УДК 517.956

©2006 р. В.В.Городецький, Н.М.Шевчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРАМИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Розвивається теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами Гельфонда-Леонтьєва: встановлюється розв'язність задачі Коші для таких рівнянь у просторах типу W та просторах узагальнених функцій (аналітичних функціоналів) типу W'.

The theory of the Cauchy problem is developed for the evolutionary equations with Gelfond-Leontjev operators. The solvability of the Cauchy problem is established for such equations on the spaces of type W and on the spaces of generalized functions (analytical functionals) of type W'.

У праці [1] знайдено умови коректної визначеності та неперервності операторів узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W. Відомо, що простори типу W та W' – простори, топологічно спряжені до W, є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними як скінченного, так і нескінченного порядків. У цій роботі встановлюється розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з операторами Гельфонда-Леонтьєва в просторах типу W та просторах узагальнених функцій типу W'.

1. Простори типу W. Нехай $M(x) = \int_0^x \mu(\xi)d\xi$, $\Omega(x) = \int_0^x \omega(\xi)d\xi$, де μ, ω – неперервні зростаючі на $[0,+\infty)$ функції, причому $\mu(0) = \omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mu(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \omega(x) = +\infty$. Функції M, Ω продовжимо на $(-\infty, 0]$ парним чином. Отже, M та Ω – диференційовні, парні на $\mathbb{R}$ функції, зростаючі та опуклі на $[0,\infty)$ (тобто [2], $\forall\{x_1, x_2\} \subset [0,+\infty)$: $M(x_1) + M(x_2) \le M(x_1 + x_2)$, $\Omega(x_1) + \Omega(x_2) \le \Omega(x_1 + x_2)$), $M(0) = 0$, $\Omega(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} M(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \Omega(x) = +\infty$. За допомогою функцій M та Ω Б.Л.Гуревич ввів простори W_M, W^Ω, W_M^Ω, які він назвав просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0\, \exists a > 0 \exists b > 0 \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \le c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$$

(сталі c, a, $b > 0$ залежать лише від функції φ). W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, котрі складаються з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких справджуються нерівності

$$|\varphi(x + iy)| \le c \exp\{-M(\overline{a}x) + \Omega(\overline{b}y)\},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ – довільна додатна стала, менша за a, $\overline{b}$ – довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}} [|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b + \rho)y)+$$

$$+M(a(1 - \delta)x)\}], \quad \rho \in \mathbb{N}, \delta \in \{1/n, n \ge 2\},$$

то з цими нормами $W_{M,a}^{\Omega,b}$ перетворюється в повний досконалий зліченно нормований простір. Збіжність в W_M^Ω (як об'єднанні зліченно нормованих просторів) еквівалентна такій збіжності [2]: послідовність $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається в W_M^Ω до нуля тоді і тільки тоді, коли вона: 1) правильно збігається до нуля (тобто рівномірно збігається до нуля на кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$); 2) обмежена (тобто $|\varphi_n(z)| \le c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$, де сталі c, a, b не залежать від n).

Зауважимо, що якщо $M(x) = x^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x \in [0, +\infty)$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $y \in [0, +\infty)$ і $\alpha + \beta \geq 1$, то $W_M^\Omega = S_\alpha^\beta$ (про простори типу S див. у книзі [3]).

У просторі W_M^Ω визначені і неперервні операції диференціювання, множення на незалежну змінну, зсуву аргументу. При певних умовах у просторі W_M^Ω визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку [4].

Важливим є питання про нетривіальність просторів W_M^Ω, оскільки ці простори можуть містити лише єдину функцію $\varphi \equiv 0$. Так буде, наприклад, якщо

$$\lim_{x\to\infty}(\Omega(bx) - M(ax)) = -\infty$$

для довільних a, $b > 0$ [2]. В [5] доведено, що необхідною і достатньою умовою нетривіальності простору W_M^Ω є умова:

$$\exists d > 0\, \exists c_0 > 0\, \exists x_0 \in (0, +\infty)\, \forall x \geq x_0 :$$

$$\Omega(x) \geq c_0 M(dx).$$

Припустимо, що функції Ω та M задовольняють умову нетривіальності вигляду $\Omega(x) = M(dx)$, $x \geq 0$, з деякою сталою $d > 0$. Символом $W_{M,a}^{M,ad}$ позначимо сукупність тих функцій φ з простору W_M^Ω, для яких

$$\exists a > 0\, \exists c > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(x + iy)| \leq ce^{-M(ax)+M(ady)}$$

і покладемо, за означенням,

$$W(d) := \bigcup_{a>0} W_{M,a}^{M,ad}, \quad W := \bigcap_{d>0} W(d).$$

Простори $W(d)$, W нетривіальні.

2. Оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W. Оператори Гельфонда-Леонтьєва утворюють важливий клас операторів узагальненого диференціювання. Властивості цих операторів досить повно вивчені у просторах A_R, $0 < R \leq \infty$, всіх однозначних та аналітичних у крузі $K_R = \{z : |z| < R\}$ функцій з топологією компактної збіжності. Тут ми розглядаємо такі оператори у просторах типу W, тобто в просторах цілих функцій, відмінних за своєю топологією та властивостями від просторів A_R. Оператор Гельфонда-Леонтьєва будується за допомогою послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, яка задовольняє умову

$$\lim_{k\to\infty}(k^{1/\rho}|a_k|^{1/k}) = (\delta e\rho)^{1/\rho}, \quad 0 < \delta, \rho < \infty,$$

тобто a_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора деякої спеціальної цілої функції F порядку ρ і типу σ. Слідуючи [6], задамо оператор Гельфонда-Леонтьєва $D^n(F, \cdot)$ ($n \in \mathbb{N}$ – фіксоване) таким чином. Нехай $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ – довільна функція з простору W; покладемо, за означенням,

$$D^n(F, \varphi)(z) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+n} \frac{a_k}{a_{k+n}} z^k, z \in \mathbb{C}.$$

В [1] доведено, що наведене означення є коректним, оператор $D^n(F, \cdot)$ неперервно відображає W в W_M^M. Відзначимо, що $D^n(e^z, \varphi) = \dfrac{d^n\varphi}{dz^n}$, тобто $D^n(F, \varphi)$ дійсно можна розуміти як узагальнену похідну порядку n функції φ, породжену функцією $F(z)$ (замість функції e^z). При певних умовах у просторах типу W визначений і неперервний оператор Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку [1], тобто оператор вигляду

$$g(D(F, \cdot)) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n(F, \cdot),$$

де $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ – ціла функція, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|g(z)| \leq c_\varepsilon e^{M(\varepsilon x)+M(\varepsilon y)}.$$

При цьому оператор $A_g := g(D(F, \cdot))$ неперервно відображає W в W_M^M. Далі вважаємо, що $F(z) \neq e^z$.

3. Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором Гельфонда-Леонтьєва. Нехай $P(z) = \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$, $\alpha_0 = \max_{1 \le k \le p_0} |\alpha_k|$,

$$P(A) := \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k D^k(F, \cdot) \equiv \sum_{k=1}^{p_0} \alpha_k A^k,$$

$A^k := D^k(F, \cdot)$ – оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва. Відомо [1], що для довільної функції $\varphi \in W$ справджуються нерівності:

$$|(A^m \varphi)(z)| \le c_m e^{-M(a_1 x) + M(b_1 y)},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де сталі a_1, $b_1 > 0$ не залежать від m, причому

$$0 < c_m \le c_0 \left(\frac{a_0}{\nu_m} \right)^m, \quad c_0 > 0, a_0 > 0,$$

ν_m – розв'язок рівняння $x\mu(x) = m$, $m \in \mathbb{N}$ (послідовність $\{\nu_m, m \ge 1\}$ є зростаючою і необмеженою). Звідси випливає, що

$$c_m \le c_0 \left(\frac{a_0}{\nu_1} \right)^m \equiv c_0 \omega_0^m, \quad \omega_0 = \frac{a_0}{\nu_1}. \qquad (1)$$

