УДК 517.95

©2006 р. **Н. М. Гринців**

Львівський національний університет імені І. Франка, Львів

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Встановлено умови існування і єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при старшій похідній у параболічному рівнянні в області з вільною межею. Припускається, що невідомий коефіцієнт прямує до нуля при $t \to 0$ як степенева функція t^β, $0 < \beta < 1$.

There were established conditions of existence and uniqueness of a solution of inverse problem for parabolic equation with unknown time-dependent coefficient at the higher-order derivative in a free boundary domain. It was assumed that unknown coefficient vanishes at initial moment as a power $t^\beta, 0 < \beta < 1$.

У роботі досліджено обернену задачу визначення коефіцієнта при старшій похідній у слабковиродженому параболічному рівнянні в області з вільною межею. Вказана задача поєднує два типи задач: обернену задачу з виродженням та задачу з вільною межею, прикладом якої є задача Стефана [1]. Кожен з цих типів задач досліджувався раніше. Так, обернену задачу з виродженням для параболічного рівняння вивчено в [2], а для рівнянь еліптичного та гіперболічного типів – в [3, 4] відповідно. Задача з вільною межею з інтегральною умовою перевизначення досліджена в [5], а з умовою Стефана, що задана і в даній роботі, – в [6].

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$ де $h(t)$ – невідома функція, розглядаємо обернену задачу визначення коефіцієнта $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$ в рівнянні

$$\begin{aligned} u_t &= a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + \\ &\quad + f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T, \end{aligned} \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(h(t),t) = \mu_2(t),\ t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$h'(t) = -u_x(h(t),t) + \mu_4(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{5}$$

де $h_0 = h(0) > 0$ – задане число.

Заміною змінних $y = \dfrac{x}{h(t)}, t = t$, зведемо задачу (1)-(5) до оберненої відносно невідомих $(a(t), h(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(yh(t),t)$, в області зі сталими межами $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$:

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy} + \frac{b(yh(t),t) + yh'(t)}{h(t)}v_y + \\ &\quad + c(yh(t),t)v + f(yh(t),t), \end{aligned} \tag{6}$$

$$v(y,0) = \varphi(yh(0)), \qquad 0 \le y \le 1, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t),\ v(1,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T, \tag{8}$$

$$\frac{a(t)}{h(t)}v_y(0,t) = \mu_3(t),\ 0 \le t \le T, \tag{9}$$

$$h'(t) = -\frac{v_y(1,t)}{h(t)} + \mu_4(t),\ 0 \le t \le T. \tag{10}$$

2. Теорема існування. *Припустимо, що виконуються умови:*

A1) $\mu_i \in C^1[0,T]$, $\mu_i(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $i = 1,2$, $b, c, f \in C([0,\infty) \times [0,T])$, $f(x,t) \geq 0, (x,t) \in [0,\infty) \times [0,T]$, $\mu_i \in C[0,T]$, $i = 3,4$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\exists \lim\limits_{t\to+0} \mu_3(t)t^{-\beta} = M > 0$;

A2) $\varphi \in C^1[0,h_0]$, $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h_0]$, $b, c, f \in H^{\alpha,0}([0,H_1] \times [0,T]), \alpha \in (0,1)$, *де число* H_1 *буде визначено нижче;*

A3) $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h_0) = \mu_2(0)$.

Тоді можна вказати таке число $T_0 : 0 < T_0 \leq T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок* $(a,h,v) \in C[0,T_0] \times C^1[0,T_0] \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$ *задачі (6)-(10) такий, що* $h(t) > 0, t \in [0,T]$, $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$ *та існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} a(t) \times \times t^{-\beta} > 0$.

Доведення. Замінимо задачу (6)-(10) еквівалентною системою рівнянь. Позначивши $\omega(y,t) = v_y(y,t)$, з умови (10) маємо

$$h'(t) = -\frac{\omega(1,t)}{h(t)} + \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Припустимо тимчасово, що функції $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $h(t) > 0, t \in [0,T]$ відомі. Тоді пряма задача (6)-(8) еквівалентна наступній системі інтегральних рівнянь:

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \times \left(\left(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)h(\tau) - \eta\omega(1,\tau)}{h^2(\tau)} + \frac{\eta\mu_4(\tau))}{h(\tau)}\right)\omega(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau) \times v(\eta,\tau)\right) d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{12}$$

$$\omega(y,t) = v_{0y}(y,t) + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \times \left(\left(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)h(\tau) - \eta\omega(1,\tau)}{h^2(\tau)} + \frac{\eta\mu_4(\tau))}{h(\tau)}\right)\omega(\eta,\tau) + c(\eta h(\tau),\tau) \times v(\eta,\tau)\right) d\eta d\tau,\ (y,t) \in \overline{Q}_T, \tag{13}$$

