УДК 517.956

©2006 р. С.С.Дрінь

Запорізький національний технічний університет, Запоріжжя

ОПЕРАТОР УЗАГАЛЬНЕНОГО ЗСУВУ АРГУМЕНТУ В ПРОСТОРАХ ТИПУ $\overset{0}{C}$

Досліджуються властивості інтегрального оператора (оператора узагальненого зсуву аргументу) у просторі цілих функцій, які на дійсній вісі спадають швидше за $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

There are investigated the property of the integral operator (operator of generalized displacement of argument) in space of entire functions in the case when these function decrease on real axis rather than $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

При розв'язуванні задач математичної фізики, квантової механіки, газової динаміки, теорії теплопровідності, тепломасопереносу, кристалографії, задач про взаємодію тіл, при математичному моделюванні різних реальних процесів виникає необхідність дослідження крайових задач (зокрема, задачі Коші) для диференціальних рівнянь та систем рівнянь з різними особливостями та виродженнями, коли, наприклад, рівняння має особливості в коефіцієнтах, вироджується тип рівняння, рівняння замість диференціальних операторів містять псевдодиференціальні оператори, у рівняннях наявні випадкові збурення і т.п.

До рівнянь, які мають особливості в коефіцієнтах, відносяться B-параболічні рівняння – рівняння з оператором Бесселя, який вироджується по певній просторовій змінній, а саме рівняння при цьому вироджується на межі області. B-параболічні рівняння за своїми внутрішніми властивостями близькі до рівномірно параболічних рівнянь.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для таких рівнянь широко використовуються простори типу S, введені І.М.Гельфандом та Г.Є.Шиловим [1], та простори типу W, введені Б.Л.Гуревичем [2]. Простори типу S складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, поведінка яких та їхніх похідних на дійсній вісі характеризується величинами $c_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|$, $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де подвійна послідовність $\{c_{kn}\}$ задовольняє певні умови (особливо повно досліджено випадок $c_{kn} = k^{k\alpha} \cdot n^{n\beta}$; α, $\beta > 0$). Простори типу W є узагальненнями просторів типу S внаслідок заміни степеневих функцій довільними опуклими, що дозволяє точніше охарактеризувати особливості зростання або спадання функцій на нескінченності.

Методика дослідження властивостей оператора Бесселя у таких просторах ґрунтується на властивостях оператора узагальненого зсуву аргументу, який вперше був введений у праці Б.М.Левітана [3]. У просторах типу S та W властивості оператора узагальненого зсуву аргументу вивчалися у працях [4, 5]. В.В.Городецьким та Р.С.Колісник [6] побудовані класи цілих функцій (названі ними просторами типу C), які на дійсній вісі спадають швидше за $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Простори S_α, S^β, S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0, 1)$, які відносяться до просторів типу S, та простори типу W утворюють певні підкласи просторів типу C. Тут вивчаються властивості оператора узагальненого зсуву аргументу у просторах типу C. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні задачі Коші для сингулярних еволюційних рівнянь, що містять оператор Бесселя (або функції від такого оператора), у просторах типу C.

1. Простори типу C. Нехай $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – монотонно зростаюча послідовність додатних чисел така, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n}/n = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists M > 0\ \exists h > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq M h^n m_n$.

Поряд розглянемо монотонно зростаючу послідовність додатних чисел $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+^n\}$, яка також володіє властивостями 1) – 3), і покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1, \\ \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{n} \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція ρ – диференційовна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно зростає на проміжку $[1,\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty,-1]$, $\rho(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\rho(1) = 1$. Крім того,

$$\exists c_0 > 0\ \exists c > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] :$$

$$\rho(x) \geq c_0 \exp\{c|x|\}.$$

Зазначимо також, що функція $\ln \rho$ – опукла на $[0,+\infty)$, тобто

$$\forall \{x_1, x_2\} \subset (0,+\infty) :$$

$$\ln \rho(x_1) + \ln \rho(x_2) \leq \ln \rho(x_1 + x_2).$$

Функція γ – невід'ємна, диференційовна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно спадає на проміжку $[1;+\infty)$, монотонно зростає на проміжку $(-\infty;-1]$, $\gamma(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, і

