УДК 517.5

© 2006 р. М.М. Долинюк, О.Б. Скасків

Львівський національний університет імені Івана Франка

ПРО ПРАВИЛЬНЕ ЗРОСТАННЯ ДЕЯКИХ ДОДАТНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ

Отримано умови правильного зростання логарифмів максимального члена і суми додатного функціонального ряду, що є узагальненням ряду Тейлора-Діріхле.

We establish conditions for regular growth of logarithms of the maximal term and the sum of a positive functional series which is a generalization of Taylor-Dirichlet series.

1^0. **Вступ.** *Повільно змінною функцією* вслід за [1] називатимемо кожну додатну вимірну на $[0;+\infty)$ функцію l, для якої $l(2x)=(1+o(1))l(x)$ $(x\to+\infty)$. Клас таких функцій позначимо через L.

Через L^+ позначатимемо клас нестрого зростаючих до $+\infty$ функцій $l\in L$.

Нехай також L_ρ – клас *правильно зростаючих функцій порядку* $\rho\in(0;+\infty)$, тобто додатних неспадних функцій l таких, що $l(x)=x^\rho\alpha(x)$, $\alpha\in L$.

У статтях [2–4] встановлюються умови належності до класів L^+ і L_ρ різних характеристик цілих функцій. У цій статті встановимо умови належності до вказаних класів деяких характеристик додатних функцій, зображуваних для всіх $x\geqslant 0$ рядами вигляду

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n},\qquad F_n\geqslant 0\ \ (n\geqslant 0),\tag{1}$$

де $\lambda=\{\lambda_n:\ n\geqslant 0\}\subset\mathbb{R}_+$, $\beta=\{\beta_n:\ n\geqslant 0\}\subset\mathbb{R}_+$, $\tau(x)$ – неспадна неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція така, що $\tau(0)=0$.

Клас функцій вигляду (1) позначимо через $S(\lambda,\beta,\tau)$.

Зазначимо (див. [5–6]), що дослідження асимптотичних властивостей цілих функцій, зображуваних рядами Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, деякими інтерполяційними рядами можна звести до подібної задачі для рядів вигляду (1).

2^0. **Повільне зростання.** Для $F\in S(\lambda,\beta,\tau)$ і $x\geqslant 0$ позначимо

$$\mu(x,F)=\max\{F_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}:\ n\geqslant 0\},$$

а через $\nu(x)=\nu(x,F)$ кожне з тих n, що $F_ne^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}=\mu(x,F)$. Надалі $\nu(x)=\nu(x,F)$ за потреби для всіх x визначатиметься однозначно.

Не складно переконатись, що якщо $\sup\{n:\ F_n>0\}=+\infty$ і $F\in L^+$ або $\ln\mu(\cdot,F)\in L^+$, то $\lambda_n\equiv 0$ $(n\geqslant 0)$. Тому ряд (1) у таких випадках переписується у вигляді

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_ne^{\tau(x)\beta_n},\tag{2}$$

де $\beta=\{\beta_n:\geqslant 0\}$ – послідовність попарно різних невід'ємних чисел, а зростаюча до $+\infty$ функція $\tau(x)$ така, що

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^+\tau(x)}{\ln x}=0.\tag{3}$$

При цьому функція $\ln\mu(x,F)$ опукла відносно функції $\tau(x)$ (тобто, функція $\varphi(t)=\ln\mu(\tau^{-1}(t),F)$ – опукла, де τ^{-1} – функція, обернена до функції τ) і у випадку, коли $\sup\{\beta_n:\ \ F_n\neq 0\}=+\infty$, очевидно, що $\tau(x)=o(\ln\mu(x,F))$ $(x\to+\infty)$.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\ln\mu(0,F)=0$. Остання умова забезпечує неспадання частки $\ln\mu(x,F)/\tau(x)$.

Відзначимо також, що для функції F вигляду (2) необхідною умовою повільного зростання $\ln\mu(x,F)$ є повільне зростання функції $\tau(x)$. Справді, нехай $\ln\mu(x,F)=$

$\ln F_{\nu(x)} + \tau(x)\beta_{\nu(x)}$, тоді з означення максимального члена маємо $\ln\mu(2x,F) \geqslant \ln F_{\nu(x)} + \tau(2x)\beta_{\nu(x)}$. Тому, враховуючи, що $\ln F_{\nu(x)} \leqslant 0$ для всіх досить великих x, при $x\to+\infty$ маємо

$$\frac{\ln\mu(2x,F)}{\ln\mu(x,F)} \geqslant \frac{\ln F_{\nu(x)}+\tau(2x)\beta_{\nu(x)}}{\ln F_{\nu(x)}+\tau(x)\beta_{\nu(x)}} =$$

$$= 1+\frac{(\tau(2x)-\tau(x))\beta_{\nu(x)}}{\ln F_{\nu(x)}+\tau(x)\beta_{\nu(x)}} \geqslant \frac{\tau(2x)}{\tau(x)} \geqslant 1,$$

звідки випливає потрібний висновок, а також, зокрема, що виконується (3). Добре відомо, що достатньою умовою повільного зростання диференційовної функції τ є умова $x\tau'(x)/\tau(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$. Надалі у цьому підрозділі вважатимемо, що $\tau(x)\nearrow+\infty$ $(x\to+\infty)$ і виконується умова

$$x\frac{\tau'(x)}{\tau(x)} \searrow 0 \quad (x\to+\infty) \tag{4}$$

Зазначимо, що співвідношення (3) випливає з умови $x\tau'(x)=o(x)$ $(x\to+\infty)$, а тим паче з умови (4).

Міркуючи тепер подібно, як в [3, 4], встановимо умови повільного зростання логарифма максимального члена $\mu(x,F)$ ряду (2).