де $v_0(y,t)$ – роз'язок рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)} v_{yy} + f(yh(t),t), \tag{14}$$

який задовольняє умови (7), (8). Він має наступний вигляд:

$$v_0(y,t) = \int_0^1 G_1(y,t,\eta,0)\,\varphi(\eta h_0)d\eta + \int_0^t G_{1\eta}(y,t,0,\tau)\,\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau - \int_0^t \frac{a(\tau)}{h^2(\tau)} \times G_{1\eta}(y,t,1,\tau)\mu_2(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_1(y,t,\eta,\tau) \times f(\eta h(\tau),\tau)d\eta d\tau. \tag{15}$$

Продиференціювавши (15), знаходимо

$$v_{0y}(y,t) = h_0 \int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta - \int_0^t G_2(y,t,0,\tau)\,\mu_1'(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(y,t,1,\tau) \times \mu_2'(\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau) \times f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{16}$$

Через $G_k(y,t,\eta,\tau)$, $k = 1,2$ позначено функції Гріна відповідно першої ($k = 1$) та другої ($k = 2$) крайових задач для рівняння (14). Вони мають вигляд:

$$G_k(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t) - \theta(\tau))}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(y+\eta+2n)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),$$

$$\theta(t)=\int_0^t\frac{a(\tau)}{h^2(\tau)}d\tau, \qquad k=1,2.$$

З умови (9), враховуючи введені позначення, отримуємо

$$a(t)\omega(0,t)=\mu_3(t)h(t), \qquad t\in[0,T]. \quad (17)$$

Проінтегрувавши (11) за змінною t, одержуємо

$$h(t) = h_0+\int_0^t\mu_4(\tau)d\tau- -\int_0^t\frac{\omega(1,t)}{h(\tau)}d\tau, \quad t\in[0,T]. \ (18)$$

Таким чином, задачу (6)-(10) зведено до системи рівнянь (12), (13), (17), (18) з невідомими $(a(t),h(t),v(y,t),\omega(y,t))$. Задача (6)-(10) та вказана система еквівалентні в тому сенсі, що, якщо трійка функцій $(a(t),h(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10), то $(a(t),h(t),v(y,t),\omega(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (12), (13), (17), (18). Правильним є і обернене твердження: якщо $(a(t),h(t),v(y,t),\omega(y,t))$ є неперервним розв'язком системи (12), (13), (17), (18), то функції $(a(t),h(t),v(y,t))$ є розв'язком задачі (6)-(10). Для цього достатньо довести, що ці функції належать класу $C[0,T]\times \times C^1[0,T]\times C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (6)-(10).

Отже, нехай $(a,h,v,\omega)\in(C[0,T])^2\times \times(C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи (12), (13), (17), (18). Припущення теореми дозволяють продиференціювати рівність (12) по y. Праві частини отриманої рівності і рівності (13) співпадають, тому $\omega(y,t)=v_y(y,t)$. На підставі (12) робимо висновок, що $v(y,t)$ має потрібну гладкість, задовольняє рівняння

$$v_t = \frac{a(t)}{h^2(t)}v_{yy}+\left(\frac{b(yh(t),t)+y\mu_4(t)}{h(t)}-\right. \left.-\frac{yv_y(1,t)}{h^2(t)}\right)v_y+c(yh(t),t)v+ +f(yh(t),t) \quad (19)$$

і умови (7), (8) для довільних неперервних на $[0,T]$ функцій $a(t),h(t)$.

Оскільки $v\in C^{2,1}(Q_T)\cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, то з (18) $h\in C^1[0,T]$ і виконується рівність (10). Враховуючи це в (19), приходимо до рівняння (6). Умова (17) співпадає при цьому з умовою (9).

