УДК 517.956.4

©2006 р. Т.І. Готинчан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ІСНУВАННЯ ОБЛАСТІ, В ЯКІЙ ЗБЕРІГАЮТЬСЯ ОЦІНКИ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ДЕЯКИХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Описано область комплексної площини, на яку поширюються оцінки з дійсної осі цілих однозначних функцій спеціального вигляду, зокрема, елементів та мультиплікаторів простору W_M^Ω.

The domain of complex plane is described. The estimations of entire single-valued functions of special form (for example, elements and multiplicators of W_M^Ω-space) from real axe are kept on abovementioned domain.

У праці [1], використовуючи теорему Фрагмена-Ліндельофа у випадку кута, для цілих функцій експоненціального зростання порядку p й скінченного типу була побудована область комплексної площини, в якій зберігаються оцінки з дійсної осі для зазначених функцій. За допомогою цієї методики можна узагальнити отриманий результат на випадок цілих однозначних функцій спеціального вигляду, зокрема, елементів та мультиплікаторів простору W_M^Ω [1].

Розглянемо функцію ω: $[0,+\infty) \to \to [0,+\infty)$, яка є неперервною і монотонно зростаючою, причому $\omega(0) = 0$, $\omega(1) > 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \omega(t) = +\infty$. Для $x \geq 0$ розглянемо $\Omega(x) = \int\limits_0^x \omega(\eta)d\eta$. Функція Ω є диференційовною, монотонно зростаючою, опуклою вниз на $[0,+\infty)$, причому $\Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \Omega(t) = +\infty$. Довизначимо парним чином її на $(-\infty, 0]$.

Розглянемо також функції μ та M, які мають ті самі властивості, що й функції ω і Ω відповідно. За функціями M, Ω можна, зокрема, побудувати основні простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ [2]:

$$(\varphi \in W_M) \iff \exists a > 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \exists C_n > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : |\varphi^{(n)}(x)| \leq C_n e^{-M(ax)};$$

$$(\varphi \in W^\Omega) \iff \exists b > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists C_k > 0$$

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |z^k \varphi(z)| \leq C_k e^{\Omega(by)};$$

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \iff \exists a > 0 \ \exists b > 0 \ \exists C > 0$$

$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq C e^{-M(ax)+\Omega(by)}.$$

У праці [3] доведено, що $W_M^\Omega = W_M \bigcap W^\Omega$ і простір W_M^Ω є нетривіальним тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\exists C_0 > 0 \ \exists d > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+ :$$

$$\Omega(x) \geq C_0 M(dx) \qquad (1).$$

Надалі розглядатимемо функції Ω і M, які задовольняють умови (1) і

$$\exists \tilde{C}_0 > 0 \ \exists v > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+ : \Omega(x) \leq \tilde{C}_0 e^{vx}.$$

Правильне твердження.

Теорема. *Якщо ціла функція задовольняє умови:*

$$\exists C_1 > 0 \ \exists b > 0 \forall z \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq C_1 e^{\Omega(b|z|)}; \qquad (2)$$

$$\exists C_2 > 0 \ \exists a > 0 \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi(x)| \leq C_2 e^{-M(ax)}, \qquad (3)$$

то існує область $G \equiv \left\{ z = x+iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; |y| \le L\dfrac{M(a|x|+1)}{\Omega'(b|x|+1)},\ L>0 \right\}$, *в якій виконується нерівність*

$$|f(z)| \le C_3 e^{-M(\tilde{a}x)},\ C_3 \ge \max\{C_1, C_2\},$$

причому сталу $\tilde{a}$ *(*$0<\tilde{a}<a$*) можна вибрати як завгодно близькою до* a.

