zeta|^\varrho.$$

Отже, враховуючи довільність числа $\varepsilon > 0$, отримуємо, що для $z \in K_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$

$$h(\theta; t_z) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\zeta\in K_1, |\mathrm{Arg}\,\zeta+\theta|\leqslant\min\left\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\right\}} \mathrm{Re}\,(\zeta e^{i\theta})^\varrho. \qquad (4)$$

Нагадаємо тепер, що для ϱ-опуклої множини M її ϱ-опорна функція $k_\varrho(\theta; M)$ визначається співвідношенням [5, с. 334]

$$k_\varrho(\theta; M) = \sup_{\zeta\in K_1, |\mathrm{Arg}\,\zeta-\theta|\leqslant\min\left\{\pi,\frac{\pi}{2\varrho}\right\}} \mathrm{Re}\,(\zeta e^{-i\theta})^\varrho,$$

де $\theta \in (-\pi; \pi]$. Зауважимо, що ϱ-опорна функція $k_\varrho(\theta; M)$ ϱ-опуклої множини M є ϱ-тригонометрично опуклою [7, с. 74] Крім цього, ϱ-опорна функція ϱ-опуклої області (ϱ-опуклого компакта) є додатною (невід'ємною) і 2π-періодичною. І навпаки, кожна додатна (невід'ємна), 2π-періодична і ϱ-тригонометрично опукла функція визначає деяку ϱ-опуклу область (ϱ-опуклий компакт), для якої вона є ϱ-опорною функцією.

Нехай $k_\varrho(\theta; K_1)$ – ϱ-опорна функція ϱ-опуклого компакта K_1. Тоді з (4) випливає, що для $z \in K_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$

$$h(\theta; t_z) \leqslant k_\varrho(-\theta; K_1).$$

Таким чином, встановлені необхідні умови наступної теореми.

Теорема. *Нехай $\varrho > 0$, G_1 – ϱ-опукла область, а G_2 – довільна область в $\mathbb{C}$. Функція $t(\lambda, z)$, яка аналітична відносно z в G_2 і належить до класу $[\varrho; \infty)$ відносно λ, є характеристичною для деякого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ тоді й лише тоді, коли для кожного компакта $K_2 \subset G_2$ існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, що для всіх $z \in K_2$ індикатор $h(\theta; t_z)$ цілої функції $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$ задовольняє нерівність*

$$h(\theta; t_z) \leqslant k_\varrho(-\theta; K_1), \ \theta \in (-\pi; \pi], \qquad (5)$$

де $k_\varrho(\theta; K_1)$ – ϱ-опорна функція компакта K_1. При цьому, для всіх $f \in \mathcal{A}(G_1)$ і $z \in K_2$

$$(Tf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} (B_{\varrho,\mu}t_z)(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda, \qquad (6)$$

де γ_z – замкнений контур, що лежить в G_1 і охоплює K_1, а $(B_{\varrho,\mu}t_z)(\lambda)$ – узагальнене ϱ, μ-перетворення Бореля цілої функції $t_z(\lambda)$ [5, с. 324].

Доведення. Достатність. Нехай функція $t(\lambda, z)$ є аналітичною відносно z в G_2, цілою із класу $[\varrho; \infty)$ відносно λ і для кожного компакта $K_2 \subset G_2$ існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, що для всіх $z \in K_2$ індикатор $h(\theta; t_z)$ цілої функції $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$ задовольняє нерівність (5). Побудуємо оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, для якого $t(\lambda, z)$ є характеристичною функцією.

Зафіксуємо компакт $K_2 \subset G_2$, знайдений для нього з умови теореми ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, точку $z \in K_2$ і розглянемо функцію

$$k_z(\theta) = \max\{0, h(-\theta; t_z)\}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Вона є невід'ємною, 2π-періодичною і ϱ-тригонометрично опуклою, а тому визначає ϱ-опуклий компакт

$$K_z = \bigcap_{\theta \in (-\pi; \pi]} \overline{D^*_\varrho(\theta; k_z(\theta))},$$

для якого є ϱ-опорною функцією. Оскільки

$$k_z(\theta) \leqslant k_\varrho(\theta; K_1), \ \theta \in (-\pi; \pi],$$

то $K_z \subseteq K_1$. Згідно з теоремою 6.5 із [5], функція $(B_{\varrho,\mu} t_z)(\lambda)$ аналітична поза компактом K_z (а тому й поза K_1). Якщо тепер позначити через γ_z замкнену спрямну жорданову криву, яка лежить у G_1 і охоплює компакт K_1 (а, значить, і K_z), то для кожної функції $f \in \mathcal{A}(G_1)$ рівністю (6) визначається деяка аналітична в точці z функція. Враховуючи довільність компакта $K_2 \subset G_2$ та точки $z \in K_2$, отримаємо, що формулою (6) визначається функція з $\mathcal{A}(G_2)$.

Таким чином, побудовано оператор $T : \mathcal{A}(G_1) \to \mathcal{A}(G_2)$. Його лінійність та неперервність очевидні. Крім цього, за теоремою 6.3 із [5]

$$\underset{z}{T}[E_\varrho(\lambda z; \mu)] = t(\lambda, z), \ \lambda \in \mathbb{C}, \ z \in G_2,$$

тобто функція $t(\lambda, z)$ є характеристичною для оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$, що і потрібно було довести.

Зауваження. Оскільки

$$\underset{\lambda}{B_{\varrho,\mu}}[E_\varrho(\lambda z; \mu)] = \frac{1}{\lambda - z},$$

то зрозуміло, що характеристична за Кете функція

$$\tilde{t}(\lambda, z) = \underset{z}{T}\left(\frac{1}{\lambda - z}\right)$$

є узагальненим ϱ, μ-перетворенням Бореля для цілої відносно λ функції

$$t(\lambda, z) = \underset{z}{T}[E_\varrho(\lambda z; \mu)].$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie // J. reine und angew. Math. – 1953. – V. 191. – S. 30-49.

2. *Гельфонд А.О., Леонтьев А.Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб. – 1951. – Т. 29 (71), № 3. – С. 477-500.

3. *Линчук С.С.* О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций. – Черновцы, 1982. – 37 с. – Деп. в ВИНИТИ 13 апреля 1982 г., № 1798-82.

4. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 5. – С. 72-74.

5. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.

6. *Епифанов О.В., Ленев А.А.* О разрешимости одного интегрального уравнения в пространствах аналитических функций // Матем. анализ и его приложения: Сб. научн. тр. – Ростов-на-Дону, 1974. – Т. 6. – С. 258-261.

7. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

Стаття надійшла до редколегії 27.10.2006