Таким чином, еквівалентність задачі (6)-(10) та системи (12), (13), (17), (18) доведено. Для дослідження отриманої системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Використовуючи принцип максимуму [7, с.25] для розв'язку задачі (6)-(8), отримуємо

$$v(y,t)\geq C_1\min\{\min_{[0,h_0]}\varphi(x),\min_{[0,T]}\mu_1(t), \min_{[0,T]}\mu_2(t)\}\equiv M_0>0,(y,t)\in\overline{Q}_T. \quad (20)$$

Розглянемо рівняння (13). Оскільки $\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)d\eta = 1$, то, згідно з умовою (A2) теореми, матимемо додатність першого доданка (16), всі інші доданки (13) та (16) при $t\to 0$ прямують до нуля. Таким чином, існує таке число $t_1: 0<t_1\leq T$, яке визначається нерівністю

$$\frac{h_0}{2}\int_0^1 G_2(y,t,\eta,0)\,\varphi'(\eta h_0)d\eta\geq\int_0^t\mu_1'(\tau)\times$$

$$\times G_2(y,t,0,\tau)d\tau-\int_0^t G_2(y,t,1,\tau)\,\mu_2'(\tau)\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta\,d\tau-$$

$$-\int_0^t\int_0^1 G_{1y}(y,t,\eta,\tau)\Bigg(\Bigg(\frac{b(\eta h(\tau),\tau)}{h(\tau)}-$$

$$-\frac{\eta(\omega(1,\tau)-\mu_4(\tau)h(\tau))}{h^2(\tau)}\Bigg)\omega(\eta,\tau)+$$

$$+c(\eta h(\tau),\tau)v(\eta,\tau)\Bigg)d\eta d\tau, \qquad (21)$$

що

$$\omega(y,t) \geq \frac{h_0}{2}\min_{[0,1]}\varphi'(yh_0)\equiv M_1>0, \quad t\in[0,t_1]. \qquad (22)$$

Оскільки третій доданок правої частини рівності (18) від'ємний згідно з (22), то для $h(t)$ отримуємо оцінку

$$h(t)\leq h_0+T\max_{[0,T]}\mu_4(t)\equiv H_1,\ t\in[0,T]. \qquad (23)$$

Оцінимо функцію $v(y,t)$ зверху. Знову застосовуючи принцип максимуму, одержуємо:

$$v(y,t) \leq C_2\max\{\max_{[0,h_0]}\varphi(x),\max_{[0,T]}\mu_1(t), \max_{[0,T]}\mu_2(t),\max_{[0,H_1]\times[0,T]}f(x,t)\}\equiv \equiv M_2<\infty,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (24)$$

З умови (17), враховуючи оцінки (22), (23) та припущення (A1) теореми, знаходимо

$$a(t)\leq\frac{H_1\mu_3(t)}{M_1}\leq A_1t^\beta,\ t\in[0,t_1]. \qquad (25)$$

Оскільки інтеграли в правій частині рівності (18) прямують до нуля при $t\to 0$, то існує таке число $t_2:0<t_2<T$, яке визначається нерівністю

$$\frac{h_0}{2}+\int_0^t\mu_4(\tau)d\tau- -\int_0^t\frac{\omega(1,\tau)}{h(\tau)}d\tau\geq 0,\ t\in[0,t_2], \qquad (26)$$

що для функції $h(t)$ правильна оцінка

$$h(t)\geq\frac{h_0}{2}\equiv H_0,\ t\in[0,t_2]. \qquad (27)$$

Позначимо $W(t)=\max\limits_{y\in[0,1]}|\omega(y,t)|$. Враховуючи (13), (16) та оцінки функції Гріна

$$G_2(y,t,\eta,\tau)\leq C_3\Bigg(1+\frac{1}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\Bigg),$$

$$\int_0^1|G_{1y}(y,t,\eta,\tau)|d\eta\leq\frac{C_4}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

приходимо до нерівності

$$W(t) \leq C_5+C_6\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}+ +C_7\int_0^t\frac{W(\tau)+W^2(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}d\tau. \qquad (28)$$

Введемо позначення $W_1(t)=W(t)+1$, $a_0(t)=\dfrac{a(t)}{t^\beta}$, $a_{min}(t)=\min\limits_{0\leq\tau\leq t}a_0(\tau)$. Згадуючи вигляд функції $\theta(t)$, знаходимо

$$\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\leq\frac{C_8}{\sqrt{a_{min}(t)}t^{\frac{\beta}{2}}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}= =\frac{C_9t^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}}.$$

Враховуючи це в нерівності (28), отримуємо

$$W_1(t) \leq C_{10}+\frac{C_{11}t^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+\frac{C_{12}}{t^{\frac{\beta}{2}}\sqrt{a_{min}(t)}}\times \times\int_0^t\frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (29)$$

Обидві частини нерівності (29) піднесемо до квадрату, використовуючи при цьому нерівності Коші та Коші-Буняковського:

$$W_1^2(t)\leq 2C_{10}^2+\frac{2{C_{11}}^2t^{1-\beta}}{a_{min}(t)}+\frac{2{C_{12}}^2t^{\frac{1}{2}-\beta}}{a_{min}(t)}\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau,\ t\in[0,t_2].$$