Припустимо спочатку, що існує послідовність $\varkappa_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$ така, що

$$\mu(x,F)=F_n\exp\{\tau(x)\beta_n\} \tag{5}$$

для всіх $x\in[\varkappa_n;\varkappa_{n+1}]$. Не складно зауважити, що тоді при $n\to+\infty$

$$\tau(\varkappa_n)=\ln(F_{n-1}/F_n)/(\beta_n-\beta_{n-1})\uparrow+\infty. \tag{6}$$

У цьому випадку $(\ln\mu(x,F))'=\tau'(x)\beta_n$ для всіх $x\in(\varkappa_n;\varkappa_{n+1})$ і всіх $n\geqslant 0$.

Враховуючи, що достатньою умовою для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L^+$ є умова

$$x\frac{(\ln\mu(x,F))'}{\ln\mu(x,F)}\to 0 \quad (x\to+\infty,$$

$$x\notin\{\varkappa_n:\ n\geqslant 0\}\equiv\varkappa),$$

досить перевірити, чи

$$\frac{\tau'(x)\beta_n}{\ln\mu(x,F)}\cdot x\to 0 \quad (x\to+\infty,\ x\notin\varkappa). \tag{7}$$

Отже, за умови (4) для $x\in(\varkappa_n;\varkappa_{n+1})$ отримуємо

$$x\frac{\tau'(x)\beta_n}{\ln\mu(x,F)} = \beta_n\frac{x\tau'(x)}{\tau(x)}\frac{\tau(x)}{\ln\mu(x,F)} \leqslant$$

$$\leqslant \beta_n\frac{\varkappa_n\tau'(\varkappa_n)}{\ln\mu(\varkappa_n,F)}.$$

Звідси отримуємо, що достатньою умовою для справедливості (7) є умова

$$\frac{\beta_n\varkappa_n\tau'(\varkappa_n)}{\ln F_n+\beta_n\tau(\varkappa_n)}\to 0 \quad (n\to+\infty). \tag{8}$$

З іншого боку, за умови (5) маємо, що $\ln\mu(x,F)=\int_0^x\beta_{\nu(t)}dt$, $\nu(t)$ однозначно визначена для всіх $t\notin\varkappa$ і отже, якщо в точках послідовності $\varkappa$ вибрати як звичайно $\nu(t)=\max\{n:\ F_ne^{\tau(t)\beta_n}=\mu(t,F)\}$, то зрозуміло, що $\beta_{\nu(x)}\nearrow$ $(x\to+\infty)$ (тобто, послідовність β – зростаюча).

Якщо тепер додатково припустити, що виконується умова

$$\liminf_{x\to+\infty}\frac{\tau'(2x)}{\tau'(x)}>q>0, \tag{9}$$

то, оскільки з повільного зростання $\ln\mu(x,F)$ для всіх досить великих x отримуємо $\ln\mu(2x,F)\leqslant 2\ln\mu(x,F)$, при $x\to+\infty$ маємо

$$\ln\frac{\ln\mu(2x)}{\ln\mu(x,F)}=\int_x^{2x}\beta_{\nu(t)}\frac{\tau(t)}{\ln\mu(t,F)}\frac{t\tau'(t)}{\tau(t)}\frac{dt}{t}\geqslant$$

$$\geqslant\beta_{\nu(x)}\frac{\tau(2x)}{\ln\mu(2x,F)}\frac{2x\tau'(2x)}{\tau(2x)}\ln 2\geqslant$$

$$\geqslant q\beta_{\nu(x)}\frac{x\tau'(x)}{\ln\mu(x,F)}\ln 2.$$

Залишається вибрати $x=\varkappa_n$.

Підбиваючи підсумок проведених вище міркувань, відзначимо, що ми довели наступні твердження.

Лема 1. *1) Існує послідовність $\varkappa_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$ така, що для всіх $x\in[\varkappa_n;\varkappa_{n+1}]$ виконується рівність (5) тоді і лише тоді, коли послідовність β зростаюча і виконується умова (6).*

2) Якщо послідовність β неспадна і виконуються умови (6), (4), то для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L^+$ достатньо, а у випадку, коли виконується умова (9) і необхідно, щоб виконувалась умова (8).

Доведемо тепер таке твердження.

Лема 2. *Нехай функція $\tau(x)$ задовольняє умову (4). Якщо існує послідовність $\varkappa_{n_k}\uparrow+\infty$ $(k\to+\infty)$ така, що $\mu(x,F)=F_{n_k}e^{\tau(x)\beta_{n_k}}$ для всіх $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}}]$ і всіх $k\geqslant 1$, то для того, щоб $\ln\mu(\cdot,F)\in L^+$ достатньо, а у випадку, коли виконується умова (9) і необхідно, щоб виконувалась умова*

$$\frac{\beta_{n_k}\varkappa_{n_k}\tau'(\varkappa_{n_k})}{\ln F_{n_k}+\beta_{n_k}\tau(\varkappa_{n_k})}\to 0 \quad (k\to+\infty). \qquad (10)$$

Доведення. Позначимо $F_k^*=F_{n_k}$, $\beta_k^*=\beta_{n_k}$, $\varkappa_k^*=\varkappa_{n_k}$ і $\mu_*(x)=\max\{F_k^*e^{\tau(x)\beta_k^*}:\ k\geqslant 1\}$. Тоді застосовуючи твердження 1, отримаємо потрібний висновок.

Застосовуючи схему доведення теореми 1 [8, c.844], отримуємо наступне твердження.