$$\exists c_0' > 0\ \exists c' > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] :$$

$$\gamma(x) \leq c_0' \exp\{-c'|x|\}.$$

Якщо ввести позначення: $\tilde{\gamma} = 1/\gamma$, то функція $\ln \tilde{\gamma}$ володіє властивістю опуклості у наведеному вище розумінні. Символом C_γ^ρ у праці [6] позначається сукупність усіх цілих однозначних функцій φ: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists a > 0\ \exists b > 0\ \exists c > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Збіжність у просторі C_γ^ρ визначається так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$ називається збіжною до нуля, якщо вона рівномірно збігається до нуля у кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому справджуються нерівності $|\varphi_\nu(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by)$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$ зі сталими c, a, $b > 0$, не залежними від ν.

В C_γ^ρ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі C_γ^ρ є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність

$$|f(z)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y), \ \ z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Символом $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору C_γ^ρ. Символом $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho$ позначимо сукупність усіх цілих парних функцій з простору C_γ^ρ. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або простором типу $\overset{0}{C}$, а його елементи – основними функціями. Відповідно символом $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупність парних функцій з простору $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Із результатів, одержаних в [6] випливає, що $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ є підпростором простору $\overset{0}{S}$ ($\overset{0}{S}$ складається з парних функцій простору S Л.Шварца). Далі наведемо приклад функції, яка є мультиплікатором у просторах типу $\overset{0}{C}$.

Лема 1. *Нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, яка є розв'язком рівняння Бесселя*

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{du}{dx} + \lambda u = 0,$$

за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{C}{}_\gamma^\rho$.

Доведення. Нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, пов'язана із звичайною функцією Бесселя J_ν першого роду так [7]:

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Функція J_ν допускає аналітичне продовження у комплексну площину $\mathbb{C}$, при цьому правильним є інтегральне зображення Пуассона функції J_ν [7]:

$$J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \qquad (2)$$

Із співвідношень (1) та (2) випливає, що нормована функція Бесселя j_ν комплексного аргументу z є цілою парною функцією і для j_ν правильним є інтегральне зображення

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \qquad (3)$$

Урахувавши, що $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$, за допомогою (3) дістаємо оцінку:

$$|j_\nu(z)| \le c_\nu e^{|y|}, \quad \forall z = x+iy \in \mathbb{C},$$

де $c_\nu = \sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)(\Gamma(\nu+1/2))^{-1}$, $\nu > -1/2$. Оскільки для опуклих функцій $\ln\tilde{\gamma}(x)$ та $\ln\rho(y)$ при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|y| \le \ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln\rho(\varepsilon y) + c, \quad c > 0,$$

то звідси випливає, що

$$|j_\nu(z)| \le c_{\varepsilon,\nu} e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln\rho(\varepsilon y)} \equiv c_{\varepsilon,\nu}(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y).$$

Отже, j_ν – мультиплікатор у кожному просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$. Лема доведена.

2. Оператор узагальненого зсуву аргументу. Символом T_x^ξ позначимо оператор узагальненого зсуву аргументу, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}),$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$.

Теорема 1. *Оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ визначений і неперервний у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.*

Доведення. Для доведення твердження скористаємось співвідношенням $F_B[\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})] = \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$ [8], де F_B – перетворення Фур'є-Бесселя:

$$F_B[\varphi](\sigma) = \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\nu > -1/2, \quad \varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$$

$$\gamma_1(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1, \\ \exp\{-\gamma^*(\sigma)\}, & |\sigma| \ge 1, \end{cases}$$

$$\rho_1(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < 1, \\ \exp\{\rho^*(\tau)\}, & |\tau| \ge 1, \end{cases}$$

$\gamma^*(\sigma)$ – функція, двоїста за Юнгом до функції $\ln\rho(\sigma+1)$, $\sigma \in [0,+\infty)$; $\rho^*(\tau)$ – функція, двоїста за Юнгом до функції $-\ln\gamma(\tau+1)$, $\tau \in [0,+\infty)$; оператор $F_B : \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}) \to \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$ є неперервним. Урахувавши відомі властивості оператора T_x^ξ у просторі Л.Шварца S (див. [9]), для довільної основної функції φ маємо:

$$F_B[T_x^\xi\varphi](\sigma) = \int_0^\infty T_x^\xi\varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma) \equiv \Psi_\xi(\sigma).$$