Із (1) випливають також нерівності

$$|(A^j \varphi)(z)| \le c_0 \tilde{\omega}_0^m e^{-M(a_1 x) + M(b_1 y)},$$

$$\forall j : 1 \le j \le m,$$

де $\tilde{\omega}_0 = \max \left\{ 1, \frac{a_0}{\nu_1} \right\}$. Тоді

$$|P(A)\varphi(z)| \le \tilde{c}_0 \tilde{\omega}_0^{p_0} e^{-M(a_1 x) + M(b_1 y)},$$

$$\tilde{c}_0 = c_0 \alpha_0 p_0, z = x + iy \in \mathbb{C}. \qquad (2)$$

Врахувавши (2) доводимо, що для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ правильною є нерівність

$$|P^n(A)\varphi(z)| \le \tilde{c}_0^n \tilde{\omega}_0^{p_0 n} e^{-M(a_2 x) + M(b_2 y)},$$

$$a_2, b_2 > 0, z \in \mathbb{C}.$$

Звідси вже випливає (див. [1]), що в просторі W визначений оператор

$$e^{tP(A)} : W \longrightarrow W_M^M$$

($t > 0$ – фіксований параметр), тобто для довільної функції $\varphi \in W$ ряд

$$(e^{tP(A)}\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} P^n(A)\varphi(z) \qquad (3)$$

зображає деяку функцію ψ з простору W_M^M; при цьому оператор $e^{tP(A)}$ є неперервним.

Нехай $S_{n,t,\varphi}$ позначає частинну суму ряду (3). Тоді $S_{n,t,\varphi} \longrightarrow e^{tP(A)}\varphi$ при $n \to \infty$ за топологією простору W_M^M. Отже,

$$P(A) e^{tP(A)} \varphi = P(A) \lim_{n \to \infty} S_{n,t,\varphi} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(A) S_{n,t,\varphi} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} P^{k+1}(A)\varphi =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} P^{k+1}(A)\varphi;$$

при цьому функція $\psi := P(A)e^{tP(A)}\varphi$ належить до простору W_M^M.

Розглянемо в просторі W_M^M задачу Коші

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P(A)u, \quad (t, z) \in (t_0, T] \times \mathbb{C} \equiv \Omega,$$

$$t \ge 0, T < \infty, \qquad (4)$$

$$u(t, \cdot)\Big|_{t=t_0} = \varphi_0, \quad \varphi_0 \in W. \qquad (5)$$

Під розв'язком задачі Коші (4), (5) розумітимемо функцію $u(t, z)$, диференційовну по t, яка при кожному $t \in (t_0, T]$ є елементом простору W_M^M, задовольняє рівняння (4) та початкову умову (5) в тому розумінні, що $u(t, \cdot) \to \varphi_0$ при $t \to t_0$ у просторі W_M^M; при цьому u неперервно залежить від φ_0.

Теорема 1. *Задача Коші (4), (5) розв'язна в просторі W_M^M; розв'язок цієї задачі дається формулою*

$$u(t, z) = e^{(t - t_0)P(A)} \varphi_0(z) \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} P^n(A) \varphi_0(z).$$

Доведення. Введемо позначення: $Q(t,t_0,A)\varphi_0 = e^{(t-t_0)P(A)}\varphi_0$ і доведемо, що функція $Q(t,t_0,A)\varphi_0$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі W_M^M, диференційовна по t. Іншими словами, доведемо, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(z) := \left\{\frac{1}{\Delta t}[Q(t+\Delta t,t_0,A)\varphi_0(z)- -Q(t,t_0,A)\varphi_0(z)] - P(A)Q(t,t_0,A)\varphi_0(z)\right\} \to 0,$$

$$\Delta t \to 0, z = x+iy \in \mathbb{C},$$

виконується в тому розумінні, що сім'я функцій $\{\Phi_{\Delta t}\}$ рівномірно (по z) збігається до нуля при $\Delta t \to 0$ у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і при цьому справджується оцінка

$$|\Phi_{\Delta t}(z)| \le \tilde{c}e^{-M(\tilde{a}x)+M(\tilde{b}y)}, z = x+iy \in \mathbb{C}, \quad (6)$$

зі сталими $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c} > 0$, не залежними від Δt.

