УДК 517.954

©2006 г. О.Н. Вітюк, О.В. Голушков

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
Інститут математики, економіки та механіки. Одеса

ПОЧАТКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

Розглянуто питання існування та єдиність розв'язку початкової задачі для диференціального рівняння з регуляризованою похідною. Запропоновано метод чисельного розв'язання цієї задачі та доведено його збіжність.

The question of existence and uniqueness of the solution of an initial problem for the differential equation with regularized derivative is considered. The method of the numerical solution of the problem is offered and its convergence is proved.

Нехай $J = (0, a]$, $\overline{J} = [0, a]$. Інтегралом Рімана-Ліувілля порядку $\alpha > 0$ від функції $f(x)$ називаємо функцію [1, с.40]

$$I_0^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \ x > 0,$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера, $AC(\overline{J})$ — множина абсолютно неперервних функцій $f : \overline{J} \to R$.

Якщо натуральне число m таке, що $m-1 < \alpha < m$, то похідною Рімана-Ліувілля порядку α від функції $f(x)$ називаємо функцію [1, с.44]

$$D_0^\alpha f(x) = \frac{d^m}{dx^m} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{m-\alpha-1} f(t)dt \right).$$

Дослідженню диференціальних рівнянь, що містять дробову похідну Рімана-Ліувілля, присвячено роботи багатьох авторів (огляд робіт в [1, 2]).

Нехай далі $\alpha \in (0, 1)$. Регуляризованою похідною [3 - 5] і похідною Капуто [6] порядку α від функції $f(x)$ є відповідно функції:

$$\overline{D}_0^\alpha f(x) = D_0^\alpha (f(x) - f(0)),$$

$$\widetilde{D}_0^\alpha f(x) = I_0^{1-\alpha} f'(x).$$

Якщо $f(x) \in AC(\overline{J})$, то легко переконатися, що $\overline{D}_0^\alpha f(x) = \widetilde{D}_0^\alpha f(x)$ для майже всіх (м.в.) $x \in \overline{J}$. Нехай

$$I_0^1 f(x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \ I_0^0 f(x) = f(x), \ D_x \equiv \frac{d}{dx}.$$

1^0. Розглянемо початкову задачу

$$\overline{D}_0^\alpha y(x) = F(x, y(x)), \tag{1}$$

$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

Початкова задача для диференціального рівняння $\widetilde{D}_0^\alpha y(x) = F(x, y(x))$, $\alpha \in C$, $Re(\alpha) > 0$ у просторі неперервно диференційовних функцій розглянута в роботах [4, 5].

Припустимо, що функція $F(x, y) : \overline{J} \times G \to R$, де $G = \{(x, y) : x \in \overline{J}, |y - y_0| \le b\}$, задовольняє умови:

(а) $F(x, y)$ вимірна по x при фіксованому y і неперервна по y при фіксованому x;

(б) існує стала M така, що $|F(x, y)| \le M$.

Розв'язком задачі (1), (2) називаємо функцію $y(x) \in C(\overline{J})$, що задовольняє умову (2) і диференціальне рівняння (1) для майже всіх (м.в.) $x \in \overline{J}$.

Теорема 1. *Нехай функція $F(x,y)$ задовольняє умови (а), (б). Для того, щоб функція $y(x) \in C(\overline{J})$ була розв'язком задачі (1), (2) необхідно і досить, щоб функція $y(x)$ була розв'язком інтегрального рівняння*

$$y(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(t, y(t)) dt. \quad (3)$$

Доведення. Нехай $y(x)$ - розв'язок задачі (1), (2), а $q(x) = y(x) - y_0$, $q_{1-\alpha}(x) = I_0^{1-\alpha} q(x)$. Відповідно до визначення регуляризованої похідної $\overline{D}_0^\alpha y(x) = D_x q_{1-\alpha}(x)$.

