УДК 512.54

©2006 р. М.В. Заводя[1], В.С. Сікора[2], В.І. Сущанський[3]

[1]Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ
[2]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,Чернівці
[3]Сілезький політехнічний університет, Глівіце, Польща

СИСТЕМИ ТВІРНИХ МЕТАЗНАКОЗМІННИХ ГРУП СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Побудовано незвідні системи твірних n-ітерованого вінцевого добутку скінченних знакозмінних груп степенів ≥ 7, які складаються з 4 перетворень. Встановлено, що такі s-елементні системи твірних існують при довільному s, $4 \leq s \leq 2n$.

The irreducible generators systems are constructed for n-iterated wreast product of finite alternating groups of the order ≥ 7, which consist of 4 transformations. It is obtained that such s-element generators systems exists for arbitrary s, $4 \leq s \leq 2n$.

1. Вступ. Метасиметричні групи, тобто ітеровані вінцеві добутки симетричних груп скінченного степеня, було введено до розгляду в роботі Л.А. Калужніна [1] у зв'язку з дослідженням груп ізометрій так званих метричних просторів Кантора. Пізніше виявилося, що ці групи природним чином виникають в теорії графів, теорії автоматних груп, фрактальній геометрії тощо. У зв'язку з цим, цілий ряд робіт різних авторів було присвячено дослідженню будови різних типів метасиметричних груп (див., наприклад, [2]–[5]). Зокрема, в роботах [3], [5] досліджувалися системи твірних метасиметричних груп. Кожна метасиметрична група містить природну підгрупу — вінцевий добуток відповідних знакозмінних груп. Називатимемо такі вінцеві добутки *метазнакозмінними* групами. У порівнянні з метасиметричними групами, будова метазнакозмінних груп досліджена поки що мало. Найвідомішим результатом тут є теорема М. Бхаттачар'ї [6] про те, що вінцевий добуток за нескінченними послідовностями знакозмінних груп степеня ≥ 5 є 2-породженим як проскінченна група. Проте, доведення цього факту неконструктивне. Воно істотно опирається на класифікацію скінченних простих груп, а повне доведення класифікаційної теореми ще й досі не опубліковане. А тому, природною задачею є питання конструктивної побудови і характеризації скінченних незвідних систем твірних (в топологічному сенсі) в різних метазнакозмінних групах.

У даній роботі ми конструюємо системи твірних з "малим"числом елементів у метазнакозмінних групах, що є скінченно ітерованими вінцевими добутками знакозмінних груп степеня ≥ 7. У наступній публікації ці результати буде застосовано для побудови 2-елементних систем твірних довільних ітерованих вінцевих добутків знакозмінних груп степенів ≥ 5. Всі позначення, що вживаються нижче, загальноприйняті, для визначення неозначуваних понять відсилаємо читача до книги [7].

2. Метазнакозмінні групи скінченного рангу. Нагадаємо [8], що вінцевим добутком груп перетворень (G_1, X_1), (G_2, X_2),..., (G_n, X_n), $n \in \mathbb{N}$, називається група всіх підстановок w множини $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, які мають такі дві властивості:

(i) якщо $(x_1, x_2, ..., x_n)^w = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $((x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in X)$, то при довільному k, $1 \leq k \leq n$, елемент $y_k \in X_k$ залежить від вибору елементів $x_1, x_2, ..., x_k$ (і перетворення w);

(ii) при фіксованих $x_1^0, x_2^0, ..., x_{k-1}^0$, перетворення $x_k \to y_k$, $x_k \in X_k$, $1 \leq k \leq n$, яке однозначно визначається підстановкою w, буде підстановкою на множині X_k, яка належить до групи G_k.

Із означення випливає, що кожне перетворення w множини X, яке задовольняє умови (i), (ii), визначає набір вигляду

$$u = [g_1, g_2(x_1), ..., g_n(x_1, ..., x_{n-1})], \qquad (1)$$

де $g_1 \in G_1$,
$g_i(x_1, ..., x_{i-1}) = g_i(\overline{x}_{i-1}) \in G_i^{X_1 \times ... \times X_{i-1}}$, — деяка функція, визначена на множині $X_1 \times X_2 \times ... \times X_{i-1}$ зі значеннями в групі G_i ($i = 2, 3, ..., n$). Набори вигляду (1) далі називатимемо *таблицями*. Таблиця u діє як підстановка на множині X, причому згідно з (i) та (ii), дія визначається рівністю:

$$(m_1, m_2, ..., m_n)^u =$$
$$= \left(m_1^{g_1}, m_2^{g_2(m_1)}, ..., m_n^{g_n(m_1, ..., m_{n-1})}\right), \qquad (2)$$
$$(m_1, m_2, ..., m_n) \in X.$$

Дії (2) відповідає наступне правило множення таблиць:

$$[g_1, g_2(x_1), ..., g_n(x_1, ..., x_{n-1})] \cdot$$
$$\cdot [h_1, h_2(x_1), ..., h_n(x_1, ..., x_{n-1})] =$$
$$= [g_1 \cdot h_1, g_2(x_1) \cdot h_2(x_1^{g_1}), ..., g_n(x_1, ..., x_{n-1}) \cdot$$
$$\cdot h_n(x_1^{g_1}, ..., x_{n-1}^{g_{n-1}(x_1, ..., x_{n-2})})\Big]. \qquad (3)$$

Нейтральним елементом вінцевого добутку буде таблиця $[e, e, ..., e]$ (символом e позначено нейтральний елемент в групах G_i, $1 \leq i \leq n$), а оберненою до (1) буде таблиця

$$\left[g_1^{-1}, g_2^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}\right),\right.$$
$$\left. g_3^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}, x_2^{g_2^{-1}\left(x_1^{g_1^{-1}}\right)}\right), ...\right]. \qquad (4)$$

Далі символом $[u]_k$ позначено k-ту координату таблиці u вигляду (1), $1 \leq k \leq n$.