Скориставшись теоремою Лагранжа про скінченні прирости дістанемо, що

$$\Phi_{\Delta t}(z) = P(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+\theta\Delta t-t_0)^n}{n!}P^n(A)\varphi_0(z)- -P(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}P^n(A)\varphi_0(z) =$$

$$= P(A)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+\theta\Delta t-t_0)^n-(t-t_0)^n}{n!}\times \times P^n(A)\varphi_0(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t+\theta\Delta t-t_0)^n-(t-t_0)^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(z),$$

$$0 < \theta < 1. \quad (7)$$

Якщо вважати, наприклад, що $|\Delta t| \le t$, то внаслідок доведеного раніше твердимо, що нерівність (6) виконується зі сталими $\tilde{c} = \tilde{c}_0\tilde{\omega}_0^{p_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{L}^n}{n!}$, де $\tilde{L} = 2(2t-t_0)\tilde{c}_0\tilde{\omega}_0^{p_0}$, $\tilde{a} = a_2$, $\tilde{b} = b_2$.

Ряд, написаний у правій частині останнього співвідношення в (7), збігається рівномірно по z у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$ і рівномірно по Δt, для досить малих значень $|\Delta t|$. Отже, можна здійснити граничний перехід при $\Delta t \to 0$ під знаком суми; в результаті дістанемо, що $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Phi_{\Delta t}(z) = 0$ (рівномірно по $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$). Цим доведено, що

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t,t_0,A)\varphi_0(z) = P(A)Q(t,t_0,A)\varphi_0(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}P^{n+1}(A)\varphi_0(z).$$

Таким чином, функція

$$u(t,z) = Q(t,t_0,A)\varphi_0(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}P^n(A)\varphi_0(z)$$

є розв'язком рівняння (4).

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}P^n(A)\varphi_0(z)$ збігається за топологією простору W_M^M і рівномірно по $t \in [t_0,T]$. У зв'язку з цим можна перейти до границі при $t \to t_0$; в результаті дістанемо, що

$$\lim_{t\to t_0}Q(t,t_0,A)\varphi_0(z) = \varphi_0(z).$$

Теорема доведена.

Далі в просторі $(W_M^M)'$ вивчимо задачу Коші для еволюційного рівняння з оператором, спряженим до оператора Гельфонда-Леонтьєва. З цією метою знайдемо спряжений до $D^n(F,\cdot)$ оператор, який позначатимемо символом $(D^n(F,\cdot))^*$.

Кожна функція $\varphi \in W \subset W_M^M$ єдиним способом розкладається в степеневий ряд: $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$; відомо [1], що коефіцієнти $b_k = b_k(\varphi)$, $k \ge 1$, задовольняють нерівності

$$|b_k| \le c\left(\frac{ad}{\nu_k}\right)^k, \quad c>0, a>0, d>0,$$

де ν_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \ge 1$ (послідовність $\{\nu_k, k \ge 1\}$ є зростаючою і необмеженою). Отже, послідовність

$b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \geq 1\}$ є елементом простору c_0 збіжних до нуля послідовностей. Кожній функції $\varphi \in W$ поставимо у відповідність послідовність її коефіцієнтів Тейлора $b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \geq 1\}$. При цьому різним функціям з простору W відповідають різні послідовності в c_0. Таким чином, відображення

$$f : W_M^M \ni \varphi \to b_\varphi = \{b_k(\varphi), k \in \mathbb{Z}_+\} \in c_0$$

є ін'єкцією. Відображення f як оператор, є, очевидно, лінійним, який має обернений, бо $\mathrm{Ker} f = \{0\}$.

Коефіцієнти Тейлора функції

$$\psi_n(z) \equiv D^n(F, \varphi)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+n} \frac{a_k}{a_{k+n}}, \varphi \in W,$$

при певних обмеженнях на послідовність $\left\{\dfrac{a_k}{a_{k+n}}, k \in \mathbb{Z}_+\right\}$ задовольняють нерівності [1]:

$$\left|\alpha_{k,n}\right| \equiv \left|b_{k+n} \frac{a_k}{a_{k+n}}\right| \leq c_1 \left(\frac{a_1 d}{\nu_k}\right)^k, \quad k \geq 1,$$