Лема 3. *Нехай функція $\tau(x)\nearrow+\infty$ $(x\to+\infty)$. Припустимо, що (F_n) впорядкована за незростанням, тобто $F_n\searrow 0$ $(n\to+\infty)$. Якщо $F\in S(0,\beta,\tau)$ і виконується умова*

$$\theta=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\beta_n\ln n}{-\ln F_n}<+\infty, \qquad (11)$$

то при $x\to+\infty$ виконується співвідношення

$$\ln F(x)=(1+o(1))\ln\mu(x,F). \qquad (12)$$

Доведення. Припустимо спочатку, що

$$\sup\{\beta_n:\ F_n\neq 0\}=\beta<+\infty. \qquad (13)$$

Тоді для кожного $\varepsilon>0$ існує $m_1=m_1(\varepsilon)$ таке, що для всіх досить великих x

$$\ln F_{m_1}+(\beta-\varepsilon)\tau(x)\leqslant\ln F_{m_1}+\tau(x)\beta_{m_1}\leqslant$$
$$\leqslant\ln F_{\nu(x)}+\tau(x)\beta_{\nu(x)}\leqslant\beta\tau(x).$$

Тому,

$$\ln\mu(x,F)=(\beta+o(1))\tau(x)\quad(x\to+\infty). \qquad (14)$$

З іншого боку

$$\mu(x,F)\leqslant F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}F_ne^{\tau(x)\beta_n}\leqslant$$
$$\leqslant e^{\beta\tau(x)}\sum_{n=0}^{+\infty}F_ne^{\tau(0)\beta_n}=F(0)e^{\beta\tau(x)},$$

звідки за допомогою (14) отримуємо, що $\ln F(x)=(\beta+o(1))\tau(x)$ $(x\to+\infty)$ і, отже, виконується (12).

Відзначимо, що у випадку, коли $F\in S(0,\beta,\tau)$, $\tau(x)\nearrow+\infty$ $(x\to+\infty)$ і виконується умова (13), функції $\ln F(x)$, $\ln\mu(x,F)$ і $\tau(x)$ одночасно є повільно зростаючими.

Припустимо тепер, що $\sup\{\beta_n:\ F_n\neq 0\}=+\infty$. У відповідності з доведеним, не зменшуючи загальності можна вважати, що $\beta_n\geqslant 2\theta$ $(n\geqslant 0)$. Справді, нехай

$$F(x)=\sum_{\beta_n<2\theta}F_ne^{\tau(x)\beta_n}+\sum_{\beta_n\geqslant 2\theta}F_ne^{\tau(x)\beta_n}=$$
$$=F_1(x)+F_2(x).$$

За доведеним, $\ln F_1(x)=(1+o(1))\ln\mu(x,F_1)=(\beta_*+o(1))\tau(x)$ $(x\to+\infty)$, де $\beta_*=\sup\{\beta_n:\ \beta_n<2\theta,\ F_n\neq 0\}$. Але, $\tau(x)=o(\ln\mu(x,F_2))$ $(x\to+\infty)$, тому $\mu(x,F)=\mu(x,F_2)$ і $\ln F(x)=(1+o(1))\ln F_2(x)$ $(x\to+\infty)$.

Отже, вважаємо, що $\beta_n\geqslant 2\theta$ $(n\geqslant 0)$. Тоді з умови (11) випливає, що

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{\ln(1/F_n)}\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (15)$$

Зауважимо тепер, що з необхідної умови збіжності ряду (1) випливає, що $1/\beta_n\ln(1/F_n)\to+\infty$ $(n\to+\infty)$. Виберемо тепер функцію $\psi(t)\to+\infty$ з умови

$$\psi(\ln\frac{1}{F_n})=\frac{1}{\beta_n}\ln\frac{1}{F_n}\quad(n\geqslant 1). \qquad (16)$$

Подібно до того, як це робилось в [8], позначимо через $N=N(x)$ найменше з тих $k\in\mathbb{N}$, що для всіх $n\geqslant k$ виконується нерівність

$$\psi(\ln\frac{1}{F_n})\geqslant 6\tau(x). \qquad (17)$$

Зауважимо, що звідси за умовою (15) випливає

$$\frac{1}{\theta+1}\ln(N(x)-1) < \frac{1}{\beta_{N-1}}\ln\frac{1}{F_{N-1}} =$$

$$= \psi(\ln\frac{1}{F_{N-1}}) < 6\tau(x),$$

тобто, при $x \to +\infty$

$$\ln N(x) < 6(\theta+2)\tau(x). \qquad (18)$$

Далі, за умовою вибору (16) і нерівностями (17), (15) при $x \to +\infty$ отримуємо

$$\mu(x,F) \leqslant F(x) = \sum_{n=0}^{N(x)-1} F_n e^{\tau(x)\beta_n} +$$

$$+ \sum_{n=N(x)}^{+\infty} \exp\{-\beta_n\psi(\ln\frac{1}{F_n}) + \tau(x)\beta_n\} \leqslant$$

$$\leqslant N(x)\mu(x,F) + \sum_{n=N(x)}^{+\infty} \exp\{-\frac{5}{6}\ln\frac{1}{F_n}\}$$

$$\leqslant N(x)\mu(x,F) + \sum_{n=N(x)}^{+\infty} \exp\{-\frac{5}{4}\ln n\} \leqslant$$

$$\leqslant 2N(x)\mu(x,F),$$

позаяк, за нерівністю (15) $\ln(1/F_n) \geqslant 3/2$ для всіх досить ввеликих n, а також $N(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ за означенням $N(x)$. Звідси, за нерівністю (18), враховуючи, що $\tau(x) = o(\ln\mu(x,F))$ $(x \to +\infty)$, отримаємо співвідношення (12). Лему 3 доведено.