Із леми 1 випливає, що при кожному фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$. Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$, то $\Psi_\xi \in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$ при кожному ξ. Скориставшись оберненим перетворенням Фур'є-Бесселя знайдемо, що $T_x^\xi\varphi = F_B^{-1}[\Psi_\xi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, тобто вказаний оператор визначений у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Неперервність оператора T_x^ξ випливає з неперервності операції прямого і оберненого перетворення Фур'є-Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то

$$F_B[T_x^\xi\varphi_k] = j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi_k]\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi] = F_B[T_x^\xi\varphi]$$

у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}(\mathbb{R})$. Застосувавши перетворення F_B^{-1} знайдемо, що $T_x^\xi\varphi_k \to T_x^\xi\varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Операція узагальненого зсуву аргументу $\varphi \to T_x^\xi\varphi$ диференційовна у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.*

Доведення. Нехай, за означенням,

$$\Phi_{\Delta\xi}(\delta) = \frac{1}{\Delta\xi}[T_\delta^{\xi+\Delta\xi}\varphi - T_\delta^\xi\varphi],$$

$$\varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R}), \{\xi, \Delta\xi, \delta\} \subset \mathbb{R}.$$

Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення $\Phi_{\Delta\xi} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial\xi}T_\delta^\xi\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, має місце у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$. Із результатів, одержаних у праці [8] випливає, що якщо $\varphi \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$, то функція $F_B[\varphi]$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і $F_B[\varphi] \in \overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}$. Отже, врахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є-Бесселя (прямого і оберненого), досить довести, що $F_B[\Psi_{\Delta\xi}](z) \longrightarrow F_B\left[\frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\right](z)$ при $\Delta\xi \to 0$ у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$ тобто, що:

1) сім'я функцій $\{\gamma_{\Delta\xi}(z) := F_B\Big[\Psi_{\Delta\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\Big](z)$, $|\Delta\xi| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ – деяке фіксоване число, $z = x + iy \in \mathbb{C}\}$ збігається рівномірно до нуля при $\Delta\xi \to 0$ у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$;

2) $\exists\tilde{a} > 0\ \exists\tilde{b} > 0\ \exists\tilde{c} > 0 : |\gamma_{\Delta\xi}(z)| \leq \tilde{c}\gamma_1(\tilde{a}x)\rho_1(\tilde{b}y) = \tilde{c}e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)}$, $\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, де $\tilde{\gamma} = 1/\gamma_1$, сталі $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ не залежать від $\Delta\xi$, якщо $\Delta\xi$ досить мала за модулем величина.

Урахувавши, що

$$F_B[T_z^\xi\varphi] = j_\nu(z\xi)F_B[\varphi](z),$$

одержимо співвідношення

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}](z) = \frac{1}{\Delta\xi}(F_B[T_z^{\xi+\Delta\xi}\varphi](z) - F_B[T_z^\xi\varphi](z)) =$$

$$= \frac{1}{\Delta\xi}(j_\nu(z(\xi+\Delta\xi)) - j_\nu(z\xi))F_B[\varphi](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(z(\xi+\theta\Delta\xi))F_B[\varphi](z), \quad 0 < \theta < 1.$$

Далі скористаємось такими відомими формулами [9]:

$$\frac{\partial}{\partial s}j_\nu(sx) = csx^2 j_{\nu+1}(sx),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_\nu(sx) = cxs^2 j_{\nu+1}(sx),$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_B\left[\frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\right] = \frac{\partial}{\partial\xi}F_B\left[T_z^\xi\varphi\right](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(z\xi)F_B[\varphi](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z\xi)F_B[\varphi](z),$$

$$F_B[\Phi_{\Delta\xi}](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi))F_B[\varphi](z).$$