де $c_1 = c_1(n) > 0$, $a_1 > 0$, $d > 0$. Отже, $\alpha_{k,n} \to 0$ при $k \to \infty$ (при фіксованому $n \in \mathbb{N}$). Таким чином, відображення f зіставляє функції $\psi_n = D^n(F, \varphi)$ послідовність

$$b_{\psi_n} \equiv \left\{b_n \frac{a_0}{a_n}, b_{n+1} \frac{a_1}{a_{n+1}}, b_{n+2} \frac{a_2}{a_{n+2}}, \dots\right\}.$$

Для зручності введемо позначення: $A^n := D^n(F, \cdot)$ і розглянемо оператор $\widetilde{A}^n$: $c_0 \to c_0$, який кожній послідовності $b_\varphi = f(\varphi) \in c_0$, $\varphi \in W$, ставить у відповідність послідовність $f(A^n \varphi) = b_{A^n \varphi} \equiv b_{\psi_n} \in c_0$, тобто

$$\widetilde{A}^n f(\varphi) = f(A^n \varphi), \quad \forall \varphi \in W.$$

Звідси дістаємо співвідношення:

$$(f \cdot A^n)^* = (\widetilde{A}^n f)^*, \quad (A^n)^* f^* = f^* (\widetilde{A}^n)^*.$$

Отже, спряжений до оператора A^n оператор $(A^n)^*$ має вигляд

$$(A^n)^* \equiv (D^n(F, \cdot))^* = f^* (\widetilde{A}^n)^* (f^*)^{-1},$$

при цьому

$$(\widetilde{A}^n)^* : c_0' \to c_0', f^* : c_0' \to (W_M^M)', (f^*)^{-1} :$$

$$(W_M^M)' \to c_0', (\widetilde{A}^n)^* (f^*)^{-1} : (W_M^M)' \to c_0'.$$

Візьмемо довільний функціонал $g \in c_0'$. Відомо, що $c_0' \cong l_1$, де l_1 – простір усіх абсолютно сумовних послідовностей $g = \{g_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$. Дія функціоналу $g \in c_0' \cong l_1$ на елемент $b_\varphi = \{b_1, b_2, \dots\} \in c_0$ задається формулою

$$< g, b_\varphi >= g(b_\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{g_k}.$$

Отже, для довільного $g \in c_0'$ маємо:

$$< g, f(A^n \varphi) >=< g, \widetilde{A}^n f(\varphi) >\equiv< g, \widetilde{A}^n b_\varphi >=$$

$$=< (\widetilde{A}^n)^* g, b_\varphi >;$$

$$< g, \widetilde{A}^n b_\varphi >=< g, b_{\psi_n} >= b_n \frac{a_0}{a_n} \overline{g_0} + b_{n+1} \frac{a_1}{a_{n+1}} \overline{g_1} +$$

$$+ b_{n+2} \frac{a_2}{a_{n+2}} \overline{g_2} + \dots = b_n \overline{\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} g_0} + b_{n+1} \overline{\frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}} g_1} +$$

$$+ b_{n+2} \overline{\frac{\overline{a_2}}{\overline{a_{n+2}}} g_2} + \dots. \tag{9}$$

Нехай

$$(\widetilde{A}^n)^* g := g^* = \{g_0^*, g_1^*, \dots\} \in c_0' \cong l_1;$$

тоді з (9) випливає, що

$$g^* = \left\{0, \dots, 0, \frac{\overline{a_0}}{\overline{a_n}} g_0, \frac{\overline{a_1}}{\overline{a_{n+1}}} g_1, \dots\right\}. \tag{10}$$

У просторі $(W_M^M)'$ розглянемо рівняння

$$\frac{du(t)}{dt} = -(A^n)^* u(t), \quad t \in [0, T], T < \infty, \tag{11}$$

де $(A^n)^*$ – оператор, спряжений до оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^n(F, \cdot)$ ($n \in \mathbb{N}$ – фіксоване).

Під розв'язком рівняння (11) розумітимемо абстрактну функцію параметра t із значеннями в просторі $(W_M^M)'$ (тобто узагальнену функцію $u(t) \in (W_M^M)'$), сильно диференційовну по t, яка задовольняє рівняння (11) у просторі $(W_M^M)'$.

Якщо для (11) задати початкову умову

$$u|_{t=0} = u_0 \in (W_M^M)', \tag{12}$$

то під розв'язком задачі Коші (11), (12) розуміємо розв'язок рівняння (11), який задовольняє початкову умову в слабкому сенсі, тобто $u(t) \to u_0$ при $t \to +0$ у просторі $(W_M^M)'$.