Зауваження 1. *Виглядає на те, що твердження леми 3 рівносильне до достатності у теоремі 1 [8] з $\varphi(x) = x$, проте нам цього не вдалось встановити.*

Відзначимо, що у теоремі 1 [8] розглядаються цілі ряди Діріхле ($\tau(x) = x$ у нашому випадку) з невід'ємними показниками такими, що $\sup\{\beta_n :\ n \geqslant 0\} = +\infty$ і коефіцієнтами, що задовольняють умову

$$\beta_n \leqslant \ln(1/F_n)/\ln\psi(\ln(1/F_n)) \quad (n \geqslant n_1), \qquad (19)$$

де ψ – деяка додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0;+\infty)$ функція така, що $t/\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$. З наведеного вище доведення леми 3, зокрема видно, що у достатності теореми 1 [8] (з $\varphi(x) = x$) від вимоги, щоб в умові (19) виконувалось $t/\psi(t) \uparrow +\infty$, $\psi(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$, а також від апріорних умов $\ln n = O(\ln(1/F_n))$ $(n \to +\infty)$ і $\sup\{\beta_n :\ n \geqslant 0\} = +\infty$ можна відмовитись. При цьому слід залишити лише умови $\psi(t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, (19) і $\ln n = O(\psi(\ln(1/F_n)))$ $(n \to +\infty)$.

З лем 2 і 3 випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай для неперервно диференційовної функції $\tau(x) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$ виконується умова (4), а для функції $F \in S(0,\beta,\tau)$ виконується умова (11). Якщо існує послідовність $\varkappa_{n_k} \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $\mu(x,F) = F_{n_k}\exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $x \in [\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}}]$ і всіх $k \geqslant 1$, то наступні твердження рівносильні:*

а) $\ln\mu(\cdot,F) \in L^+$;

б) $\ln F \in L^+$;

в) виконується умова (10).

Наступне твердження дозволяє виділити просту умову, що забезпечує існування послідовності $(\varkappa_{n_k})$ з потрібною властивістю. Сформулюємо її для класу цілих додатних рядів Діріхле $S(\beta) \equiv S(0,\beta,\tau)$, $\tau(x) = x$.

Лема 4. *Нехай $F \in S(\beta)$. Якщо*

$$(\forall n \geqslant 0):\ \beta_n < \sup\{\beta_j :\ F_j > 0,\ j \geqslant 0\}, \qquad (20)$$

то $\nu(x,F) \nearrow +\infty$ і $\beta_{\nu(x,F)} \nearrow$ $(x \to +\infty)$.

Доведення. Не зменшуючи загальності вважаємо, що $F_n \searrow 0$ $(n \to +\infty)$. Зауважимо, що для фіксованих $t \in \mathbb{R}$, $\{k,\nu\} \subset \mathbb{Z}_+$, нерівність

$$F_k e^{t\beta_k} \leqslant F_\nu e^{t\beta_\nu} \qquad (21)$$

виконується тоді і лише тоді, коли для $\sigma = -1/t$, $\mu_n = ln(1/F_n)$, $b_n = e^{\beta_n}$ виконується нерівність

$$b_k e^{\sigma\mu_k} \leqslant b_\nu e^{\sigma\mu_\nu}, \qquad (22)$$

позаяк $(b_n e^{\sigma\mu_n})^x = F_n e^{t\beta_n}$. Нехай $F_*(\sigma) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{\sigma\mu_n}$ для $\sigma < 0$.

Зауважимо, що $b_n < \sup\{b_j : \ j \geqslant 0\}$ і $\mu_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ для кожного $\sigma < 0$. Крім цього, оскільки $1/\beta_n \ln(1/F_n) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, то $b_n e^{\sigma\mu_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Далі, міркуючи подібно, як і при доведенні леми 2 [9, с.121], отримуємо, що $\nu_*(\sigma) = \max\{n \geqslant 0 : \ b_n e^{\sigma\mu_n} = \mu(\sigma, F_*)\} \to +\infty$ $(\sigma \to -0)$. А, оскільки нерівності (21) і (22) рівносильні, то $\nu(t, F) = \nu_*(-1/t) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$.

Лему 4 доведено.

З теореми 1 за допомогою леми 4 отримуємо наступне твердження.

Наслідок 1. *Нехай для послідовності $\beta = (\beta_n)$ виконується умова (20), функція τ така, як у теоремі 1, $F \in S(0, \beta, \tau)$ і виконується умова (11). Наступні твердження рівносильні:*

а) $\ln \mu(\cdot, F) \in L^+$;

б) $\ln F \in L^+$;

в) для послідовності $(\varkappa_{n_k})$ точок стрибка центрального індексу $\nu(x, F)$ виконується умова (10).

Зауваження 2. *Повторюючи наведені вище міркування, не складно встановити, що у випадку, коли φ – додатна неспадна диференційовна функція така, що $\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} t \searrow$ $(t \to +\infty)$, а функція τ така, як у теоремі 1, то у випадку, коли існує послідовність $(\varkappa_{n_k}) \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$ така, що $(\forall x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}}]) : \ \mu(x, F) = F_{n_k} \exp\{\tau(x)\beta_{n_k}\}$, достатньою умовою для того, щоб $\varphi(\ln \mu(\cdot, \ F)) \in L^+$, є умова*

$$\frac{\varphi'(\ln F_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k})}{\varphi(\ln F_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k})} \tau'(\varkappa_{n_k})\varkappa_{n_k}\beta_{n_k} \to 0$$

$$(k \to +\infty).$$

Нам не вдалось встановити необхідність цієї умови. Висловимо припущення, що для деяких функцій F і φ це не так.

3^0. **Правильне зростання.** В [7] наведено наступне твердження, що встановлюється безпосередньою перевіркою.

Лема 5. *([7, лема 1]). Нехай $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$. Центральний індекс $\nu(x, F)$ є неспадною функцією, як тільки виконується принаймні одна з наступних умов:*

а) функція $\tau(x)$ – неспадна і послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ – неспадні;

б) функція $\tau(x)$ – диференційовна, $0 \leqslant \tau'(x) \leqslant 1$ $(x > 0)$, послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ – неспадна, $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ – зростаюча;

в) функція $\tau(x)$ – диференційовна, $\tau'(x) \geqslant 1$ $(x > 0)$, послідовності $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ – зростаюча, $\beta = (\beta_n)$ – неспадна.

Безпосередньою перевіркою переконуємось також у справедливості наступного твердження.