Вінцевий добуток груп підстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2),..., (G_n, X_n) позначатимемо символом $\wr_{i=1}^{n} G_i$. Група підстановок $\left(\wr_{i=1}^{n} G_i, \prod_{i=1}^{n} X_i\right)$ має наступні властивості.

Лема 1. *1) Вінцевий добуток груп підстановок (G_i, X_i), $1 \leq i \leq n$, буде транзитивною групою тоді й тільки тоді, коли кожна з груп (G_i, X_i) є транзитивною.*

2) Гратка систем імпримітивності вінцевого добутку $\wr_{i=1}^{n} G_i$ на множині $\prod_{i=1}^{n} X_i$ ізоморфна впорядкованій сумі граток систем імпримітивності груп підстановок (G_i, X_i), $1 \leq i \leq n$.

При цьому впорядкована сума Γ граток Γ_i $(1 \leq i \leq n)$, таких, що $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ при $1 \leq i \neq j \leq n$, — це гратка на множині, яка утворена з об'єднання $\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ шляхом склеювання для всіх $i = 1, 2, ..., n-1$ мінімального елемента Γ_i з максимальним елементом Γ_{i+1}; порядок всередині кожної з частин $\Gamma_i \subset \Gamma$ наслідується з порядку Γ_i, а порядок між цими частинами індукується природним упорядкуванням множини $\{1, 2, ..., n\}$.

Означення 1. *Метасиметричною* (відповідно, *метазнакозмінною*) *групою рангу* n назвемо n-кратний вінцевий добуток симетричних (відповідно, знакозмінних) груп скінченного степеня. Якщо $k_1, k_2, ..., k_n$ — степені компонент вінцевого добутку, то вектор $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2, ..., k_n) \in \mathbb{N}^k$ називатимемо *метастепенем* метасиметричної (відповідно, метазнакозмінної) групи.

Розглядаючи метасиметричні групи, природно вважати, що всі її компоненти метастепеня ≥ 2, а для метазнакозмінних — що всі ці компоненти ≥ 3. Метасиметричну групу метастепеня $\overrightarrow{k}$ позначатимемо символом $S(\overrightarrow{k})$, а її метазнакозмінну підгрупу — символом $A(\overrightarrow{k})$. Групи $S(\overrightarrow{k})$ та $A(\overrightarrow{k})$ є групами підстановок на множині $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$, де $X_i = \{1, 2, ..., k_i\}$, $1 \leq i \leq n$.

Лема 2. *Для довільного допустимого вектора $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ справедлива рівність*

$$\left[S(\overrightarrow{k}) : A(\overrightarrow{k})\right] = 2^{1 + k_1 + k_1 k_2 + ... + k_1 k_2 ... k_n}.$$

Доведення випливає з оцінки порядків груп $S(\overrightarrow{k})$ і $A(\overrightarrow{k})$.

При $n \geq 2$ метазнакозмінна група рангу n не буде нормальним дільником у відповідній метасиметричній групі.

У вінцевому добутку $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$ транзитивних груп G_i виділяються стандартні системи твірних, які будуються за фіксованими системами твірних груп G_i, $1 \leq i \leq n$. А саме, нехай $U_l = \left\{ g_l^{(1)}, g_l^{(2)}, ..., g_l^{(s_l)} \right\}$ — фіксована система твірних групи G_l, $l = 1, 2, ..., n$. Таблиці вигляду

$$[e, ..., e, h_l(\overline{x}_{l-1}), e, ..., e], \quad 1 \leq l \leq n,$$

із $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$ називатимемо *l-координатними*. Множина l-координатних таблиць утворює підгрупу вінцевого добутку $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$, яка ізоморфна прямому степеню $G_l^{|X_1 \times ... \times X_{l-1}|}$ групи G_l. При кожному $l = 1, 2, ..., n-1$ виберемо в множині $X_1 \times X_2 \times ... \times X_l$ певний кортеж $\left(m_l^{(1)}, m_l^{(2)}, ..., m_l^{(l)} \right) = \overline{m}_l$ і визначимо s_{l+1} функцій із $G_l^{X_1 \times ... \times X_l}$, поклавши

$$g_{l+1}^{(i)}(\overline{x}_l) = \begin{cases} g_{l+1}^{(i)}, & \text{якщо } \overline{x}_l = \overline{m}_l, \\ e - & \text{в іншому випадку}, \end{cases} \quad (5)$$

де $i = 1, 2, ..., s_{l+1}$. Нехай $u_{l,i}$ — l-координатна таблиця, l-та координата якої збігається з $g_{l+1}^{(i)}(\overline{x}_l)$.