В останній нерівності змінимо t на σ і, домноживши на $\dfrac{1}{\sqrt{t-\sigma}}$, проінтегруємо її по σ від 0 до t. Одержимо

$$\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma\le 4C_{10}^2t^{\frac12}+\frac{4C_{11}^2t^{\frac32-\beta}}{a_{min}(t)}+\frac{2C_{12}^2}{a_{min}(t)}\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{\sigma^{\frac12-\beta}}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\tau)}{\sqrt{\sigma-\tau}}d\tau.$$

Змінюючи порядок інтегрування в останньому доданку і враховуючи рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{d\sigma}{\sqrt{(t-\sigma)(\sigma-\tau)}}=\pi,$$

знаходимо

$$\int\limits_0^t \frac{W_1^2(\sigma)}{\sqrt{t-\sigma}}d\sigma\le C_{13}\sqrt{t}+\frac{C_{14}t^{\frac32-\beta}}{a_{min}(t)}+\frac{C_{15}\sqrt{t}}{a_{min}(t)}\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.$$

Останню нерівність підставимо в (29). Отримаємо

$$W_1(t)\le C_{10}+\frac{C_{16}t^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+\frac{C_{17}t^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(t)}+$$

$$+\frac{C_{18}}{a_{min}^{3/2}(t)}\int\limits_0^t \frac{W_1^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau,\ t\in[0,t_2].\quad(30)$$

Позначимо

$$\Phi(t)=C_{10}+\frac{C_{16}t^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}}+\frac{C_{17}t^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(t)},\quad(31)$$

$$\Psi(t)=\frac{C_{18}}{a_{min}^{3/2}(t)},\quad(32)$$

$$H(t)=\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}+\int\limits_0^t \frac{W^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau.\quad(33)$$

Тоді з (30) маємо

$$\frac{W_1(t)}{\Psi(t)}\le H(t).\quad(34)$$

Продиференціювавши (33) за часом та врахувавши (34), одержуємо

$$H'(t)\le\left(\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\right)'+\frac{\Psi^4(t)}{t^\beta}H^4(t).\quad(35)$$

Останню нерівність розділимо на $H^4(t)$ і проінтегруємо її від 0 до t. Матимемо

$$\frac{1}{3H^3(0)}-\frac{1}{3H^3(t)}\le\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\frac{1}{H^4(t)}-\frac{\Phi(0)}{\Psi(0)}\frac{1}{H^4(0)}+$$

$$+4\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau+\int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau,$$

звідки

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)}\Bigg(4-3H^3(0)\Bigg(4\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\Bigg)\Bigg)\le\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}+\frac{H(t)}{3},\quad(36)$$

де $H(0)=\dfrac{\Phi(0)}{\Psi(0)}$. В інтегралі $\displaystyle\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau$ зробимо заміну $\sigma=H(\tau)$. Отримаємо

$$\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)}{\Psi(\tau)}\frac{H'(\tau)}{H^5(\tau)}d\tau=\int\limits_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5},$$

де $H^{-1}(\sigma)$ - обернена функція до $H(t)$.

Оскільки $\displaystyle 4\int\limits_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5}+$ $\displaystyle+\int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\to 0$, коли $t\to 0$, то існує таке число $t_3 : 0 < t_3 \le T$, що

$$4 - 3H^3(0)\left(4\int\limits_{H(0)}^{H(t)} \frac{\Phi(H^{-1}(\sigma))}{\Psi(H^{-1}(\sigma))}\frac{d\sigma}{\sigma^5} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\tau)}{\tau^\beta}d\tau\right) \ge 1, \qquad t \in [0, t_3]. \qquad (37)$$

Тоді з (36) випливає нерівність

$$\frac{H^4(t)}{3H^3(0)} \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + \frac{H(t)}{3}, \qquad t \in [0, t_3],$$

або

$$H^4(t) \le \frac{3\Phi(t)}{\Psi(t)}H^3(0) + H^3(0)H(t),\ t \in [0, t_3].$$

Використовуючи це в (35), знаходимо

$$H'(t) \le \left(\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}\right)' + \frac{\Psi^4(t)}{t^\beta}H^3(0)H(t) +$$

$$+ \frac{3\Psi^3(t)}{t^\beta}\Phi(t)H^3(0).$$

Останню нерівність домножимо на $\exp\left(-H^3(0)\int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}d\sigma\right)$ і проінтегруємо її. Отримаємо

$$H(t) \le \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} + 4H^3(0)\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)}{\tau^\beta}\times$$

$$\times \exp\left(H^3(0)\int\limits_\tau^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}d\sigma\right)d\tau.$$