Доведення. Розглянемо спочатку частину комплексної площини $\mathbb{C}_{++} \equiv \{z = x+iy,\ x \ge x_0 > 0,\ y \ge 0\}$. Для неперервної функції g можна побудувати аналітичну в $\mathbb{C}_{++}$ функцію g_a таку, що $|g(x) - g_a(x)| \le C$, $x \ge x_0$ [4]. Тому без обмеження загальності можна вважати, що функції M і Ω такі, що продовжуються аналітично в $\mathbb{C}_{++}$. Тоді, наприклад, для функції Ω в $\mathbb{C}_{++}$ правильний розклад

$$\Omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Omega^{(k)}(x)}{k!}(iy)^k,\ 0<|y|<x,$$

причому

$$Re\Omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\Omega^{(2k)}(x)}{(2k)!}y^{2k},$$

$$Im\Omega(z) = y\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\Omega^{(2k+1)}(x)}{(2k+1)!}y^{2k}.$$

Зауважимо, що для функції $g \in C^k((0,+\infty))$, $g(0)=0$, правильне співвідношення

$$\int_0^t x^l g^{(k)}(x)dx = t^l g^{(k-1)}(t) - $$

$$-l\int_0^t x^{l-1}g^{(k-1)}(x)dx,\ t>0,\ k\ge 1,\ l \ge 1.$$

Зокрема, для $l=1$, $k=2$ маємо

$$tg'(t) = \int_0^t xg^{(2)}(x)dx + \int_0^t g'(x)dx =$$

$$= \int_0^t xg^{(2)}(x)dx + g(t),\ t>0.$$

Якщо для функції g її друга похідна $g^{(2)}(x) > 0$, $x>0$, то для неї правильна нерівність

$$g(t) < tg'(t),\ t>0. \tag{4}$$

Зазначимо, що функції M і Ω задовольняють нерівність (4).

Розглянемо аналітичну в $\mathbb{C}_{++}$ функцію

$$\tilde{f}(z) = f(z)e^{M(az)}e^{i\Omega(\tilde{b}z)},$$

де $\tilde{b}>0$ – деяка стала.

Для $x>0$ з врахуванням (3) одержуємо

$$|\tilde{f}(x)| = |f(x)|e^{M(ax)}|e^{i\Omega(\tilde{b}x)}| \le C_2.$$

Враховуючи (2), у $\mathbb{C}_{++}$ функція $\tilde{f}$ задовольняє нерівність

$$|\tilde{f}(z)| \le C_1 e^{\Omega(b|z|)}e^{ReM(az)}|e^{-Im\Omega(\tilde{b}x)}|.$$

Згідно з (1) і властивістю опуклості вниз функцій M і Ω маємо

$$ReM(az) < |M(az)| \le M(a|z|) \le$$
$$\le (1/C_0)\Omega((a/d)|z|) \le$$
$$\le \Omega(([1/C_0]+1)(a/d)|z|),$$

а тому

$$ReM(az) + \Omega(b|z|) \le \Omega(b_1|z|),$$

де $b_1 = ([1/C_0]+1)(a/d)+b > 0$ – стала.

Оскільки функція Ω' є невід'ємною і зростаючою при $x>0$, то

$$Im\Omega(\tilde{b}z) = \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+\theta y)) > \Omega'(\tilde{b}x)\tilde{b}y,$$
$$0<\theta<1.$$

Розглянемо спочатку випадок, коли функція Ω задовольняє умову

$$\exists p \ge 2\ \exists C_4 \in (0;1]\ \exists C_5 \ge 1\ \forall x>0:$$
$$C_4x^{p-1} < \Omega(x) \le C_5x^p.$$

Тоді існує число $s>0$ таке, що $s < \dfrac{\pi}{2p}$. Розглядатимемо в $\mathbb{C}_{++}$ промінь $z = x+iy$, де

$x = s_0 y$, $s_0 = \mathrm{ctg}(s)$, який разом з додатним напрямком дійсної осі є сторонами кута G_s. Тоді, враховуючи (4), одержуємо, що на цьому промені функція $\tilde{f}$ задовольняє умову

$$|\tilde{f}(z)| \le C_1 e^{\Omega(b_1|z|)} e^{-\Omega'(\tilde{b}x)\tilde{b}y} \le$$