Тоді

$$I_0^1 \overline{D}_0^\alpha y(x) = q_{1-\alpha}(x) - q_{1-\alpha}(0), \quad (4)$$

де

$$q_{1-\alpha}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt - \frac{x^{1-\alpha} y(0)}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (5)$$

Якщо $|y(x)| \le P$, $x \in \overline{J}$, то для $x \in J$

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \int\limits_0^x (x-t)^{-\alpha} y(t) dt \right| \le \frac{P x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (6)$$

На підставі (5), (6) $\lim q_{1-\alpha}(x) = 0$ при $x \to 0_+$, тому продовжуючи $q_{1-\alpha}(x)$ за неперервністю, отримаємо, що $q_{1-\alpha}(0) = 0$. Отже, $q_{1-\alpha}(x) \in C(\overline{J})$ и $q_{1-\alpha}(0) = 0$.

Використовуючи (4), послідовно одержуємо

$$I_0^1 \overline{D}_0^\alpha y(x) = q_{1-\alpha}(x),$$

$$I_0^{1-\alpha} I_0^\alpha \overline{D}_0^\alpha y(x) - I_0^{1-\alpha} q(x) = 0,$$

$$I_0^{1-\alpha} (I_0^\alpha \overline{D}_0^\alpha y(x) - q(x)) = 0. \quad (7)$$

Інтеграл порядку α від лівої та правої частини (7) дає

$$I_0^1 (I_0^\alpha \overline{D}_0^\alpha y(x) - q(x)) = 0.$$

Диференціюючи останню рівність, отримаємо для м.в. $x \in \overline{J}$

$$y(x) = y_0 + I_0^\alpha \overline{D}_0^\alpha y(x) = y_0 + I_0^\alpha F(x, y(x)). \quad (8)$$

Доведемо, що $y(x)$ задовольняє (3) для $x \in \overline{J}$. Для цього досить довести, що $I_0^\alpha F(x, y(x)) \in C(\overline{J})$.

Нехай $x_1, x_2 \in (0, a]$, причому $x_1 < x_2$. Тоді

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int\limits_0^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} F(t, y(t)) dt - \int\limits_0^{x_1} (x_1-t)^{\alpha-1} F(t, y(t)) dt \right| \le$$

$$\le \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \left(\int\limits_0^{x_1} \left((x_1-t)^{\alpha-1} - (x_2-t)^{\alpha-1} \right) dt + \int\limits_{x_1}^{x_2} (x_2-t)^{\alpha-1} dt \right) \le$$

$$\le \frac{M}{\alpha \cdot \Gamma(\alpha)} \left(2(x_2-x_1)^{1-\alpha} - (x_2^{1-\alpha} - x_1^{1-\alpha}) \right) \le$$

$$\le \frac{2M(x_2-x_1)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Отже, $I_0^\alpha F(x, y(x)) \in C(J)$. Крім того, для $x \in J$, $|I_0^\alpha F(x, y(x))| \le (M x^\alpha)/(\Gamma(\alpha+1))$. Оскільки $\lim(I_0^\alpha F(x, y(x))) = 0$ при $x \to 0_+$, то довизначимо функцію $I_0^\alpha F(x, y(x))$ нулем у точці $x = 0$. Таким чином, $I_0^\alpha F(x, y(x)) \in C(\overline{J})$.

Отже, розв'язок $y(x) \in C(\overline{J})$ задачі (1), (2) для $x \in \overline{J}$ задовольняє інтегральне рівняння (3).

Нехай тепер $y(x) \in C(\overline{J})$ – розв'язок інтегрального рівняння (3), доведемо, що $y(x)$ задовольняє (1) майже скрізь на $\overline{J}$. Маємо

$$q(x) = y(x) - y_0 = I_0^\alpha F(x, y(x)),$$

$$I_0^{1-\alpha} q(x) = I_0^1 F(x, y(x)).$$

Згідно з умовами (а), (б) функція $F(x, y(x)) \in L(0, a)$, тоді $q_{1-\alpha}(x) \in AC(\overline{J})$.

Відповідно до визначення регуляризованої похідної $\overline{D}_0^{\alpha} y(x) = D_x q_{1-\alpha}(x) = F(x, y(x))$ для м.в. $x \in \overline{J}$, тобто $y(x)$ – розв'язок задачі (1), (2). Теорему 1 доведено.

Нехай стала T, $0 < T \leq a$ задовольняє умову $(MT^{\alpha})/(\Gamma(\alpha+1)) \leq b$.