Лема 6. *Нехай $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$. Якщо існує послідовність попарно неперетинних інтервалів $I_n = (a_n; b_n)$, $\cup_{n=1}^{+\infty} \overline{I}_n = [x_0; +\infty)$ і для кожного j існує n_j таке, що $(\forall x \in I_j) : \ \mu(x, F) = F_{n_j} \exp\{x\lambda_{n_j} + \tau(x)\beta_{n_j}\}$, то для всіх $x > x_0$ правильна рівність*

$$\ln \mu(x, F) = \ln \mu(x_0, F) + \int_{x_0}^{x} \lambda_{\nu(t)} dt + $$
$$+ \int_{x_0}^{x} \beta_{\nu(t)} d\tau(t). \qquad (23)$$

Власне, у випадку неперервної диференційовності функції $\tau(x)$ з (23) отримуємо, що для всіх $x \in \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ існує єдине $\nu(x, F)$ і

$$(\ln \mu(x, F))' = \lambda_{\nu(x,F)} + \tau'(x)\beta_{\nu(x,F)}.$$

З леми 6 також випливає, що $(\forall x > x_0)$: $\nu(x, F) < +\infty$.

Доведемо наступне твердження.

Лема 7. *Нехай $\rho \geqslant 1$, $\tau(x)$ – неперервно диференційовна функція така, що $\tau'(x) \nearrow$ або $\tau'(x) \searrow$ і $x^2\tau'(x) \nearrow$ $(x \to +\infty)$, а також послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ такі, що $\nu(x, F) \nearrow$ $(x \to +\infty)$ і справджується рівність (23). Тоді наступні твердження рівносильні:*

1) $\ln \mu(\cdot, \ F) \in L_\rho$;

2) $\psi(x)/\ln \mu(x, F) \to \rho$ $(x \to +\infty)$, де $\psi(x) = x(\lambda_{\nu(x)} + \tau'(x)\beta_{\nu(x)})$;

3) $\psi \in L_\rho$.

Доведення. Доведемо спочатку імплікацію 3) $\Longrightarrow$ 2). Оскільки для довільної додатної повільно змінної функції ψ_0 виконується

$$\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx \sim \frac{r^\rho}{\rho}\psi_0(r) \quad (r \to +\infty),$$

а з умови 3) випливає, що $\psi(x) = x^\rho\psi_0(x)$, де ψ_0 – повільно змінна функція, то

$$\frac{\psi(r)}{\ln\mu(r,F)} \sim \frac{r^\rho\psi_0(r)}{\int_0^r x^{\rho-1}\psi_0(x)dx} \sim \rho \quad (r \to +\infty),$$

при цьому ми скористались рівністю (23).

Доведемо тепер, що 2) $\Longrightarrow$ 1). З рівності (23) за допомогою 2) отримуємо, що

$$\ln\mu(x,F) \sim \int_{x_0}^x \frac{\psi(t)}{t}dt \sim \rho\int_{x_0}^x \frac{\ln\mu(t,F)}{t}dt \equiv$$
$$\equiv \rho x^\rho\psi_1(x) \ (x \to +\infty). \tag{24}$$

Оскільки функція ψ_1 неперервно диференційовна при $x > x_0$, то досить перевірити, чи $x\psi'_1(x)/\psi_1(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$. Використовуючи співвідношення (24), при $x \to +\infty$ отримуємо

$$x\frac{\psi'_1(x)}{\psi_1(x)} = \frac{\ln\mu(x,F)}{\int_{x_0}^x \frac{\ln\mu(t,F)}{t}dt} - \rho = o(1).$$

Залишається довести, що 1) $\Longrightarrow$ 3). Зауважимо, що за умови 2), маємо 1) $\Longleftrightarrow$ 3). Тому досить перевірити, чи з 1) випливає 2).

Справді, нехай $c > 1, x > 0$. Оскільки $\ln\mu(cx,F) \geqslant \ln F_{\nu(cx)} + cx\lambda_{\nu(cx)} + \tau(cx)\beta_{\nu(cx)} \geqslant \ln F_{\nu(x)} + cx\lambda_{\nu(x)} + \tau(cx)\beta_{\nu(x)}$, то з одного боку

$$\ln\mu(cx,F) - \ln\mu(x,F) \geqslant$$
$$\geqslant (c-1)x\lambda_{\nu(x)} + (\tau(cx) - \tau(x))\beta_{\nu(x)}, \tag{25}$$

а з іншого боку

$$\ln\mu(x,F) - \ln\mu(x/c,F) \leqslant$$
$$\leqslant (1-1/c)x\lambda_{\nu(x)} + (\tau(x) - \tau(x/c))\beta_{\nu(x)}. \tag{26}$$

Якщо тепер припустити, що виконується умова $\tau'(x) \nearrow$, то $\tau(cx) - \tau(x) \geqslant (c-1)x\tau'(x)$, $\tau(x) - \tau(x/c) \leqslant (1-1/c)x\tau'(x)$ і, тому, з нерівностей (25), (26) отримуємо

$$\frac{c}{c-1}\Big(1 - \frac{\ln\mu(x/c,F)}{\ln\mu(x,F)}\Big) \leqslant \frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} \leqslant$$
$$\frac{1}{c-1}\Big(\frac{\ln\mu(cx,F)}{\ln\mu(x,F)} - 1\Big). \tag{27}$$

Позаяк $\ln\mu(\cdot, \ F) \in L_\rho$, то $\ln\mu(cx,F) \sim c^\rho\ln\mu(x,F)$ $(x \to +\infty)$, тому з нерівностей (27) отримуємо

$$\frac{c^\rho - 1}{(c-1)c^{\rho-1}} \leqslant \liminf_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} \leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{x\to+\infty}\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} \leqslant \frac{c^\rho - 1}{(c-1)}.$$

Спрямовуючи $c \to 1+0$, звідси отримуємо 2), а отже, у відповідності із зробленим вище зауваженням, і 3).