Лема 3. *Якщо групи підстановок (G_1, X_1), (G_2, X_2),..., (G_n, X_n) транзитивні, то множина таблиць $u_{l,i}$ ($l = 1, 2, ..., n$, $i = 1, 2, ..., s_l$) є системою твірних вінцевого добутку $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$.*

Доведення. При фіксованому k $(1 \leq k \leq n)$ за допомогою таблиць $u_{l,i}$, $1 \leq i \leq s_k$, можна побудувати довільну k-координатну таблицю, k-та координата якої є функцією, котра набуває неодиничного значення лише в точці $\overline{m}_{k-1}$. Оскільки групи підстановок (G_i, X_i) є транзитивними для i = 1,2,...,$k-1$, то для довільного кортежа

$$\overline{z}_{k-1} = (z_1, z_2, ..., z_{k-1}) \in X_1 \times X_2 \times ... \times X_{l-1}$$

існує таблиця вигляду

$$[h_1, h_2(\overline{x}_1), ..., h_{k-2}(\overline{x}_{k-2}), e, ..., e]$$

така, що

$$\overline{z}_{k-1} = \overline{m}_{k-1}[h_1, h_2(\overline{x}_1), ..., h_{k-2}(\overline{x}_{k-2})].$$

Звідси легко дістаємо, що довільну k-координатну таблицю можна розкласти на добуток таблиць вказаного вище вигляду. Тепер залишилося скористатися тим, що будь-яку таблицю $[g_1, g_2(\overline{x}_1), ..., g_n(\overline{x}_{n-1})]$ можна розкласти на добуток координатних таблиць:

$$[g_1, g_2(\overline{x}_1), ..., g_n(\overline{x}_{n-1})] = [e, ..., e, g_n(\overline{x}_{n-1})] \cdot$$
$$\cdot [e, ..., e, g_{n-1}(\overline{x}_{n-2}), e] \cdot ... \cdot [g_1, e, ..., e]$$

і лему доведено.

Зауваження. Легко переконатися, що коли системи твірних U_l в групах G_l $(1 \leq l \leq k)$ є незвідними, то побудована вище система твірних вінцевого добутку $\mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} G_i$ також буде незвідною.

Користуючись лемою 3, побудуємо стандартну систему твірних метазнакозмінної групи фіксованого метастепеня. Скористаємося тим що знакозмінна група A_n при довільному $n \geq 4$ є 2-породженою, а 2-елементна система твірних в ній може бути вибрана таким чином.

Лема 4. *Знакозмінна група A_n, $n \geq 4$, яка діє на множині $\{1, 2, ..., n\}$, породжується парою елементів a, b вигляду:*

а) $a = (1, 2, ..., n)$, $b = (1, 2, 3)$ при непарному n;

б) $a = (1, 2, ..., n-1)$, $b = (2, 3, ..., n)$ при n парному.

Доведення див., наприклад, у [9].

Зазначимо, що група A_3 є циклічною і породжується циклом $(1, 2, 3)$.

Нехай тепер $\overrightarrow{k} = (k_1, k_2, ..., k_n)$ — довільний допустимий вектор, $A(\overrightarrow{k}) = \mathop{\wr}\limits_{i=1}^{n} A_{k_i}$ — метазнакозмінна група метастепеня $\overrightarrow{k}$. Символами a_l і b_l позначимо твірні вказаного вище вигляду в групі A_{k_l}. Якщо $k_l = 3$, то залишається лише одна твірна — a_l. Покладемо $U_l = \{a_l, b_l\}$ (чи $U_l = \{a_l\}$, якщо $k_l = 3$). Для кожного $l = 1, 2, ..., n$ побудуємо l-координатні таблиці $u_{l,1}$ та $u_{l,2}$, l-та координата яких є функцією вигляду (5), котра визначається твірною a_l (для $u_{l,1}$) чи b_l (для $u_{l,2}$). (Якщо $k_l = 3$, то буде побудована лише одна таблиця $u_{l,1}$.) З лем 3 і 4 тепер, як наслідок, дістаємо наступне твердження.

Лема 5. *Метазнакозмінна група $A(\overrightarrow{k})$ рангу n, породжується $2n - t$ елементами, де t — кількість координат вектора $\overrightarrow{k}$, що дорівнюють 3.*

Так побудована система твірних групи $A(\overrightarrow{k})$ є незвідною. Але кількість її елементів залежить від рангу метазнакозмінної групи $A(\overrightarrow{k})$. Нашим основним завданням далі буде доведення теореми про те, що при певних обмеженнях на вектор $\overrightarrow{k}$ група $A(\overrightarrow{k})$ може містити також "малі" системи твірних, кількість елементів у яких не залежить від рангу n.

3. Побудова 4-елементної системи твірних метазнакозмінної групи $A(\overrightarrow{k})$. Символом $\eta(\overrightarrow{k})$ позначимо найменшу координату вектора $\overrightarrow{k}$. Далі будуть розглядатися лише такі метазнакозмінні групи $A(\overrightarrow{k})$, для яких $\eta(\overrightarrow{k}) \geq 7$. Нехай

$$\overrightarrow{k} = (k_1, k_2, ..., k_n),$$

$$b_{\overrightarrow{k}}(s) = (k_1, k_2, ..., k_s),$$
$$l_{\overrightarrow{k}}(s) = (k_{s+1}, k_{s+2}, ..., k_n)$$

$(2 \leq s \leq n-1)$. Згідно з визначенням вінцевого добутку, для довільного s, $2 \leq s \leq n-1$, має місце рівність:

$$A(\overrightarrow{k}) = A(b_{\overrightarrow{k}}(s)) \wr A(l_{\overrightarrow{k}}(s)).$$