Теорема 2. *Нехай $F(x,y) : G \to R$ задовольняє умови (а), (б). Тоді на проміжку $[0,T]$ існує розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. На проміжку $[0,T]$ побудуємо послідовність $\{y_k(x)\}$, $k \geq 0$, де
$y_0(x) = y_0$,

$$y_k(x) = \begin{cases} y_0, \ x \in [-\tau_k, 0), \\ y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \times \\ \times F(t, y_k(t-\tau_k))dt, \ x \in [0,T], \end{cases} \qquad (9)$$

а $\tau_k = \frac{T}{k}$.

Функцію $y_k(x)$ послідовно визначаємо для $x \in [i\tau_k, (i+1)\tau_k]$, $i = \overline{0, k-1}$.

Очевидно, що $|y_k(x) - y_0| \leq b$, $x \in [0,T]$. Для $x_1, x_2 \in [0,T]$, $x_1 < x_2$,

$$|y_k(x_2) - y_k(x_1)| \leq \frac{2M}{\Gamma(\alpha+1)} (x_2 - x_1)^{\alpha}.$$

Таким чином, послідовність $y_k(x), k \geq 0$ є рівномірно обмеженою та одностайно неперервною. Відповідно до теореми Арцела існує її підпослідовність, що рівномірно на $[0,T]$ збігається до $v(x) \in C([0,T])$). Не порушуючи загальності, можна вважати, що послідовність $y_k(x), k \geq 0$ рівномірно збігається до $v(x) \in C(\overline{J})$.

Доведемо, що послідовність $y_k(x-\tau_k)$, $k \geq 0$, також рівномірно на $[0,T]$ збігається до $v(x)$.

Одержуємо

$$|y_k(x-\tau_k) - v(x)| \leq |y_k(x-\tau_k) - y_k(x)| + \\ + |y_k(x) - v(x)|. \qquad (10)$$

Якщо $x \in [0, \tau_k]$, то

$$|y_k(x) - y_k(x-\tau_k)| \leq \frac{M\tau_k}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (11)$$

Якщо ж $x \in (\tau_k, T]$, то

$$|y_k(x) - y_k(x-\tau_k)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times (\int\limits_0^{x-\tau_k} \left((x-\tau_k-t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1} \right) dt +$$

$$+ \int\limits_{x-\tau_k}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt) =$$

$$= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (2\tau_k^{\alpha} - (x^{\alpha} - (x-\tau_k)^{\alpha})) \leq$$

$$\leq \frac{2M\tau_k}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (12)$$

З (10) – (12) випливає рівномірна збіжність послідовності $y_k(x-\tau_k), k \geq 0$ на $[0,T]$ до функції $v(x)$, а на підставі теореми Лебега з (9) при $k \to \infty$ одержуємо, що

$$v(x) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(t, v(t)) dt,$$

тобто $v(x)$ - розв'язок задачі (1), (2).

Зауваження. *Якщо $F(x,y) : \overline{J} \times R \to R$ задовольняє умови (а), (б), то аналогічно доводимо існування розв'язку задачі (1), (2) на проміжку $\overline{J}$.*

Теорема 3. *Нехай $F(x,y) : \overline{J} \times G \to R$ вимірна по x при фіксованому y, задовольняє умову Ліпшиця по y з постійною K та умову (б). Тоді задача (1), (2) має єдиний розв'язок при $x \in [0,T]$.*

Доведення. Нехай $u(x) \in C([0,T])$ також роз'язок задачі (1), (2). Тоді

$$|v(x) - u(x)| \leq \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} \times$$

$$\times |v(t) - u(t)| dt. \qquad (13)$$

Інтегральне рівняння

$$z(x) = \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} z(t)dt$$

має єдиний розв'язок $z(x) = 0$. З (13) за теоремою про інтегральні нерівності [9] одержуємо, що $|v(x) - u(x)| \leq z(x), x \in [0,T]$. Отже, $v(x) = u(x), x \in [0,T]$. Теорему 3 доведено.

2^0. Нижче мова йтиме про один метод чисельного розв'язання задачі (1), (2).

Припускаємо, що функція $F(x,y) : \overline{J} \times G \to R$ неперервна по (x,y), задовольняє умову Ліпшиця по y з постійною K та $|F(x,y)| \leq M$.