Тоді з (34) маємо

$$W_1(t) \le \Phi(t) + 4H^3(0)\Psi(t)\times$$

$$\times \exp\left(H^3(0)\int\limits_0^t \frac{\Psi^4(\sigma)}{\sigma^\beta}d\sigma\right)\int\limits_0^t \frac{\Phi(\tau)\Psi^3(\tau)}{\tau^\beta}d\tau,$$

або, враховуючи (31), (32),

$$W_1(t) \le C_{10} + \frac{C_{16}t^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}} + \frac{C_{17}t^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(t)} +$$

$$+ \frac{C_{19}}{a_{min}^{3/2}(t)}\exp\left(C_{20}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{min}^6(\sigma)}\right)\times$$

$$\times \int\limits_0^t \left(C_{10} + \frac{C_{16}\tau^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(\tau)}} + \frac{C_{17}\tau^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(\tau)}\right)\times$$

$$\times \frac{1}{\tau^\beta a_{min}^{9/2}(\tau)}d\tau,\ t \in [0, t_3]. \qquad (38)$$

З умови перевизначення (17) знаходимо

$$a_{min}(t) \ge \frac{C_{21}}{W_1(t)},$$

або, беручи до уваги (38),

$$C_{10}a_{min}(t) + C_{16}\sqrt{a_{min}(t)}t^{\frac{1-\beta}{2}} + \frac{C_{17}t^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}} +$$

$$+ \frac{C_{19}}{\sqrt{a_{min}(t)}}\exp\left(C_{20}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{min}^6(\sigma)}\right)\times$$

$$\times \int\limits_0^t \left(C_{10} + \frac{C_{16}\tau^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(\tau)}} + \frac{C_{17}\tau^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(\tau)}\right)\times$$

$$\times \frac{1}{\tau^\beta a_{min}^{9/2}(\tau)}d\tau - C_{21} \ge 0,\ t \in [0, t_3]. \qquad (39)$$

Оскільки

$$K(t) = C_{16}\sqrt{a_{min}(t)}t^{\frac{1-\beta}{2}} + \frac{C_{17}t^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{\sqrt{a_{min}(t)}} +$$

$$+ \frac{C_{19}}{\sqrt{a_{min}(t)}}\exp\left(C_{20}\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^\beta a_{min}^6(\sigma)}\right)\int\limits_0^t \left(C_{10} + \right.$$

$$\left. + \frac{C_{16}\tau^{\frac{1-\beta}{2}}}{\sqrt{a_{min}(\tau)}} + \frac{C_{17}\tau^{\frac{3(1-\beta)}{2}}}{a_{min}^{3/2}(\tau)}\right)\frac{1}{\tau^\beta a_{min}^{9/2}(\tau)}d\tau \to 0,$$

при $t \to 0$, то існує таке число $t_4 : 0 < t_4 \le T$, що

$$K(t) \le \frac{C_{21}}{2}, \qquad t \in [0, t_4]. \qquad (40)$$

Тоді з нерівності (39) знаходимо

$$C_{10}a_{min}(t) - \frac{C_{21}}{2} \geq 0, \qquad t \in [0, t_4],$$

звідки

$$a_{min}(t) \geq \frac{C_{22}}{2C_{10}} \equiv A_0 > 0,$$

або, враховуючи введені позначення,

$$a(t) \geq A_0 t^\beta, \; t \in [0, t_4]. \tag{41}$$

Використовуючи останню оцінку в (38), отримуємо

$$|\omega(y,t)| \leq M_3, \; t \in [0, t_4], \; y \in [0,1]. \tag{42}$$

Таким чином, оцінки розв'язків системи (12), (13), (17), (18) встановлено.

Доведемо існування границі $\lim\limits_{t\to+0} \frac{a(t)}{t^\beta} > 0$. З умов теореми випливає, що

$$\lim_{t\to+0} v_y(0,t) = \lim_{t\to+0} h_0 \int\limits_0^1 G_2(0,t,\eta,0)\times$$

$$\times\varphi'(\eta h_0)d\eta = h_0\varphi'(0).$$

Тоді

$$\lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta} = \lim_{t\to+0}\frac{\mu_3(t)h(t)}{t^\beta v_y(0,t)} = \frac{M}{\varphi'(0)} > 0.$$