Теорема 1 стверджує, що задача Коші (4), (5) розв'язна в просторі W_M^M (зокрема, у випадку $P(A) = A^n \equiv D^n(F, \cdot)$); тоді, використовуючи зв'язок між розв'язками задачі Коші в основному та в спряженому просторах (див. [2, с. 41]), дістаємо, що задача Коші (11), (12) коректно розв'язна в просторі $(W_M^M)'$, тобто для довільного $u_0 \in (W_M^M)'$ існує єдиний розв'язок у просторі $(W_M^M)'$, який неперервно залежить від початкової умови – узагальненої функції $u_0 \in (W_M^M)'$. Оскільки, внаслідок (8), $(A^n)^* = f^*(\widetilde{A}^n)^*(f^*)^{-1}$, то рівняння (11) набуває вигляду

$$\frac{du(t)}{dt} = -f^*(\widetilde{A}^n)^*(f^*)^{-1}u(t). \tag{13}$$

На обидві частини (14) подіємо відображенням $(f^*)^{-1}$; в результаті одержимо рівняння

$$(f^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt} = -(\widetilde{A}^n)^*(f^*)^{-1}u(t);$$

при цьому

$$(f^*)^{-1}u|_{t=0} = (f^*)^{-1}u_0 \in c_0'. \tag{14}$$

Введемо позначення: $(f^*)^{-1}u(t) := g(t) \in c_0'$. Оскільки $c_0' \cong l_1$, то $g(t) = \{g_0(t, g_1(t), \dots)\}$. Тоді, скориставшись формулою (10) знайдемо, що

$$(\widetilde{A}^n)^*(f^*)^{-1}u(t) \equiv (\widetilde{A}^n)^*g(t) = \Big\{0, \dots, 0,$$

$$\frac{\overline{a_0}}{a_n}g_0(t), \frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}}g_1(t), \frac{\overline{a_2}}{a_{n+2}}g_2(t), \dots\Big\}. \tag{15}$$

$g(t)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі c_0', сильно диференційовна по t. Справді,

$$\frac{dg(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}(f^*)^{-1}\left[\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right] =$$

$$= (f^*)^{-1}\left[\lim_{\Delta t \to 0}\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}\right] = (f^*)^{-1}\frac{du}{dt}$$

(тут ми скористалися тим, що $\dfrac{\Delta u}{\Delta t} \to \dfrac{du}{dt}$ при $\Delta t \to 0$ у просторі $(W_M^M)'$). Отже,

$$(f^*)^{-1}\frac{du(t)}{dt} = \frac{d}{dt}((f^*)^{-1}u(t)) =$$

$$= \{g_0'(t), g_1'(t), g_2'(t), \dots\}. \tag{16}$$

Із співвідношень (15), (16) випливає, що

$$g_0'(t) = 0, g_1'(t) = 0, \dots, g_{n-1}'(t) = 0,$$

тобто

$$g_0(t) = c_0, g_1(t) = c_1, \dots, g_{n-1}(t) = c_{n-1},$$

де $c_i = \text{const}$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Тоді

$$g_n'(t) = -\frac{\overline{a_0}}{a_n}g_0(t) = -\frac{\overline{a_0}}{a_n}c_0,$$

$$g_{n+1}'(t) = -\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}}g_1(t) = -\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}}c_1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$g_{2n-1}'(t) = -\frac{\overline{a_{n-1}}}{a_{2n-1}}g_{n-1}(t) = -\frac{\overline{a_{n-1}}}{a_{2n-1}}c_{n-1}.$$

Звідси дістаємо, що

$$g_n(t) = -\frac{\overline{a_0}}{a_n}c_0 t + c_n,$$

$$g_{n+1}(t) = -\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}}c_1 t + c_{n+1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$g_{2n-1}(t) = -\frac{\overline{a_{n-1}}}{a_{2n-1}}c_{n-1}t + c_{2n-1}.$$