А тому метазнакозмінна група $A(b_{\overrightarrow{k}}(s))$ природним чином занурюється в групу $A(\overrightarrow{k})$; образом таблиці

$$[g_1, g_2(\overline{x}_1), ..., g_s(\overline{x}_{s-1})]$$

при такому зануренні буде таблиця

$$[g_1, g_2(\overline{x}_1), ..., g_s(\overline{x}_{s-1}), e, ..., e].$$

Образ всієї групи $A(b_{\overrightarrow{k}}(s))$ при такому зануренні позначимо $\overline{A(b_{\overrightarrow{k}}(s))}$. 4-елементна система твірних групи $A(\overrightarrow{k})$, яку ми зараз будуватимемо,має дуже спеціальний вигляд. А саме, ми встановимо, що в стандартній системі твірних підгрупи

$$\overline{A(b_{\overrightarrow{k}}(2))} \simeq A_{k_1} \wr A_{k_2}$$

досить змінити один елемент так, щоб продовження трьох інших її елементів до таблиць групи $A(\overrightarrow{k})$ разом зі зміненим елементом складали систему твірних групи $A(\overrightarrow{k})$. Оскільки $\eta(\overrightarrow{k}) \geq 7$, то, згідно з лемою 5, існує незвідна система твірних групи $A(\overrightarrow{k})$, яка складається з $2n$ таблиць. Виберемо таблиці u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2,..., v_n згідно з наведеною вище загальною конструкцією, поклавши

$$u_i = [e, ..., e, g_i(\overline{x}_{i-1}), e, ..., e],$$

$$v_i = [e, ..., e, h_i(\overline{x}_{i-1}), e, ..., e],$$

де $g_1 = a_1$, $h_1 = b_1$, а при $i \geq 1$ функції g_i та h_i визначено рівностями:

$$g_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (1, 1, ..., 1), \\ e - & \text{в іншому випадку,} \end{cases} \tag{6}$$

$$h_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} b_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (1, 1, ..., 1), \\ e - & \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Побудуємо тепер спеціальну таблицю $u \in A(\overrightarrow{k})$ таким чином. Покладемо

$$u = [c_1, e, c_3(\overline{x}_2), ..., c_n(\overline{x}_{n-1})], \tag{7}$$

де $c_1 = a_1$, а функції $c_i(\overline{x}_{i-1})$ визначено рівностями

$$c_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} a_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (5, 4, ..., 4, 1), \\ b_i, & \text{якщо } \overline{x}_{i-1} = (5, 4, ..., 4, 2), \\ e - & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{8}$$

для $i = 2, 3, ..., n$. Згідно з (4), оберненою до таблиці u буде таблиця

$$u^{-1} = [d_1, e, d_3(\overline{x}_2), ..., d_n(\overline{x}_{n-1})], \tag{9}$$

де $d_1 = c_1^{-1}$, а функції $d_i(\overline{x}_{i-1})$ при $i = 4, 5, ..., n$ визначено рівностями

$$d_i(\overline{x}_{i-1}) = \begin{cases} a_i^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_{i-1} = (6, 4, ..., 4, 1), \\ b_i^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_{i-1} = (6, 4, ..., 4, 2), \\ e - \text{ в інших випадках}, \end{cases} \tag{10}$$

і, крім того, координата $d_3(\overline{x}_2)$ визначена таким чином:

$$d_3(\overline{x}_2) = \begin{cases} a_3^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (5, 1), \\ b_3^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (5, 2), \\ e - \text{ інакше}. \end{cases} \tag{11}$$

Це легко перевіряється безпосереднім підрахуванням. Тим самим, потрібна система елементів групи $A(\overrightarrow{k})$ побудована. Нею є множина $\{u, u_2, v_1, v_2\}$.

Допоміжні обчислення. Для довільної підстановки $\mu \in A_{k_2}$ розглянемо функції $p_2 : X_1 \to A_{k_2}$, $q_2 : X_1 \to A_{k_2}$, визначені рівностями:

$$p_2(\overline{x}_1) = \begin{cases} \mu, \text{ якщо } x_1 = 4, \\ e - \text{ інакше}; \end{cases}$$

$$q_2(\overline{x}_1) = \begin{cases} \mu, \text{ якщо } x_1 = 3, \\ e - \text{ інакше}. \end{cases}$$

Лема 6. *Таблиці* $v = [e, p_2(\overline{x}_1), e, ..., e]$ *і* $w = [e, q_2(\overline{x}_1), e, ..., e]$ *є спряженими в метазнакозмінній групі* $A(\overrightarrow{k})$ *за допомогою таблиці* u.

Доведення. Покладемо

$$u \cdot v \cdot u^{-1} = [s_1, s_2(\overline{x}_1), ..., s_n(\overline{x}_{n-1})]$$

і пересвідчимося, що таблиця з правої частини цієї рівності дорівнює $[e, q_2(\overline{x}_1), e, ..., e]$. Для цього обчислимо координати цієї таблиці. Маємо: $[u \cdot v \cdot u^{-1}]_1 = a_1 \cdot a_1^{-1} = e$, тобто $s_1 = e$. Далі, $[u \cdot v \cdot u^{-1}]_2 = p_2(x_1^{a_1}) = q_2(x_1)$, бо $3^{a_1} = 4$, тобто функція $p_2(x_1^{a_1})$ єдине неодиничне значення набуває в точці 3. При $k \geq 3$, згідно з (3), координата $s_k(\overline{x}_{k-1})$ знаходиться з рівності

$$[u \cdot v \cdot u^{-1}]_k = c_k(\overline{x}_{k-1}) \cdot d_k \left(\overline{x}_{k-1}^{u_{k-1} \cdot v_{k-1}}\right),$$