Нехай розв'язок задачі (1), (2) існує і єдиний для $x \in [0,T]$.

Вважаємо, що $x_i = ih$, $i = \overline{0,N}$, $Nh = T$, а y_i — наближене значення $y(x_i)$. Використовуючи (3) одержимо

$$y(x_1) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{x_1} (x_1 - t)^{\alpha-1} F(t, y(t))dt \approx$$

$$\approx y_0 + \frac{F(x_0,y_0)}{\Gamma(\alpha+1)} x_1^\alpha,$$

тобто

$$y_1 = y_0 + \frac{F(x_0,y_0) \cdot x_1^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Якщо $y_1, ..., y_n$ знайдені, то

$$y(x_{n+1}) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^{x_{n+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} \times$$

$$\times F(t,y(t))dt =$$

$$= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} F(t,y(t))dt \approx$$

$$\approx y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} F(x_k,y_k) \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right).$$

Таким чином,

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} F(x_k,y_k) \times$$

$$\times \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right). \qquad (14)$$

Нехай $\delta_n = y(x_n) - y_n$. Тоді

$$|\delta_{n+1}| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} \times$$

$$\times |F(t,y(t)) - F(t_k,y_k)|dt. \qquad (15)$$

Для $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|F(x,y(x)) - F(x_k,y_k)| \leq$$

$$\leq |F(x,y(x)) - F(x_k,y(x))| +$$

$$+ |F(x_k,y(x)) - F(x_k,y(x_k))| +$$

$$+ |F(x_k,y(x_k)) - F(x_k,y_k)| = A_1 + A_2 + A_3.$$

Нехай [10, с.124]

$$\omega(F;h,0) = \sup_y \sup_{|x-x_k| \leq h} |F(x,y) - F(x_k,y)|$$

є частинний модуль неперервності функції $F(x,y)$. Тоді $A_1 \leq \omega(F;h,0)$.

Потім для $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|y(x) - y(x_k)| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \left[\int\limits_0^{x_k} \left((x_k - t)^{\alpha-1} - (x-t)^{\alpha-1}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_k}^{x} (x-t)^{\alpha-1} dt \right] =$$

$$= \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} \left[2(x - x_k)^\alpha - (x^\alpha - x_k^\alpha)\right] \leq$$

$$\leq \frac{2Mh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}. \qquad (16)$$

Отже, враховуючи (16), маємо оцінку $A_2 \leq (2KMh^\alpha)/(\Gamma(\alpha+1))$.

Беручи до уваги оцінки для A_1, A_2, а також те, що $A_3 \leq K|\delta_k|$, одержимо для $x \in [x_k, x_{k+1}]$ наступну оцінку

$$|F(x,y(x)) - F(x_k,y_k)| \leq K|\delta_k| + B,$$

$$B = \omega(F; h, 0) + \frac{2MKh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Звідси та з (15) випливає оцінка

$$|\delta_{n+1}| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} (K|\delta_k| + B) \times$$

$$\times \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} (K|\delta_k| + B) \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right) \le$$

$$\le \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} |\delta_k| \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right) + P, \quad (17)$$

$$P = \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\omega(F; h, 0) + \frac{2Mh^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right).$$

Інтегральне рівняння

$$z(x) = P + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} z(t) dt \quad (18)$$

має розв'язок [11, с.123]

$$z(x) = P \cdot E_\alpha(Kx^\alpha), \quad (19)$$

де [1, с.33] $E_\alpha(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\tau^k}{\Gamma(\alpha k+1)}$ — функція Міттаг - Леффлера.

Лема. *Нехай сіткові функції* $\gamma_h = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N), \gamma = q, w$ *такі, що* $q_0 = 0, w_0 = P$ *і*

$$|q_{n+1}| \le \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} |q_k| \times$$

$$\times \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right) + P, \quad (20)$$

$$w_{n+1} \ge \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} w_k \times$$

$$\times \left(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha\right) + P, \ n = \overline{0, N-1}. \quad (21)$$

Тоді

$$|q_n| \le w_n, n = \overline{0, N},$$

причому співвідношенням (21) задовольняють $w_n = z(x_n)$, *де* $z(x)$ *— розв'язок інтегрального рівняння (18).*

Доведення. Скористаємося методом математичної індукції. За умовою леми $|q_0| \le w_0$. Нехай $|q_k| \le w_k$, $k = \overline{0, n}$. Тоді співвідношення $|q_{n+1}| \le w_{n+1}$ безпосередньо випливає з (20), (21).