Нехай $(f^*)^{-1}u_0 = \{u_0^0, u_1^0, u_2^0, \dots\} \in c_0' \cong l_1$. Урахувавши початкову умову (14) знайдемо, що $\lim\limits_{t \to +0} g_i(t) = g_i(0)$, $i \in \mathbb{Z}_+$, тобто $g_i(0) = u_i^0$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$c_0 = u_0^0, c_1 = u_1^0, \dots, c_{n-1} = u_{n-1}^0,$$

$$g_0(t) = u_0^0, g_1(t) = u_1^0, \dots, g_{n-1}(t) = u_{n-1}^0,$$

$$g_n(t) = -\frac{\overline{a_0}}{a_n}u_0^0 t + u_n^0, g_{n+1}(t) = -\frac{\overline{a_1}}{a_{n+1}}u_1^0 t + u_{n+1}^0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g_{2n-1}(t)=-\frac{\overline{a_{n-1}}}{\overline{a_{2n-1}}}u^0_{n-1}t+u^0_{2n-1}, t\in(0,T].$$

Далі знаходимо, що

$$g'_{2n}(t)=-\frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}g_n(t)=\frac{\overline{a_0}}{\overline{a_{2n}}}u_0t-\frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}u^0_n,$$

тобто

$$g_{2n}(t)=\frac{\overline{a_0}}{2\overline{a_{2n}}}u^0_0t^2-\frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}u^0_nt+c_{2n}=$$

$$=\frac{\overline{a_0}}{2\overline{a_{2n}}}u_0t^2-\frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{2n}}}u^0_nt+u^0_{2n}.$$

Продовжуючи цей процес, знайдемо всі координати $g_i(t)$, $i\in\mathbb{Z}_+$.

Таким чином, розв'язок задачі Коші (11), (12) має вигляд

$$u(t)=f^*g(t)\equiv f^*\{g_0(t),g_1(t),\ldots\}\in(W^M_M)'.$$

З'ясуємо, як діє функціонал $u(t)$ на довільну функцію $\varphi\in W^M_M$. Маємо, що

$$<u(t),\varphi>=<f^*g(t),\varphi>=<g(t),f(\varphi)>.$$

Зауважимо, що $f(\varphi)\in c_0$, тобто $f(\varphi)=\{b_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$, де b_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, – коефіцієнти Тейлора функції φ, $g(t)\in c'_0$ при кожному $t\in[0,T]$. Оскільки $c'_0\cong l_1$, то функціонал $g(t)\in c'_0$ діє на елемент $f(\varphi)\in c_0$ за формулою:

$$<g(t),f(\varphi)>=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{g_k(t)},$$

де $g_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}_+$, обчислюються за відповідними формулами. Отже,

$$<u(t),\varphi>=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{g_k(t)},\quad b_k=\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!},$$

$$k\in\mathbb{Z}_+,t\in[0,T]. \tag{17}$$

Формула (17) задає функціонал $u(t)$ на W^M_M при кожному $t\in[0,T]$, який задовольняє рівняння (11) та початкову умову (12):

$$\lim_{t\to+0}<u(t),\varphi>=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{g_k(0)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\overline{u^0_k}=$$

$$=<u_0,\varphi>.$$

Як приклад оператора Гельфонда-Леонтьєва розглянемо оператор $D^m(F,\cdot)$, побудований за спеціальною функцією

$$F(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{p(1)p(2)\ldots p(k)}, \tag{18}$$

де $p(x)$ – поліном: $p(x)=\alpha_px^p+\cdots+\alpha_1x$, причому $p(k)\neq0$, $k\in\{1,2,\ldots\}$. При великих значеннях k коефіцієнт $a_k\sim\dfrac{1}{\alpha^k_p(k!)^p}$ і, як показано в [6, с. 75], F – ціла функція порядку $1/p$ і типу $\sigma=p/\sqrt[p]{|\alpha_p|}$. Якщо $p(x)=x$, то $F(z)=e^z$.