$$\le C_1 e^{\Omega(b_1\sqrt{x^2+y^2})} e^{-\Omega'(\tilde{b}y)\tilde{b}y} \le$$

$$\le C_1 e^{\Omega(b_1 y\sqrt{1+s_0^2})} e^{-\Omega(\tilde{b}y)}.$$

Якщо тепер розглядати $\tilde{b} > b_1\sqrt{1+s_0^2}$, то на зазначеному промені виконується оцінка $|\tilde{f}(z)| \le C_1$. Отже, на сторонах утвореного кута G_s функція $\tilde{f}$ обмежена сталою $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$. У межах цього кута згідно з властивістю опуклості вниз функції Ω отримуємо

$$|\tilde{f}(z)| \le C_1 e^{\Omega(b_1|z|)} e^{|Im\Omega(\tilde{b}z)|} \le$$

$$\le C_1 e^{\Omega(b_1|z|)+|\Omega(\tilde{b}z)|} \le C_1 e^{\Omega((b_1+\tilde{b}z)|z|)}.$$

Згідно з теоремою Фрагмена-Ліндельофа у випадку кута функція $\tilde{f}$ обмежена сталою C_3 й усередині цього кута [5].

Нехай тепер функція Ω задовольняє умову

$$\forall\, p > 1\ \exists\, C_p > 0\ \exists\, v > 0\ \exists\, C_6 > 0$$

$$\forall\, x > 0\ :\ C_p x^p < \Omega(x) \le C_6 e^{e^{vx}}.$$

Тоді існує число $s > 0$ таке, що $s < \dfrac{\pi}{2v}$. Розглядатимемо в $\mathbb{C}_{++}$ смугу $G_s \equiv \{z = x + iy \,|\, x \ge x_0 > 0,\ 0 \le y \le s\}$. Тоді аналогічно до попереднього випадку встановлюємо, що при $x \ge 1$ функція $\tilde{f}$ задовольняє умову

$$|\tilde{f}(x+is)| \le C_1 e^{\Omega(b_1|z|)} e^{-\Omega'(\tilde{b}x)\tilde{b}y} \le$$

$$\le C_1 e^{\Omega(b_1\sqrt{x^2+s^2})} e^{-\Omega'(\tilde{b}x)\tilde{b}x\cdot\frac{s}{x}} \le$$

$$\le C_1 e^{\Omega(b_1 x\sqrt{1+s^2})} e^{-\Omega(\tilde{b}x)\cdot\frac{s}{x}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Omega(x)}{x} = +\infty$, то $\dfrac{\Omega(\tilde{b}x)s}{x} < \Omega(\tilde{b}_\varepsilon x)$, де $\tilde{b}_\varepsilon > \tilde{b}$ – деяка стала.

Отже,

$$|\tilde{f}(x+is)| \le C_1 e^{\Omega(b_1 x\sqrt{1+s^2})-\Omega(\tilde{b}_\varepsilon x)}.$$

Якщо розглядати $\tilde{b}_\varepsilon > b_1\sqrt{1+s^2}$, то на межі $z = x + is$ смуги G_s функція $\tilde{f}$ обмежена сталою $\tilde{C}_1$, де $\tilde{C}_1 > C_1$.

У межах цієї смуги згідно з властивістю опуклості вниз функції Ω для функції $\tilde{f}$ правильна умова

$$|\tilde{f}(z)| \le C_1 e^{\Omega((b_1+\tilde{b}_\varepsilon)|z|)}.$$

Згідно з теоремою Фрагмена-Ліндельофа у випадку смуги функція $\tilde{f}$ обмежена сталою $C_3 = \max\{\tilde{C}_1, C_2\}$ й усередині цієї смуги [5].

Отже, в обох випадках функція $\tilde{f}$ обмежена на G_s сталою.

Розглянемо тепер функцію f, яка через функцію $\tilde{f}$ виразиться так

$$f(z) = \tilde{f}(z) e^{-M(az)} e^{-i\Omega(\tilde{b}z)},$$

а тому

$$|f(z)| \le C_3 e^{-ReM(az)+Im\Omega(\tilde{b}z)}.$$

Знайдемо таку підобласть у G_s, щоб виконувалась нерівність

$$-ReM(az) + Im\Omega(\tilde{b}z) \le -M(\tilde{a}x)$$

з деякою сталою $\tilde{a}$ $(0 < \tilde{a} < a)$.