Доведемо, що $w_n = z(x_n)$ задовольняють (21). Згідно (19) $z(x) > 0$ і зростає на $[0, T]$. Тоді в силу (18)

$$z(x_{n+1}) = P + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} z(t) dt \ge$$

$$\ge P + \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{n+1} - t)^{\alpha-1} z(x_k) dt =$$

$$= P + \frac{K}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n} z(x_k)(x_{n-k+1}^\alpha - x_{n-k}^\alpha).$$

Лему доведено.

Наслідок. *Згідно (17), (19) та леми отримаємо, що* $|\delta_n| \le z(x_n) \le P \cdot E_\alpha(KT^\alpha)$. *Отже,* $\delta_n \to 0$ *при* $h \to 0$, *тому що* $P \to 0$ *при* $h \to 0$. *Зазначимо, що якщо* $F(x, y)$ *задовольняє умову Ліпшиця по* x, *тоді* $|\delta_n| = O(h^\alpha)$.

Приклад. Розглянемо задачу

$$\overline{D}_0^{\frac{1}{2}} y(x) = xy + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} - x - x^2,$$

$$y(0) = 1.$$

$y = 1 + x$ — її точний розв'язок.

Позначимо через $y_{n(h_1)}$ — наближене значення $y(x_n)$ при $h_1 = 0,0025$ та $y_{n(h_2)}$ — наближене значення $y(x_n)$ при $h_2 = 0,001$.

Нижче у таблиці наведені значення $y(x_n)$, $y_{n(h_1)}$ та $y_{n(h_2)}$.

№	x	$y(x_n)$	$y_{n(h_1)}$	$y_{n(h_2)}$
1	0	1	1	1
2	0.1	1.1	1.0986	1.0995
3	0.2	1.2	1.1986	1.1994
4	0.3	1.3	1.2985	1.2994
5	0.4	1.4	1.3984	1.3994
6	0.5	1.5	1.4983	1.4993
7	0.6	1.6	1.5981	1.5993
8	0.7	1.7	1.6979	1.6992
9	0.8	1.8	1.7976	1.7991
10	0.9	1.9	1.8973	1.8989
11	1	2	1.9968	1.9987

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Техника, 1987. — 688 с.

2. *Kilbas A.A., Bonilla B., Trujillo J.J.* Existence and uniqueness theorems for nonlinear fractional differential equations. // Demonstration Math. — 2000. — **33**, № 3. — P. 583 — 602.

3. *Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б.* Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка. // Изв. АН Арм.ССР — 1968. — **3**, № 1. — С. 3 — 29.

4. *Кочубей А.Н.* Задача Коши для эволюционных уравнений дробного порядка. // Дифференц. уравнения. — 1989. — **25**, № 8. — С. 1359 — 1367.

5. *Эйдельман С.Д., Чикрий А.А.* Динамические игровые задачи сближения для уравнений дробного порядка. // Укр. мат. журнал — 2000. — **52**, № 11. — С. 1566 — 1583.

6. *Caputo M.* Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. // Geophys. J.R.Astr.Soc. — 1967. — **13**. — P. 529 — 539.

7. *Килбас А.А., Марзан С.А.* Задача Коши для дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто. // Докл. РАН. — 2004. — **339**, № 1. — С. 7 – 11.

8. *Килбас А.А., Марзан С.А.* Нелинейные дифференциальные уравнения с дробной производной Капуто в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. // Дифференц. уравнения – 2005. – **41**, № 1. – С. 82 – 86.

9. *Азбелев Н.В., Цалюк З.Б.* Об интегральных неравенствах. // Мат. сб. – 1962. – **56**, № 3. – С. 325 – 342.

10. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

11. *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966. – 671 с.

Стаття надійшла до редколегії 07.08.2006