Отже,

$$\gamma_{\Delta\xi}(z) = c\xi z^2[j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi)) - j_{\nu+1}(z\xi)]\times$$

$$\times F_B[\varphi](z) = c\theta\Delta\xi\cdot\xi\cdot z^2\frac{\partial}{\partial\xi}j_{\nu+1}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))\times$$

$$\times F_B[\varphi](z) = cc_1\theta\Delta\xi\cdot\xi^2\cdot z^4 j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))\times$$
$$\times F_B[\varphi](z), \quad 0<\theta_1<1$$

(стала c_1 залежить від ν). Із останнього співвідношення випливає, що якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де K – обмежена область в $\mathbb{C}$, то $\gamma_{\Delta\xi}(z)\to 0$ при $\Delta\xi\to 0$ рівномірно по $z\in\mathbb{K}$, оскільки існують додатні сталі d_1, d_2, $d_3=d_3(\xi)$ такі, що

$$|z^4|\le d_1, \quad |F_B[\varphi](z)|\le d_2,$$
$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))|\le d_3, \quad \forall z\in\mathbb{K}.$$

Таким чином, умова 1) виконується. Доведемо, що умова 2) також має місце.

Передусім зазначимо (див. доведення леми 1), що

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))|\le b_\nu e^{|y||\xi+\theta_1\Delta\xi|}\le \tilde{b}_\nu e^{c_0|\xi||y|},$$
$$z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Для опуклих функцій $\ln\tilde{\gamma}_1$ та $\ln\rho_1$ при довільному $\varepsilon>0$ та фіксованому ξ правильною є нерівність

$$c_0|\xi||y|\le \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\rho_1(\varepsilon y)+d, \quad d>0,$$

тому

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))|\le \tilde{\tilde{b}}_\nu e^{\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\rho_1(\varepsilon y)}.$$

Оскільки $F_B[\varphi]\in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$ і у просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$ визначена операція множення на z^2, то $z^4F_B[\varphi]\in \overset{0}{C}{}^{\rho_1}_{\gamma_1}$, тобто існують сталі a_0, b_0, $c_0>0$ такі, що

$$|z^4F_B[\varphi](z)|\le c_0e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(a_0x)+\ln\rho_1(b_0y)},$$
$$z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Тоді

$$|\gamma_{\Delta\xi}(z)|\le$$
$$\le L|\Delta\xi|e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(a_0x)+\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\rho_1(b_0y)+\ln\rho_1(\varepsilon y)}$$

(тут стала $L>0$ залежить від ν, ξ і не залежить від $\Delta\xi$). Врахувавши нерівність опуклості для функції $\ln\gamma_1$ та зафіксувавши ε з інтервалу $(0,a_0)$ дістанемо, що

$$\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\tilde{\gamma}_1((a_0-\varepsilon)x)\le\ln\tilde{\gamma}_1(a_0x),$$

тобто

$$-\ln\tilde{\gamma}_1(a_0x)+\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)\le -\ln\tilde{\gamma}_1((a_0-\varepsilon)x).$$

Оскільки, за припущенням, $|\Delta\xi|\le\varepsilon_0$, то

$$|\gamma_{\Delta\xi}(x)|\le L\varepsilon_0e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)}=$$
$$=L\varepsilon_0\gamma_1(\tilde{a}x)\rho_1(\tilde{b}y), \quad z=x+iy\in\mathbb{C},$$

де $\tilde{a}=a_0-\varepsilon$, $\tilde{b}=b_0+\varepsilon$. Цим доведено, що умова 2) також виконується, тобто операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна в просторі $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Наслідок. *Операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна у просторі* $\overset{0}{C}{}^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

Для доведення цього твердження досить скористатися теоремою 2 та методом математичної індукції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958. - 307 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1958. - 274 с.

3. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102 – 143.

4. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

5. *Городецький В.В., Мартинюк О.В.* Оператори Бесселя нескінченного порядку та їх застосування // Доповіді НАН України. - 2003. - N 6. - С. 7 - 12.

6. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 30 – 37.

7. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

8. *Городецький В.В., Дрінь С.С.* Перетворення Фур'є-Бесселя просторів типу C та C' // Доп. НАН України. – 2004. – N 8. – С. 19 – 24.

9. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, N 2. – С. 299 – 310.

Стаття надійшла до редколегії 25.10.2006