де u_{k-1}, v_{k-1} — початки довжини $k - 1$ таблиць u, v. Щоб переконатися, що вона одинична, досить переконатися, що будуть справедливими рівності

$$(5, 4, ..., 4, 1)^{u_{k-1} \cdot v_{k-1}} = (6, 4, ..., 4, 1);$$

$$(5, 4, ..., 4, 2)^{u_{k-1} \cdot v_{k-1}} = (6, 4, ..., 4, 2).$$

Для першої з рівностей маємо:

$$(5, 4, ..., 4, 1)^{u_{k-1}} = \left(5^{c_1}, 4^{c_2(6)}, 4^{c_3(6,4)}, ...\right.$$

$$\left. ..., 4^{c_{k-2}(6,4,...,4)}, 1^{c_{k-1}(6,4,...,4)}\right).$$

За визначенням таблиці u, дістаємо: $5^{c_1} = 5^{a_1} = 6$, $c_2(6) = c_3(6, 4) = ... = c_{k-1}(6, 4, ..., 4) = e$. Отже, $(5, 4, ..., 4, 1)^{u_{k-1}} = (6, 4, ..., 4, 1)$. Звідси маємо, що

$$(5, 4, ..., 4, 1)^{u_{k-1} \cdot v_{k-1}} = (6, 4, ..., 4, 1)^{v_{k-1}} =$$

$$= (6, 4^{p_2(6)}, ..., 4, 1) = (6, 4, ..., 4, 1),$$

бо $p_2(6) = e$. Друга рівність перевіряється аналогічно і лему доведено.

З рівності $u \cdot v \cdot u^{-1} = w$ дістаємо, що $u^{-1} \cdot w \cdot u = v$.

Для $i = 1, 2, 3$ позначимо через

$$w_i = \left[e, t_2^{(i)}(\overline{x}_1), e, ..., e\right] \in A(\overrightarrow{k})$$

таблиці, другі координати яких визначено рівностями

$$t_2^{(1)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} \mu, \text{ при } x_1 = 1, \\ e - \text{ інакше}, \end{cases}$$

$$t_2^{(2)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} \mu, \text{ при } x_1 = 4, \\ e - \text{ інакше}, \end{cases}$$

$$t_2^{(3)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} \mu, \text{ при } x_1 = 6, \\ e - \text{ інакше}, \end{cases}$$

де $\mu \in A_{k_2}$ — довільна підстановка.

Лема 7. *Кожна з таблиць* w_1, w_2, w_3 *міститься в підгрупі групи* $A(\overrightarrow{k})$, *що породжена елементами* u, u_2, v_2.

Доведення. За визначенням таблиць u_2, v_2, маємо:

$$[u_2]_2 = g_2(\overline{x}_1), \ \ [v_2]_2 = h_2(\overline{x}_1),$$

$$g_2(1) = a_2, \ \ h_2(1) = b_2.$$

Множина $\{a_2, b_2\}$ є системою твірних знакозмінної групи A_{k_2}, а тому для довільної підстановки $\mu \in A_{k_2}$ існує групове слово $W(x_1, x_2)$ від двох змінних таке, що $\mu = W(x_1, x_2)$. Звідси дістаємо, що $w_1 = W(u_2, v_2)$, тобто w_1 міститься в підгрупі, породженій u_2, v_2. Після цього, як і при доведенні попередньої леми 6, досить скористатися спряженням за допомогою таблиці u. В результаті дістаємо, що w_2, w_3 належать до підгрупи, що породжена u, u_2, v_2. Лему доведено.

Символом $u^{(j)}$ $(j = 1, 2, ..., n)$ позначимо таблицю вигляду

$$[c_1, \underbrace{e, ..., e}_{j}, c_{j+2}(\overline{x}_{j+1}), ..., c_n(\overline{x}_{n-1})],$$

де $c_1 = a_1$, а координати $c_m(\overline{x}_{m-1})$ $(m = j+2, ..., n)$ визначаються рівностями (8). Очевидно, $u^{(1)} = u$, а при $j > 1$ таблиця u^j отримується з таблиці (7) заміною її $(j-1)$ координат, починаючи з третьої, одиничним елементом. Безпосередньо перевіряється, що оберненою до таблиці $u^{(j)}$ буде таблиця вигляду

$$[d_1, \underbrace{e, ..., e}_{j}, d_{j+2}(\overline{x}_{j+1}), ..., d_n(\overline{x}_{n-1})],$$

де $d_1 = c_1^{-1}$, а функції $d_m(\overline{x}_{m-1})$ $(m = j+2, ..., n)$ визначаються рівностями (10)–(11). Іншими словами, обернена до $u^{(j)}$ отримується з таблиці (9) заміною на одиничні послідовності $(j-1)$ її координат, починаючи з третьої.

Таблиці $u^{(j)}$ $(j = 2, ..., n)$ мають властивість, подібну до вказаної вище в лемі 6 властивості таблиці u. А саме, нехай $\lambda \in A_{k_{m+2}}$ — довільна підстановка, а функції

$$f_{m+2} : X_1 \times ... \times X_{m+2} \to A_{k_{m+2}},$$

$$h_{m+2} : X_1 \times ... \times X_{m+2} \to A_{k_{m+2}}$$

визначено рівностями:

$$f_{m+2}(\overline{x}_{m+1}) = \begin{cases} e, \text{ якщо } \overline{x}_{m+1} = (5, 4, ..., 4), \\ \lambda - \text{ інакше}, \end{cases}$$

$$h_{m+2}(\overline{x}_{m+1}) = \begin{cases} e, \text{ якщо } \overline{x}_{m+1} = (6, 4, ..., 4), \\ \lambda - \text{ інакше}. \end{cases}$$

Побудуємо таблиці $v^{(m)}$, $w^{(m)} \in A(\overrightarrow{k})$, поклавши

$$v^{(m)} = [e, ..., e, f_{m+2}(\overline{x}_{m+1}), e, ..., e],$$

$$w^{(m)} = [e, ..., e, h_{m+2}(\overline{x}_{m+1}), e, ..., e]$$

$(m = 1, 2, ..., n-2)$.