Визначимо множину $N = \{(a,h,v,\omega) \in (C[0,T_0])^2 \times (C(\overline{Q}_{T_0}))^2 : 0 < A_0 \leq \frac{a(t)}{t^\beta} \leq \leq A_1 < \infty, 0 < H_0 \leq h(t) \leq H_1 < < \infty, 0 < M_0 \leq v(y,t) \leq M_2 < \infty, |\omega(y,t)| \leq \leq M_3 < \infty\}$, де $T_0 = \min\{t_1,t_2,t_3,t_4\}$. Систему (12), (13), (17), (18) подамо у вигляді операторного рівняння $w = Pw$, де $w = = (a(t), h(t), v(y,t), \omega(y,t))$, а оператор P визначається правими частинами рівнянь (12), (13), (17), (18). Очевидно, що множина N задовольняє умови теореми Шаудера. Те, що оператор P цілком неперервний, доводиться аналогічно як в [2] і [8]. Тоді згідно з теоремою Шаудера існує розв'язок системи рівнянь (12), (13), (17), (18), а, отже, і розв'язок задачі (6)-(10) при $t \in [0, T_0], \; y \in [0,1]$.

Зауважимо, що підставивши знайдені оцінки функцій $a(t), h(t), v(y,t), \omega(y,t)$ в нерівності (21), (26), (37) та (40), отримаємо обмеження на числа $t_i, \; i = \overline{1,4}$, котрі визначаються вихідними даними задачі (6)-(10).

3. Теорема єдиності. *Припустимо, що виконуються умови:*

B1) $b, c, f \in C^{1,0}([0,\infty) \times [0,T])$, $\varphi \in C^2[0,h_0], \; \mu_i \in C^1[0,T], \; i = 1,2;$

B2) $\frac{\mu_3(t)}{t^\beta} \neq 0, \; t \in [0,T]$.

Тоді розв'язок (a,h,v) *задачі (6)-(10), такий, що* $h(t) > 0, t \in [0,T]$, $a(t) > 0, t \in (0,T]$ *та існує скінченна границя* $\lim\limits_{t\to+0} a(t)t^\beta > 0, 0 < \beta < 1$, *єдиний у класі* $C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. Нехай $(a_i(t), h_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1,2$ – два розв'язки задачі (6)-(10). Позначимо

$$r_i(t) = \frac{a_i(t)}{h_i^2(t)}, \; i = 1,2, \quad r(t) = r_1(t) - r_2(t),$$

$$h(t) = h_1(t) - h_2(t), \; v(y,t) = v_1(y,t) - v_2(y,t).$$

Вказані різниці задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} v_t \; = \; & r_2(t)v_{yy} + \Bigg(\frac{b(yh_2(t),t)}{h_2(t)} - \frac{yv_{2y}(1,t)}{h_2^2(t)} + \\ & + \frac{y\mu_4(t)}{h_2(t)}\Bigg)v_y + c(yh_2(t),t)v + r(t)v_{1yy} + \\ & + \Bigg(\frac{b(yh_1(t),t) - b(yh_2(t),t)}{h_1(t)} + \\ & + b(yh_2(t),t)\left(\frac{1}{h_1(t)} - \frac{1}{h_2(t)}\right) - y \times \\ & \times\left(\frac{v_{1y}(1,t)}{h_1^2(t)} - \frac{v_{2y}(1,t)}{h_1^2(t)} + v_{2y}(1,t) \times \right. \\ & \times\left(\frac{1}{h_1^2(t)} - \frac{1}{h_2^2(t)}\right) - \mu_4(t)\Bigg(\frac{1}{h_1(t)} - \\ & \left.\left. - \frac{1}{h_2(t)}\Bigg)\right)\right)v_{1y} + (c(yh_1(t),t) - \\ & - c(yh_2(t),t))v_1 + f(yh_1(t),t) - \\ & - f(yh_2(t),t), \; (y,t) \in Q_T \end{aligned} \tag{43}$$

та умови

$$v(y,0) = 0, \; y \in [0,1], \tag{44}$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{45}$$

$$r(t)v_{1y}(0,t)+r_2(t)v_y(0,t)=$$
$$=\mu_3(t)\left(\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}\right),\ t\in[0,T]. \tag{46}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(y,t,\eta,\tau)$ для рівняння

$$v_t=r_2(t)v_{yy}+\left(\frac{b(yh_2(t),t)+y\mu_4(t)}{h_2(t)}-\right.$$
$$\left.-\frac{yv_{2y}(1,t)}{h_2^2(t)}\right)v_y+c(yh_2(t),t)v$$