У випадку, коли виконується умова $\tau'(x) \searrow$, міркуємо подібно. Справді, тоді за допомогою умови $x^2\tau'(x) \nearrow$ отримуємо, що $\tau(cx) - \tau(x) \geqslant (c-1)x\tau'(cx) \geqslant ((c-1)/c^2)x\tau'(x)$, $\tau(x) - \tau(x/c) \leqslant (1 - 1/c)x\tau'(x/c) \leqslant c^2(1-1/c)x\tau'(x)$ і, тому за допомогою нерівностей (25), (26) отримуємо

$$\ln\mu(cx,F) - \ln\mu(x,F) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(c-1)}{c^2}(c^2x\lambda_{\nu(x)} + x\tau'(x)\beta_{\nu(x)}) \geqslant \frac{(c-1)}{c^2}\psi(x)$$

а також

$$\ln\mu(x,F) - \ln\mu(x/c,F) \leqslant$$
$$\leqslant c^2(1-1/c)((1/c^2)x\lambda_{\nu(x)} + x\tau'(x)\beta_{\nu(x)} \leqslant$$
$$\leqslant c(c-1)\psi(x).$$

Звідси, замість (27) отримуємо

$$\frac{1}{c(c-1)}\Big(1 - \frac{\ln\mu(x/c,F)}{\ln\mu(x,F)}\Big) \leqslant \frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c^2}{c-1}\Big(\frac{\ln\mu(cx,F)}{\ln\mu(x,F)} - 1\Big).$$

Не складно зрозуміти, що завершує доведення міркування проведене вище. Лему 7 доведено.

Наступна лема є аналогом леми 3 для класу $S(\lambda,\beta,\tau)$.

Лема 8. *Нехай для функції* $\tau(x)$ *виконуються умови* $\tau(x) \nearrow +\infty$, $\tau(x) \leqslant x$ $(x \to +\infty)$. *Припустимо, що* $\sup\{\lambda_n : \ n \geqslant$

$0\} = +\infty$, *а* (F_n) *впорядкована за незростанням, тобто* $F_n \searrow 0$ $(n \to +\infty)$. *Якщо* $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$ *і виконується умова*

$$\theta = \limsup_{n\to+\infty} \frac{(\lambda_n + \beta_n)\ln n}{-\ln F_n} < +\infty, \qquad (28)$$

то при $x \to +\infty$ *виконується співвідношення (12).*

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо $F_n \leqslant 1$ $(n \geqslant 0)$. З умови $\sup\{\lambda_n : F_n \neq 0\} = +\infty$ елементарно отримуємо, що $x + \tau(x) = o(\ln \mu(x, F))$ $(x \to +\infty)$. Міркуючи, як у доведенні леми 3, переконуємось, що, не зменшуючи загальності можна вважати виконаною умову $\lambda_n + \beta_n \geqslant 2\theta$ $(n \geqslant 0)$. Справді, якщо

$$F(x) = \sum_{\lambda_n+\beta_n<2\theta} F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} +$$

$$+ \sum_{\lambda_n+\beta_n\geqslant 2\theta} F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} = F_1(x) + F_2(x),$$

то не складно зрозуміти, що $\ln F_1(x) = O(x) = o(\ln \mu(x, F_2))$ $(x \to +\infty)$, тому $\mu(x, F) = \mu(x, F_2)$ і $\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln F_2(x)$ $(x \to +\infty)$.

Отже, вважаємо, що $\lambda_n + \beta_n \geqslant 2\theta$ $(n \geqslant 0)$. Тоді з умови (28) випливає, що виконується (15). Зауважимо тепер, що з необхідної умови збіжності ряду (1) випливає, що $1/(\lambda_n + \beta_n)\ln(1/F_n) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Виберемо тепер функцію $\psi(t) \to +\infty$ з умови

$$\psi(\ln \frac{1}{F_n}) = \frac{1}{\lambda_n + \beta_n} \ln \frac{1}{F_n} \quad (n \geqslant 1). \qquad (29)$$

Подібно до того, як це робилось в [8], позначимо через $N = N(x)$ найменше з тих $k \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geqslant k$ виконується нерівність

$$\psi(\ln \frac{1}{F_n}) \geqslant 6 \frac{x\lambda_n + \beta_n \tau(x)}{\lambda_n + \beta_n}. \qquad (30)$$

Таке N існує, позаяк, права частина нерівності (30) не перевищує $6(x + \tau(x))$. З нерівності (30) за умовою (15) отримуємо

$$\frac{1}{\theta + 1} \ln(N(x) - 1) < \frac{1}{\lambda_{N-1} + \beta_{N-1}} \ln \frac{1}{F_{N-1}} =$$

$$= \psi(\ln \frac{1}{F_{N-1}}) < 6 \frac{x\lambda_{N-1} + \beta_{N-1}\tau(x)}{\lambda_{N-1} + \beta_{N-1}} <$$

$$< 6(x + \tau(x)),$$

тобто, при $x \to +\infty$

$$\ln N(x) < 6(\theta + 2)(x + \tau(x)). \qquad (31)$$

Далі, за умовою вибору (29) і нерівностями (30), (15) при $x \to +\infty$ отримуємо

$$\mu(x, F) \leqslant F(x) = \sum_{n=0}^{N(x)-1} F_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} +$$

$$+ \sum_{n=N(x)}^{+\infty} e^{-(\lambda_n+\beta_n)\psi(\ln 1/F_n)+x\lambda_n+\tau(x)\beta_n} \leqslant$$

$$\leqslant N(x)\mu(x, F) + \sum_{n=N(x)}^{+\infty} \exp\{-\frac{5}{6} \ln \frac{1}{F_n}\} \leqslant$$

$$\leqslant N(x)\mu(x, F) + + \sum_{n=N(x)}^{+\infty} \exp\{-\frac{5}{4} \ln n\} \leqslant$$

$$\leqslant 2N(x)\mu(x, F),$$

позаяк, за нерівністю (15) $\ln(1/F_n) \geqslant 3/2$ для всіх досить великих n, а також $N(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$ за визначенням $N(x)$. Звідси, за нерівністю (31) враховуючи, що $x + \tau(x) = o(\ln \mu(x, F))$ $(x \to +\infty)$, отримаємо співвідношення (12). Лему 8 доведено.