Лема 8. *Для довільного натурального m, $1 \le m \le n-2$, має місце рівність*

$$u^{(m)} \cdot w^{(m)} \cdot (u^{(m)})^{-1} = v^{(m)}.$$

Доведення леми цілком аналогічне до доведення леми 6 і ми його не наводимо.

5. Основна теорема.

Теорема 1. *Нехай $n \ge 3$ — фіксоване натуральне число. Для довільного вектора $\overrightarrow{k} \in \mathbb{N}^n$ такого, що $\eta(\overrightarrow{k}) \ge 7$, метазнакозмінна група $A(\overrightarrow{k})$ породжується таблицями u, u_2, v_1, v_2.*

Доведення. Переконаємося, що кожна з визначених вище таблиць u_j, v_j, $u^{(j-1)}$ $(3 \le j \le n)$ міститься в підгрупі, що породжена таблицями u, u_2, v_1, v_2. Для цього скористаємося індукцією за числом j.

Випадок $j = 3$ — база індукції. Потрібно переконатися, що таблиці u_3, v_3 та $u^{(2)}$ можуть бути зображені у вигляді добутку таблиць u_1, v_2, v_1, v_2. Згідно з лемою 7, підгрупа, породжена u_2, v_2, u, містить таблиці

$$z_i = [e, h_2^{(i)}(\overline{x}_1), e, ..., e], \;\; i = 1, 2, 3,$$

де

$$h_2^{(1)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} a_2, \text{ якщо } \overline{x}_1 = 4, \\ e - \text{ інакше}; \end{cases}$$

$$h_2^{(2)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} (1, 6, 3), \text{ якщо } \overline{x}_1 = 6, \\ e - \text{ інакше}; \end{cases}$$

$$h_2^{(3)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} (2, 6, 3), \text{ якщо } \overline{x}_1 = 6, \\ e - \text{ інакше}. \end{cases}$$

Враховуючи, що $h_2^{(1)}(6) = e$, тобто $4^{h_2^{(1)}(6)} = 4$, дістаємо, що спряжена таблиця $z_4 = u \cdot z_1 \cdot u^{-1}$ має вигляд

$$z_4 = [e, h_2^{(4)}(\overline{x}_1), h_3^{(4)}(\overline{x}_2), e, ..., e],$$

де

$$h_2^{(4)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} (1,6,3), \text{ якщо } \overline{x}_1 = 5, \\ e - \text{ інакше;} \end{cases}$$

$$h_3^{(4)}(\overline{x}_2) = \begin{cases} a_3, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (5,1), \\ a_3^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (5,3), \\ e - \text{ інакше.} \end{cases}$$

Аналогічно, спряжена таблиця $z_5 = u \cdot z_4 \cdot u^{-1}$ має вигляд

$$z_5 = [e, h_2^{(5)}(\overline{x}_1), h_3^{(5)}(\overline{x}_2), e, ..., e],$$

де

$$h_2^{(5)}(\overline{x}_1) = \begin{cases} (1,6,3), \text{ якщо } \overline{x}_1 = 4, \\ e - \text{ інакше;} \end{cases}$$

$$h_3^{(5)}(\overline{x}_2) = \begin{cases} a_3, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,1), \\ a_3^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,3), \\ e - \text{ інакше.} \end{cases}$$

Таблиця $z_6 = [e, h_2^{(5)}(\overline{x}_1)^{-1}, e, ..., e]$ міститься в підгрупі, що породжена таблицями u_2, v_2, u, а тому таблиця

$$z_7 = z_5 \cdot z_6 = [e, e, h_3^{(5)}(\overline{x}_2), e, ..., e]$$

також належить до цієї підгрупи. Цілком аналогічні міркування показують, що до неї належить і таблиця

$$z_8 = [e, e, h_3^{(8)}(\overline{x}_2), e, ..., e],$$

де

$$h_3^{(8)}(\overline{x}_2) = \begin{cases} b_3, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,1), \\ b_3^{-1}, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,3), \\ e - \text{ в інших випадках.} \end{cases}$$

Далі розглянемо два випадки, залежно від парності чи непарності числа k_3.

а) Нехай число k_3 є парним. У такому разі має місце рівність

$$a_3^{-1} \cdot b_3 \cdot a_3 \cdot b_3 = (1,2)(3,4),$$

тобто підстановка $a_3^{-1} \cdot b_3 \cdot a_3 \cdot b_3$ має порядок 2. Оскільки $b_3 = (1,2,3)$ — підстановка порядку 3, то третя координата таблиці

$$y = (z_6^{-1} \cdot z_7 \cdot z_6 \cdot z_7)^2$$

є функцією, що набуває неодиничного значення лише в одній точці $(4,1)$, причому це значення дорівнює b_3. Спряженням за допомогою елементів підгрупи, породженої таблицями u, v_1, u_2, v_2, можна досягти, щоб це значення набувалося в будь-якій іншій точці, зокрема в точці $(1,2)$. А це означає, що в такий спосіб побудовано таблицю v_3. Для побудови таблиці u_3 врахуємо рівність