У випадку (18) маємо, що [6, с. 75]

$$D^m(F,\varphi)=\sum_{k=m}^{mp}\frac{\Delta^{(m)}_k}{k!}z^{k-m}\varphi^{(k)}(z), \tag{19}$$

де коефіцієнти $\Delta^{(m)}_k$ знаходяться з розкладу

$$\psi_m(x)=p(x)p(x-1)\ldots p(x-m+1)=$$

$$=\sum_{k=0}^{mp}\frac{\Delta^{(m)}_k}{k!}x(x-1)\ldots(x-k+1)$$

і, отже, мають вигляд

$$\Delta^{(m)}_k=\psi_m(k)-C^1_k\psi_m(k-1)+C^2_k\psi_m(k-2)-\cdots+$$

$$+(-1)^k\psi_m(0),\ \ k\in\{0,1,\ldots,mp\}.$$

Зауважимо, що оскільки $\psi_m(0)=\psi_m(1)=\cdots=\psi_m(m-1)=0$ (бо $p(0)=0$), то $\Delta^{(m)}_0=\Delta^{(m)}_1=\cdots=\Delta^{(m)}_{m-1}=0$, і тому

$$\psi_m(x)=\sum_{k=}^{mp}\frac{\Delta^{(m)}_k}{k!}x(x-1)\ldots(x-k+1). \tag{20}$$

Формула (19) здійснюється для довільної функції $\varphi\in W$. Справді, якщо $\varphi(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nz^n$, то при $k\geq m$

$$z^{k-m}\varphi^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)b_nz^{n-m}=$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)b_n z^{n-m}.$$

Позначимо через A праву частину співвідношення (19); тоді

$$A = \sum_{k=m}^{mp} \frac{\Delta_k^{(m)}}{k!} \times$$

$$\times \left(\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)b_n z^{n-m} \right) =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} b_n \left(\sum_{k=m}^{mp} \frac{\Delta_k^{(m)}}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1) z^{n-m} \right).$$

Згідно з (20) маємо, що $A = \sum_{n=m}^{\infty} b_n \psi_m(n) z^{n-m}$. Але

$$\psi_m(n) = p(n)p(n-1)\dots p(n-m+1) = \frac{a_{n-m}}{a_n},$$

тобто

$$A = \sum_{n=m}^{\infty} b_n \frac{a_{n-m}}{a_n} z^{n-m} = D^m(F, \varphi),$$

що й потрібно було довести.

Розглянемо тепер задачу Коші (11), (12) з оператором Гельфонда-Леонтьєва, побудованим за функцією F, яка визначається формулою (18) та з початковою умовою $u_0 = \delta$, де δ – дельта-функція Дірака. Оскільки $< u_0, \varphi >=< \delta, \varphi >= \varphi(0)$, то для довільної функції $\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in W_M^M$ маємо $\varphi(0) = b_0$. Звідси та з формули

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \overline{u}_k^0 =< \delta, \varphi >= \varphi(0) = b_0$$

дістаємо, що

$$(f^*)^{-1} u_0 = \{1, 0, 0, \dots\} \equiv \{u_0^0, u_1^0, \dots\} =$$

$$= \{g_0(0), g_1(0), \dots\} \in c_0' \cong l_1.$$

Урахувавши співвідношення, які визначають $g(t) = (f^*)^{-1} u(t) = \{g_0(t), g_1(t), \dots\} \in c_0' \cong l_1$, а також вигляд коефіцієнтів $\{a_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ знаходимо, що

$$g(t) = \{1, 0, \dots 0, -\frac{t}{\overline{a_n}}, 0, \dots, 0, \frac{t^2}{2\overline{a_{2n}}}, 0, \dots, 0,$$

$$-\frac{t^3}{3!\overline{a_{3n}}}, 0, \dots\},$$

де $a_{kn} = \prod_{i=1}^{kn} p(i)$. Звідси дістаємо формулу, яка визначає розв'язок рівняння (11) як лінійний неперервний функціонал на W_M^M:

$$< u(t), \varphi >= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{kn} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\overline{\prod_{i=1}^{kn} p(i)} \right) t^k;$$

$$b_0 = \varphi(0),$$

при цьому $u(t) \to \delta$ при $t \to +0$ в просторі $(W_M^M)'$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Гома Н.М.* Оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 288. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 41 – 50.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

4. *Городецький В.В., Ленюк О.М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку // Вісник Київського університету. Серія: фіз-мат. науки, 2000. – Вип. 4. – С. 65 – 70.

5. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 39 – 44.

6. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент. – М.: Наука, 1981. – 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 12.06.2006