розв'язок задачі (43)-(45) подамо у вигляді

$$v(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_1^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta}+$$
$$+\Bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{h_2(\tau)}\bigg)b(\eta h_2(\tau),\tau)-\bigg(v_{2\eta}(1,\tau)\bigg(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\bigg)+\frac{v_{1\eta}(1,\tau)-v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\mu_4(\tau)\times$$
$$\times\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\bigg)\bigg)\Bigg)\eta v_{1\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-$$
$$-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1+f(\eta h_1(\tau),\tau)-$$
$$\left.-f(\eta h_2(\tau),\tau)\right)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{47}$$

Продиференціювавши (47) по y, отримаємо

$$v_y(y,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1y}^*(y,t,\eta,\tau)\Bigg(r(\tau)v_{1\eta\eta}+$$
$$+\Bigg(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)-b(\eta h_2(\tau),\tau)}{h_1(\tau)}+\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{h_2(\tau)}\bigg)b(\eta h_2(\tau),\tau)-\bigg(v_{2\eta}(1,\tau)\bigg(\frac{1}{h_1^2(\tau)}-$$
$$-\frac{1}{h_2^2(\tau)}\bigg)+\frac{v_{1\eta}(1,\tau)-v_{2\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)}-\mu_4(\tau)\times$$
$$\times\bigg(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\bigg)\bigg)\Bigg)\eta v_{1\eta}+(c(\eta h_1(\tau),\tau)-$$
$$-c(\eta h_2(\tau),\tau))v_1+f(\eta h_1(\tau),\tau)-$$
$$\left.-f(\eta h_2(\tau),\tau)\right)d\eta d\tau,\ (y,t)\in\overline{Q}_T. \tag{48}$$

Оскільки $(a_i(t),h_i(t),v_i(y,t))$, $i=1,2$ – розв'язки задачі (6)-(10), то для $h_i(t)$, $i=1,2$ справджуються рівності, аналогічні (18). Віднявши їх, отримаємо

$$h(t)=-\int\limits_0^t\frac{v_y(1,\tau)}{h_1(\tau)}d\tau-\int\limits_0^t v_{2y}(1,\tau)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{h_1(\tau)}-\frac{1}{h_2(\tau)}\right)d\tau. \tag{49}$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{h_1(t)}-\frac{1}{h_2(t)}=-\frac{h(t)}{h_1(t)h_2(t)}, \tag{50}$$

$$\frac{1}{h_1^2(t)}-\frac{1}{h_2^2(t)}=-\frac{h(t)(h_1(t)+h_2(t))}{h_1(t)h_2(t)}. \tag{51}$$

Припущення $(B1)$ теореми забезпечує правильність перетворення

$$f(yh_1(t),t)-f(yh_2(t),t)=y(h_1(t)-h_2(t))\times$$
$$\times\int\limits_0^1 f_x(y(h_2(t)+\sigma(h_1(t)-h_2(t))),t)d\sigma. \tag{52}$$

Аналогічні перетворення виконуються для функцій $b(y,t)$ та $c(y,t)$.

Знайдемо поведінку функції $v_{1yy}(y,t)$. Позначимо через $G_k^{(1)}(y,t,\eta,\tau)$, $k=1,2$ функції Гріна для рівняння

$$v_{1t}=\frac{a_1(t)}{h_1^2(t)}v_{1yy}$$

з крайовими умовами відповідно першого та другого роду. Розв'язок $v_1(y,t)$ задачі (6)-(8) подамо у вигляді (12). Продиференціюємо його двічі за змінною y. Інтегруючи частинами та використовуючи властивості функції Гріна, отримуємо

$$v_{1yy}(y,t) = h_0^2 \int\limits_0^1 G_1^{(1)}(y,t,\eta,0)\,\varphi''(\eta h_0)d\eta +$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)\Big(\mu_1'(\tau) - f(0,\tau) -$$

$$-\frac{b(0,\tau)}{h_1(\tau)} v_{1\eta}(0,\tau) - c(0,\tau)\mu_1(\tau)\Big)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\eta}^{(1)}(y,t,1,\tau)\Big(\mu_2'(\tau) - f(h_1(\tau),\tau) +$$

$$+\Big(\frac{v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)} - \frac{b(h_1(\tau),\tau)+\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)}\Big)\times$$

$$\times v_{1\eta}(1,\tau) - c(h_1(\tau),\tau)\mu_2(\tau)\Big)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\Big(h_1(\tau)f_\eta(\eta h_1(\tau),\tau) -$$

$$-\Big(\frac{v_{1\eta}(1,\tau)}{h_1^2(\tau)} + \frac{\mu_4(\tau)}{h_1(\tau)} + b_\eta(\eta h_1(\tau),\tau) +$$