$$a_3 \cdot b_3^{-1} = (3, 4, ..., k_3).$$

Таблиця

$$z_9 = [e, e, h_3^{(9)}(\overline{x}_2), e, ..., e]$$

така, що $h_3^{(9)}(\overline{x}_2)$ набуває неодиничного значення лише в одній точці $(4,1)$, причому це значення дорівнює b_3, нами вже побудована. Нехай $z_{10} = \left(z_7 \cdot z_9^{-1}\right)^{k_3-2}$. Тоді координата $[z_{10}]_3$ набуває неодиничного значення лише в точці $(4,3)$, причому це значення дорівнює a_3^2. Звідси дістаємо, що таблиця

$$y' = z_1^2 \cdot (z_{10}^{\frac{1}{2}(k_3+1)}) \cdot z_1^{-1}$$

має вигляд $y' = [e, e, g_3(\overline{x}_2), e, ..., e]$, де

$$g_3(\overline{x}_2) = \begin{cases} a_3, \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,1), \\ e - \text{ інакше.} \end{cases}$$

За допомогою спряження елементами з виділеної вище підгрупи, з цієї таблиці легко отримати таблицю u_3.

б) Нехай число k_3 є непарним. У такому разі підстановка $\lambda = (1,2)(3,4,...,k_3)$ є парною, а її порядок дорівнює $k_3 - 2$. Виразимо підстановку λ через підстановки a_3 і b_3:

$$\lambda = \mu(a_3, b_3),$$

де μ — деяке групове слово, і побудуємо наступну таблицю з метазнакозмінної групи $A(\overrightarrow{k})$:

$$z_{11} = \mu(z_6, z_7).$$

Для неї маємо, що

$$[z_{11}]_3(\overline{x}_2) = \begin{cases} \mu(a_3, b_3), \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,3), \\ \mu(e, b_3), \text{ якщо } \overline{x}_2 = (4,1), \\ e - \text{ інакше.} \end{cases}$$

Оскільки $\mu(e, b_3) = b_3^l$ при певному l, $1 \le l \le |b_3|$, а b_3 — підстановка порядку $(k_3 - 1)$, то очевидне спряження підстановки $z_{11}^{k_3-2}$ є таблицею вигляду

$$z_{12} = [e, e, g_3(\overline{x}_2), e, ..., e],$$

де g_3 набуває єдиного неодиничного значення b_3 лише в точці $\overline{x}_2 = (4, 1)$. Звідси легко дістаємо таблицю u_3.

Далі, враховуючи, що підстановка $a_3 \cdot b_3 = (1, 3, 5, ..., k_3-3, k_3-1)(2, 4, 6, ..., k_3-2, k_3)$ має порядок $\frac{k_3}{2}$, то таблиця

$$z_{13} = (z_6 \cdot z_{12})^{-k_3}$$

має третьою координатою функцію $g_3(\overline{x}_2)$, яка набуває єдиного неодиничного значення a_3 лише в точці $\overline{x}_2 = (4, 3)$. Аналогічно до попереднього випадку, звідси легко дістаємо таблицю z_{14}, лише третя координата якої є неодиничною, причому набуває неодиничного значення a_3 лише в точці $(4, 1)$, а за допомогою z_{14} легко побудувати таблицю v_3. Залишилося побудувати таблицю $u^{(2)}$. Спрягаючи таблицю v_3 однією з таблиць z_i, $1 \le i \le 3$, дістаємо такі таблиці z_{15} і z_{16}, що $[z_{15}]_3$ набуває єдиного неодиничного значення a_3 в точці $(6, 2)$ та $[z_{15}]_3$ набуває єдиного неодиничного значення b_3 в точці $(6, 1)$. Після цього легко перевіряється, що має місце рівність

$$u^{(2)} = u \cdot z_{15}^{-1} \cdot z_{16}^{-1}$$

і перевірку бази індукції в доведенні теореми закінчено.

Індукційний крок. Припустимо, що для всіх $j = 3, 4, ..., m$ таблиці u_j, v_j, $u^{(j-1)}$ вже подано у вигляді добутку таблиць u_1, u_2, v_1, v_2 і пересвідчимось, що u_{m+1}, v_{m+1}, $u^{(m)}$ також можна представити у вигляді такого добутку.

За допомогою таблиць u_m, v_m ми можемо побудувати таблиці

$$w_i = [e, ..., e, g_{m+1}^{(i)}(\overline{x}_m), e, ..., e], \quad i = 1, 2,$$

де

$$g_{m+1}^{(1)}(\overline{x}_m) = \begin{cases} (1, 6, 3), \text{ при } \overline{x}_m = (1, ..., 1), \\ e - \text{ інакше}, \end{cases}$$

$$g_{m+1}^{(2)}(\overline{x}_m) = \begin{cases} (2, 6, 3), \text{ при } \overline{x}_m = (1, ..., 1), \\ e - \text{ інакше}. \end{cases}$$