Наступне твердження є очевидним наслідком з лем 7 і 8.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 7 і* $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$. *Якщо виконується умова (28), то умова* $\ln F \in L_\rho$ *і твердження а)–в) леми 7 еквівалетні.*

Наслідком нашого розгляду у даному пункті є такий аналог теореми 1 з [4] для класу $S(\lambda, \beta, \tau)$, у якому вказано необхідні і достатні умови для того, щоб $\ln \mu(\cdot,\ F) \in L_\rho$ (а, отже, за умови (28) і для того, щоб $\ln F \in L_\rho$).

Теорема 3. *Нехай* $\rho \geqslant 1$, *функція* $\tau(x)$ *неперервно диференційовна і* $\tau'(x) \searrow$, $x^2\tau'(x) \nearrow$ $(x \to +\infty)$, $0 \leqslant \tau'(x) \leqslant 1$

$(x > 0)$, *послідовності* $\lambda = (\lambda_n)$ *– неспадна до* $+\infty$, $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ *– зростаюча до* $+\infty$. *Якщо* $F \in S(\lambda, \beta, \tau)$, *то для того, щоб* $\ln \mu(\cdot,\ F) \in L_\rho$ *необхідно, а у випадку, коли існує додатна незростаюча функція* $l(x)$ *така, що* $x/\ln\mu(x,F) \sim l(x)$ $(x \to +\infty)$, *і достатньо, щоб існувала така зростаюча до* $+\infty$ *послідовність* $(\varkappa_{n_k})$, *що* $\mu(x,F) = F_{n_k} \exp\{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}\}$ *для всіх* $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}}]$ *і всіх* $k \geqslant 1$, *а також при* $k \to +\infty$ *виконувались умови:*

$$\frac{\varkappa_{n_k}(\lambda_{n_k} + \tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k})}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_k}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}} \to \rho, \tag{32}$$

$$\frac{\varkappa_{n_{k+1}}(\lambda_{n_k} + \tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k})}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}} \to \rho. \tag{33}$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\ln\mu(\cdot,\ F) \in L_\rho$, $\rho > 1$, незростаюча функція $l(x)$ така, що $x/\ln\mu(x,F) \sim l(x)$ $(x \to +\infty)$, завжди існує.

Доведення теореми 3. З огляду на леми 6, 7, а також п. б) леми 5, для встановлення необхідності досить перевірити, чи з того, що $\psi(x)/\ln\mu(x,F) \to \rho \quad (x \to +\infty)$, де $\psi(x) = x(\lambda_{\nu(x)} + \tau'(x)\beta_{\nu(x)})$, випливають умови (32), (33). За лемою 5 центральний індекс $\nu(x,F) \nearrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, тому існує послідовність $\varkappa_{n_k} \uparrow +\infty$ така, що $\nu(x,F) = n_k$ для всіх $x \in (\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}})$, а отже $\mu(x,F) = F_{n_k}\exp\{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}\}$ для всіх $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}}]$. Якщо тепер в п. 2) леми 7 вибрати спочатку $x = \varkappa_{n_k}$, а потім спрямувати $x \to (\varkappa_{n_{k+1}} - 0)$, то отримаємо відповідно (32) і (33), позаяк $\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k} = \ln F_{n_{k+1}} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_{k+1}} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_{k+1}} = \ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}}, F)$.

Для встановлення достатності умов (32) і (33) за умовами $l(x) \searrow$ і $\tau'(x) \searrow$ для $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}})$ при $k \to +\infty$ отримуємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} = (1+o(1))l(x)(\lambda_{n_k} + \tau'(x)\beta_{n_k}) \leqslant$$
$$\leqslant (1+o(1))l(\varkappa_{n_k})(\lambda_{n_k} + \tau'(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}) =$$
$$= (1+o(1))\frac{\psi(\varkappa_{n_k})}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_k}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_k})\beta_{n_k}} =$$
$$= \rho + o(1),$$

а з іншого боку

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)} = (1+o(1))l(x)(\lambda_{n_k} + \tau'(x)\beta_{n_k}) \geqslant$$
$$\geqslant (1+o(1))l(\varkappa_{n_{k+1}})(\lambda_{n_k} + \tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}) =$$
$$= (1+o(1))\frac{\varkappa_{n_{k+1}}(\lambda_{n_k} + \tau'(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k})}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}} =$$
$$= \rho + o(1),$$

при цьому ми знову скористались рівністю $\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}}, F) = \ln F_{n_k} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \tau(\varkappa_{n_{k+1}})\beta_{n_k}$. Теорему 3 доведено.

Вибираючи $\tau(x) \equiv \ln x$ $(x \geqslant e)$ і $\tau(x) \equiv x/e$ $(0 \leqslant x \leqslant e)$, з отриманих вище тверджень одержуємо такий наслідок для додатних рядів Тейлора-Діріхле..