$$+c(\eta h_1(\tau),\tau)\Big)v_{1\eta}(\eta,\tau) + h_1(\tau)\times$$

$$\times c_\eta(\eta h_1(\tau),\tau)v_1(\eta,\tau)\Big)d\eta d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\Big(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)} -$$

$$-\frac{\eta(v_{1\eta}(1,\tau)-\mu_4(\tau)h_1(\tau))}{h_1^2(\tau)}\Big)v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)\times$$

$$\times d\eta d\tau = \sum_{i=1}^4 I_i - \int\limits_0^t\int\limits_0^1 G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)\times$$

$$\times\Big(\frac{b(\eta h_1(\tau),\tau)}{h_1(\tau)} - \frac{\eta(v_{1\eta}(1,\tau)-\mu_4(\tau)h_1(\tau))}{h_1^2(\tau)}\Big)\times$$

$$\times v_{1\eta\eta}(\eta,\tau)d\eta d\tau,\ (y,t)\in Q_T. \qquad (53)$$

Оцінимо кожен з доданків інтегрального рівняння (53). Застосовуючи нерівність $G_1^{(1)}(y,t,\eta,0) < G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)$ до I_1, отримуємо

$$|I_1| \le h_0^2 \max_{y\in[0,1]} |\varphi''(yh_0)| \int\limits_0^1 G_2^{(1)}(y,t,\eta,0)d\eta \le$$

$$\le C_{23}.$$

Для оцінки I_2 використаємо вигляд функції $G_{1\eta}(y,t,\eta,\tau)$:

$$|I_2| \le C_{24}\int\limits_0^t |G_{1\eta}^{(1)}(y,t,0,\tau)|d\tau \le C_{25}t^{-\frac{3\beta+1}{2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^1 z^{-\frac{2}{3}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|y+2n|\times$$

$$\times\exp\Big(-\frac{C_{26}(y+2n)^2}{t^{1+\beta}z}\Big)dz.$$

Вводячи нову змінну $\sigma = \sqrt{\frac{C_{25}}{t^{1+\beta}z}}(y+2n)$, приходимо до нерівності

$$|I_2| \le \frac{C_{27}}{t^\beta}.$$

Аналогічно $|I_3| \le \frac{C_{28}}{t^\beta}$. Для I_4 запишемо

$$|I_4| \le C_{29}\int\limits_0^t\int\limits_0^1 |G_{1\eta}^{(1)}(y,t,\eta,\tau)|d\eta d\tau \le$$

$$\le C_{30}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_1(t)-\theta_1(\tau)}} \le C_{31}\times$$

$$\times\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}} \le C_{32}t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже,

$$\sum_{i=1}^4 |I_i| \le \frac{C_{33}}{t^\beta}. \qquad (54)$$

З оцінки для I_4 випливає, що ядро інтегрального рівняння (53) має інтегровну особливість. Тоді, враховуючи (54), отримуємо наступну оцінку для функції $v_{1yy}(y,t)$:

$$|v_{1yy}(y,t)| \leq \frac{C_{34}}{t^{\beta}}. \tag{55}$$

Підставивши (48), (50)-(52) в (46), (49) та беручи до уваги нерівність (55), отримаємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду відносно невідомих $r(t), h(t)$ з ядрами, що мають інтегровні особливості. З єдиності розв'язку таких систем одержуємо

$$r(t) \equiv 0, \quad h(t) \equiv 0, \ t \in [0,T],$$

або згідно з введеними позначеннями

$$a_1(t) \equiv a_2(t), \quad h_1(t) \equiv h_2(t), \quad t \in [0,T].$$

Використовуючи це в задачі (43)-(45), знаходимо

$$v_1(y,t) \equiv v_2(y,t), \quad (y,t) \in \overline{Q}_T,$$

що й завершує доведення теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.

2. *Салдіна Н.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех. - мат. — 2005.— Вип. 64. — С. 245—257.

3. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравне- ния // Применение методов функц. анал. в уравнениях мат. физ.— Новосибирск.— 1987.— С. 66—71.

4. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Известия АН КазССР. Серия физ.-мат.— 1987.— №3.— С. 27—29.

5. *Іванчов М.І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн.— 2003.— **55**, №7.— С. 901—910.

6. *Lorenzi L.* An identification problem for a one-phase Stefan problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. — 2001.— Vol. 9, №6.— P. 1—27.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.

8. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type.— Lviv: VNTL Publishers, 2003.

Стаття надійшла до редколегії 18.07.2006