Оскільки $M^{(2)}(x) > 0$, $x > 0$, то

$$ReM(z) = M(x) - \frac{M^{(2)}(x+\theta_1 y)}{2!} y^2 < M(x),$$

$$0 < \theta_1 < 1.$$

Враховуючи (4) і те, що функції M, Ω, M', Ω' зростаючі, одержуємо

$$-ReM(az) + Im\Omega(\tilde{b}z) =$$

$$= -M(ax) + \frac{M^{(2)}(a(x+\theta_1 y))}{2} a^2 y^2 +$$

$$+ \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+\theta_2 y)) \le$$

$$\le -M(ax) + M(a(x+y)) - M(ax) -$$

$$-M'(ax)ay + \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)) \le$$

$$\leq -2M(ax) + M(a(x+y)) - M(ax)\frac{y}{x} + $$
$$+\tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)).$$

Візьмемо $\tilde{a} < a$ і розглянемо нерівність

$$\tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)) + M(a(x+y)) - M(ax)\frac{y}{x} \leq$$
$$\leq 2M(ax) - M(\tilde{a}x).$$

Множина її розв'язків непорожня, оскільки функції M, M', Ω' неперервні і при $y \to 0+$ отримуємо

$$M(ax) \leq 2M(ax) - M(\tilde{a}x),$$

тобто $M(ax) \geq M(\tilde{a}x)$.

Отже, в підобласті області G_s, верхнею межею якої є

$$\tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)) + M(a(x+y)) - M(ax)\frac{y}{x} =$$
$$= 2M(ax) - M(\tilde{a}x),$$

виконується нерівність

$$|f(z)| \leq C_3 e^{-M(\tilde{a}x)}.$$

Якщо розглядати

$$Ly\Omega'(bx) < \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}x) \leq$$
$$\leq \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)) \leq \tilde{b}y\Omega'(\tilde{b}(x+y)) +$$
$$+M(a(x+y)) - M(ax)\frac{y}{x} \leq$$
$$\leq 2M(ax) - M(\tilde{a}x),$$

тобто

$$Ly\Omega'(bx) \leq 2M(ax) - M(\tilde{a}x),$$

і врахувати, що

$$2M(ax) - M(\tilde{a}x) > M(ax),$$

то в області $\tilde{G} \equiv \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; |y| \leq \leq L\frac{M(ax)}{\Omega'(bx)},\ x \geq x_0 > 0,\ 0 < L = L(a, b, \tilde{a}) \leq \tilde{b} \right\}$ виконується необхідне обмеження для функції f.

Аналогічні дослідження можна провести й у решті трьох чвертях площини $\mathbb{C}$, де за необхідністю замість x і y слід писати $|x|$ і $|y|$.

Згідно з неперервністю функції й в області $G \equiv \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} \;\middle|\; |y| \leq L\frac{M(a|x|+1)}{\Omega'(b|x|+1)},\ L > 0 \right\}$, буде також виконуватись нерівність

$$|f(z)| \leq \tilde{C}_3 e^{-M(\tilde{a}x)},\ \tilde{C}_3 \geq C_3.$$

Зауваження 1. Отже, для елементів з простору W_M^Ω існує область зазначеного вигляду, на яку поширюються оцінки функції з дійсної осі.

Зауваження 2. Теорема правильна також й у випадку заміни умови (3) на умову

$$\exists C_2 > 0\ \exists a > 0 \forall x \in \mathbb{R}:$$
$$|\varphi(x)| \leq C_2 e^{M(ax)}. \qquad (3')$$

Тоді в зазначеній області виконуватиметься оцінка

$$|f(z)| \leq C_3 e^{M(\tilde{a}x)},\ C_3 \geq \max\{C_1, C_2\},$$

де сталу $\tilde{a} > a$ можна вибрати як завгодно близькою до a.

Отже, й для мультиплікаторів простору W_M^Ω існує область зазначеного вигляду, на яку продовжуються оцінки функції з дійсної осі.

Зауваження 3. Якщо $M(x) = x^h$, $\Omega(x) = x^p$, $x \geq 0$, $1 < h \leq p$, то отримані результати збігаються з наведеними у [1].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 308 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 276 с.

3. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С.39 – 44

4. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

5. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 434 с.