Наслідок 2. *Нехай функція* F *зображається збіжним для всіх* $x \geqslant e$ *рядом вигляду*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^{\beta_n} e^{x\lambda_n}, \quad F_n \geqslant 0 \quad (n \geqslant 0),$$

де послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ *– неспадна до* $+\infty$, *а* $\alpha = (\lambda_n + \beta_n)$ *– зростаюча до* $+\infty$ *такі, що* $\beta_n = O(\lambda_n)$ $(n \to +\infty)$. *Якщо* $\rho \geqslant 1$ *і виконується умова (28), то наступні твердження рівносильні:*

1) $\ln\mu(\cdot,\ F) \in L_\rho$;

2) $\psi(x)/\ln\mu(x,F) \to \rho \quad (x \to +\infty)$, *де* $\psi(x) = x\lambda_{\nu(x)} + \beta_{\nu(x)}$;

3) $\psi \in L_\rho$;

4) $\ln F \in L_\rho$;

5) існує така зростаюча до $+\infty$ *послідовність* $(\varkappa_{n_k})$, *що* $\mu(x,F) = F_{n_k}\exp\{x\lambda_{n_k} + \tau(x)\beta_{n_k}\}$ *для всіх* $x \in [\varkappa_{n_k}; \varkappa_{n_{k+1}}]$ *і всіх* $k \geqslant 1$, *а також при* $k \to +\infty$ *виконуються умови:*

$$\varkappa_{n_{k+1}} \sim \varkappa_{n_k}$$

$$\frac{\varkappa_{n_k}\lambda_{n_k} + \beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_k}\lambda_{n_k} + \ln\varkappa_{n_k}\beta_{n_k}} \to \rho, \tag{34}$$

$$\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \beta_{n_k}}{\ln F_{n_k} + \varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k} + \ln\varkappa_{n_{k+1}}\beta_{n_k}} \to \rho. \tag{35}$$

Доведення наслідку 2. Не зменшуючи загальності міркувань, вважаємо, що $\mu(0,F)=1$. Порівняння формулювання наслідку 2 з наведеними вище твердженнями показує, що для того, щоб можна було вважати твердження наслідку цілком доведеним, досить довести, що 1) $\Longleftrightarrow$ 5).

Доведемо спочатку, що 1) $\Longrightarrow$ 5). За теоремою 3 умови (34) і (35) випливають з умови 1). Зауважимо, що умови (34) і (35) можна переписати у вигляді

$$(\varkappa_{n_k}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k})/\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)\to\rho,$$

$$(\varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k})/\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)\to\rho,$$

відповідно. Звідси, скориставшись умовою $\beta_n=O(\lambda_n)$ $(n\to+\infty)$, при $k\to+\infty$ отримуємо

$$(\varkappa_{n_{k+1}}/\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F))\sim(\varkappa_{n_k}/\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)).$$

Зауважимо тепер, що у випадку, коли виконується 1), існує диференційовна функція $l(x)$ така, що $\ln\mu(x,F)\sim x^\rho l(x)$ і $xl'(x)/l(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$. Тоді, очевидно, що $x^\varepsilon l(x)\uparrow$ $(x\to+\infty)$ для кожного $\varepsilon>0$. Вибираючи тепер $\varepsilon\in(0;\rho-1)$, остаточно при $k\to+\infty$ отримуємо

$$1\leqslant\left(\frac{\varkappa_{n_{k+1}}}{\varkappa_{n_k}}\right)^{\rho-1-\varepsilon}\leqslant\left(\frac{\varkappa_{n_{k+1}}}{\varkappa_{n_k}}\right)^{\rho-1}\frac{l(\varkappa_{n_{k+1}})}{l(\varkappa_{n_k})}=$$

$$=(1+o(1))\frac{\varkappa_{n_k}\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)}{\varkappa_{n_{k+1}}\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}=(1+o(1)),$$

звідки маємо $\varkappa_{n_{k+1}}\sim\varkappa_{n_k}$ $(k\to+\infty)$.

Доведемо тепер, що 5) $\Longrightarrow$ 1). За лемою 7 для цього досить довести, що виконується 2). Для $x\in[\varkappa_{n_k};\varkappa_{n_{k+1}})$ при $k\to+\infty$ отримуємо

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\leqslant\frac{\varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k}}{\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}=$$

$$=(1+o(1))\frac{(\varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k})}{\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)}\frac{\varkappa_{n_{k+1}}}{\varkappa_{n_k}}=\rho+o(1),$$

а з іншого боку

$$\frac{\psi(x)}{\ln\mu(x,F)}\geqslant\frac{\varkappa_{n_k}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k}}{\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)}=$$

$$=(1+o(1))\frac{(\varkappa_{n_k}\lambda_{n_k}+\beta_{n_k})}{\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)}\frac{\varkappa_{n_k}}{\varkappa_{n_{k+1}}}=\rho+o(1).$$

При цьому ми знову скористались рівностями $\ln\mu(\varkappa_{n_{k+1}},F)=\ln F_{n_k}+\varkappa_{n_{k+1}}\lambda_{n_k}+\ln\varkappa_{n_{k+1}}\beta_{n_k}$, $\ln\mu(\varkappa_{n_k},F)=\ln F_{n_k}+\varkappa_{n_k}\lambda_{n_k}+\ln\varkappa_{n_k}\beta_{n_k}$.

Наслідок 2 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.– М.: Наука, 1982.– 142 с.

2. *Заболоцкий Н.В., Шеремета М.Н.* О медленном возрастании основных характеристик целых функций// Мат. заметки.– 1999.– Т.65, №2.– С.206–214.

3. *Скасків О.Б., Тракало О.М.* Про повільне зростання лічильної функції додатної послідовності// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 2000.– Вип.57.– С.36–40.

4. *Філевич П.В., Шеремета М.М.* Про правильну зміну основних характеристик цілої функції// Укр. мат. журн.– 2003.–Т.55, №6.– С.840—849.

5. *Осколков В.А.* О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися рядами// Мат. сборн.– 1976.– Т.100, №2.– С.312–334.

6. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду// Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат.– 1998.– Вип.49.– С.75–79.

7. *Скасків О.Б., Трусевич О.М.* Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів// Препринт №17-1.–Львів: Ін-т ІППММ НАН України, 1999.– 18 с.

8. *Шеремета М.Н.* Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами// Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, №6.– С.840–849.

9. *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей// Матем. заметки.– 1994.– Т.56, №4.– С.117–128.

Стаття надійшла до редколегії 03.09.2006