Після цього, будуючи послідовні спряжені таблиць w_1, w_2 за допомогою четвертих степенів таблиць u_m, u_{m-1},..., u_1, дістанемо таблиці w_3, w_4 такі, що єдиною їх неодиничною координатою є $(m+1)$-ша, причому функція $[w_3]_{m+1}$ набуває єдиного неодиничного значення $(1, 6, 3)$ в точці $(1, 4, ..., 4)$, а функція $[w_4]_{m+1}$ — єдиного неодиничного значення $(2, 6, 3)$ в цій точці. Далі, враховуючи лему 8, за допомогою таблиць w_3, w_4 можна побудувати такі $(m+1)$-координатні таблиці w_5, w_6, що $[w_5]_{m+1}$ набуває єдиного неодиничного значення $(1, 6, 3)$ в точці $(6, 4, ..., 4)$, а $[w_6]_{m+1}$ — єдиного неодиничного значення $(2, 6, 3)$ в цій точці. Оскільки циклічна підстановка $g_{m+1}(6, 4, ..., 4) = (1, 6, 3)$ залишає нерухомою точку 4, то таблиця $w_7 = u_{m-1} \cdot w_5 \cdot u_{m-1}^{-1}$ має вигляд

$$[e, ..., e, g_{m+1}(\overline{x}_m), g_{m+2}^{(i)}(\overline{x}_{m+1}), e, ..., e],$$

де g_{m+1} набуває неодиничного значення $(1, 6, 3)$ лише в точці $(5, 4, ..., 4)$, а g_{m+2} — неодиничних значень a_3 і a_3^{-1} лише в точках $(5, 4, ..., 4, 1)$ і $(5, 4, ..., 4, 3)$ відповідно. Аналогічно, таблиця $w_8 = u_{m-1} \cdot w_7 \cdot u_{m-1}^{-1}$ також має такий вигляд, де g_{m+1} набуває єдиного неодиничного значення $(1, 6, 3)$ в точці $(4, 4, ..., 4)$, а g_{m+2} — неодиничних значень a_3 і a_3^{-1} лише в точках $(4, ..., 4, 1)$ і $(4, ..., 4, 3)$ відповідно.

Далі, враховуючи лему 8, з таблиці w_3^{-1} можемо отримати $(m + 1)$-координатну таблицю w_9 таку, що $[w_9]_{m+1}$ набуває єдиного неодиничного значення $(1, 3, 6)$ лише в точці $(4, 4, ..., 4)$. Звідси дістаємо, що таблиця $w_{10} = w_8 \cdot w_9$ є $(m + 2)$-координатною, причому $[w_{10}]_{m+2}$ набуває значення a_3 в точці $(4, 4, ..., 4, 1)$, значення a_3^{-1} в точці $(4, ..., 4, 3)$ і одиничного значення в інших точках. Провівши аналогічні міркування для таблиць w_6 і u_{m-1}, дістанемо $(m+2)$-координатну таблицю w_{11} таку, що $[w_{11}]_{m+1}$ набуває значення b_3 в точці $(4, 4, ..., 4, 2)$, значення b_3^{-1} в точці $(4, ..., 4, 3)$ і одиничних значень в інших точках.

Міркуючи аналогічно як у випадку доведення випадку бази індукції, за допомогою таблиць w_{10}, w_{11} можна сконструювати $(m+2)$-координатні таблиці w_{12}, w_{13} такі, що $[w_{12}]_{m+2}$ набуває єдиного неодиничного значення a_{m+2} в точці $(4, 4, ..., 4, 1)$, а $[w_{13}]_{m+2}$ — єдиного неодиничного значення b_{m+2} в цій точці. За допомогою таблиць w_{12} і w_{13} тепер очевидним чином конструюються таблиці u_{m+2}, v_{m+2}.

Залишилося зазначити, що таблиця $u^{(m)}$ очевидним чином конструюється з використанням таблиць w_{12}, w_{13}, u_{m+1} і $u^{(m+1)}$. Теорему доведено.

Таким чином, в групі $A(\overrightarrow{k})$, $\eta(\overrightarrow{k}) \geq 7$, поряд із незвідною системою твірних, яка містить $2n$ елементів, існує незвідна 4-елементна система твірних. Насправді, кількість елементів у незвідних системах може змінюватися в цих межах. Точніше, має місце таке твердження.

Теорема 2. *Для довільного натурального s, $4 \leq s \leq 2n$, метазнакозмінна група $A(\overrightarrow{k})$ метастепеня $\overrightarrow{k}$, $\eta(\overrightarrow{k}) \geq 7$, містить незвідну систему твірних, яка складається точно з s елементів.*

Доведення цієї теореми фактично випливає з обчислень, наведених при доведенні теореми 1, і ми його опускаємо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Калужнин Л.А.* Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп // Acta math. Hung.— 1951.— V.2, N3-4.— P.197-221.

2. *Заровный В.П.* Автоматные подстановки и сплетения групп // Доклады АН СССР.— 1965.— Т.160, N3.— С.562-565.

3. *Иванюта И.Д.* Силовские p-подгруппы счетной симметрической группы // Укр. мат. журнал.— 1963.— N15.— С.240-249.

4. *Чакань Б., Гечег Ф.* О группе автоматных подстановок // Кибернетика.— 1965.— N5.— С.14-17.

5. *Сикора В.С., Сущанский В.И.* Системы порождающих групп автоматных подстановок // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— N3.— С.121-133.

6. *M.Bhattacharjee.* The probability of generating certain profinite groups by two elements // Israel journal of Mathematics.— 1994.— **86**.— P.311—329.

7. *Сущанський В.І., Сікора В.С.* Операції на групах підстановок. Теорія та застосування.— Чернівці: Рута, 2003.— 255 с.

8. *Kaloujnine L., Krasner M.* Le produit complet des groupes de permutations et le probleme d'extension des groupes // C. R. Acad. Sci. Paris.— 1948.— Vol. 227.— P. 806-808.

9. *Пикар С.* О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник, М.: Мир, 1965.— Вып.1.— С.7-34.

Стаття надійшла до редколегії 4.09.2006