УДК 517.929

©2006 р. Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ІЗ ПОСТІЙНИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Обґрунтовано метод усереднення за швидкими змінними для системи диференціально-різницевих рівнянь із повільними та швидкими змінними. Процедура усереднення застосована як до правих частин системи, так і до інтегральних крайових умов. Доведено існування розв'язку крайової задачі та одержано оцінку похибки методу усереднення.

In this paper we satisfy the averaging method for differential-difference equations with a fast and slow variables. A system and the integral boundary conditions are averagined by the fast variables. An existence of solution of the boundary-value problem and for error of the method, an estimate evidently dependent of a small parameter, is obtained.

Вступ. Обґрунтуванню методу усереднення для багаточастотних систем, починаючи з праці В.І. Арнольда для двочастотних систем із аналітичними правими частинами [1], присвячені роботи Ю.А. Митропольського, Є.О. Гребенікова, М.М. Хапаєва, А.М. Самойленка, Р.І. Петришина та ін. (див. [2 – 4] і наведену в [5] бібліографію).

Складність дослідження багаточастотних систем обумовлена резонансними явищами, що описуються точною чи наближеною раціональною співвимірністю частот. Якщо така співвимірність зберігається на протязі досить великого часового проміжку, то процедура усереднення може привести до похибки $O(1)$ для відхилення розв'язків точної й усередненої задач.

Для систем із запізненням, які в процесі еволюції проходять через резонанс, метод усереднення був обґрунтований в [6, 7] та ін. Зокрема, система із лінійно перетвореним аргументом й інтегральними крайовими умовами розглянута у [8]. В [9] досліджувалась двоточкова крайова задача із постійним запізненням. У даній роботі за допомогою методу усереднення досліджується резонансна система диференціально-різницевих рівнянь з інтегральними та початковими умовами.

1. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon), \quad (1)$$

де малий параметр $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\tau \in [0, L]$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, $x_\Delta(\tau) = x(\tau - \varepsilon\Delta)$, $\Delta = \mathrm{const} > 0$, $\omega(\tau)$ – вектор частот.

Задамо для розв'язку системи (1) інтегральні умови

$$\int_0^L f(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon) d\tau = d_1, \quad (2)$$

$$\int_0^L [A(\tau, x, x_\Delta, \varepsilon)\varphi + g(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon)] d\tau = $$

$$= d_2, \quad (3)$$

де f, A і g – задані вектор-функції, d_1 і d_2 – вектори з $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^m$ відповідно. Функції X, Y, f і g – 2π-періодичні за кожною з компонент векторів φ і φ_Δ. Крім умов (2), (3) задаються ще початкові умови

$$x(s) = x^0(s), \varphi(s) = \varphi^0(s), s \in [-\varepsilon\Delta, 0). \quad (4)$$

Зауважимо, що умов (4) недостатньо для визначення розв'язку системи (1), оскільки не задано значень $x(0)$ і $\varphi(0)$.

Під розв'язком задачі (1) – (4) розуміємо абсолютно неперервні функції $x = x(\tau, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(\tau, \varepsilon)$, які для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ задовольняють систему (1) майже всюди на $[0, L]$ і умови (2), (3), а на $[-\varepsilon\Delta, 0)$ – умови (4).

Нехай k, $l \in Z^m$, $p = (k, l) \in Z^{2m}$, $\|p\| = \sum_\nu |p_\nu|$. Гармоніка $\exp[i(k, \varphi) + i(l, \varphi_\Delta)]$ резонансна в точці $\tau \in [\varepsilon\Delta, L]$, якщо

$$(k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\tau - \varepsilon\Delta)) \cong 0, \quad \|p\| \neq 0,$$

де $(\cdot, \cdot)$ – скалярний добуток. Для $\tau \in [0, \varepsilon\Delta)$ система (1) є системою без запізнення, тому умовою резонансу частот є виконання рівності [4]: $(k, \omega(\tau)) = 0$, $k \in Z^m \setminus \{0\}$.

Для гармонік $\exp[i(k, \varphi - \varphi_\Delta)]$ при $\tau \geq \varepsilon\Delta$ фаза змінюється повільно, оскільки

$$\frac{d(\varphi - \varphi_\Delta)}{dt} = \omega(\tau)\Delta + O(\varepsilon),$$

тому усереднена система включатиме також гармоніки, для яких $k + l = 0$. Усереднена за змінною φ задача, набуває вигляду

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{X}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{Y}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\int_0^L \overline{f}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta, \varepsilon) = d_1, \tag{6}$$

$$\int_0^L [A(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta)\overline{\varphi} + \overline{g}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta, \varepsilon)]d\tau = d_2. \tag{7}$$

Тут

$$\overline{F}(\tau, x, x_\Delta, \theta, \varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots$$

$$\ldots \int_0^{2\pi} F(\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi - \theta, \varepsilon) d\varphi = \sum_{k+l=0} F_{kl} e^{i(k,\theta)},$$

де $\theta = \omega(\tau)\Delta$, $F = (X, Y, f, g)$, $F_{kl}(\tau, x, x_\Delta, \varepsilon)$ – коефіцієнти Фур'є.

Алгоритми побудови усереднених рівнянь із врахуванням резонансних гармонік для систем без запізнення наведені в [2, 4, 5], а в системах із запізненням – в [10,11].

2. Введемо позначення: $G = [0, L] \times D \times D \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times (0, \varepsilon_0]$, $G_1 = [0, L] \times D \times D \times (0, \varepsilon_0]$, $v = (\varphi, \varphi_\Delta) \in \mathbb{R}^{2m}$, $z = (x, x_\Delta) \in D^2$, $M = (\tau, x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon) \in G$, $M_1 = (\tau, x, x_\Delta, \varepsilon)$, $M_1^0 = (\tau, x, x_\Delta)$. Нехай $\overline{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y}, \varepsilon)$ – компонента розв'язку системи (5), $\overline{x}(0, \overline{y}, \varepsilon) = \overline{y}$; $\tilde{x} = \overline{x}(\tau, \overline{y} + \mu, \varepsilon)$, $\overline{M}_1 = (\tau, \overline{x}, \overline{x}_\Delta, \varepsilon)$, $\tilde{M}_1 = (\tau, \tilde{x}, \tilde{x}_\Delta, \varepsilon)$.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0. Функції $\omega_\nu \in C^m[0, L]$, $\nu = 1, \ldots, m$, а побудований за цією системою вронскіан $W[\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)] \neq 0$ для $\tau \in [0, L]$.

2^0. Вектор-функції $F \in C^2_{(\tau,z)}(G, a_1)$, і $A \in C^1_{(\tau,z)}(G, a_1)$ та обмежені разом із похідними у відповідних областях сталою a_1.

3^0. Виконуються нерівності:

$$\sup \|F_{00}\| + \sup \left\|\frac{\partial F_{00}}{\partial \tau}\right\| + \sup \left\|\frac{\partial F_{00}}{\partial z}\right\| +$$

$$+ \sum_{\|k\|+\|l\| \neq 0} \left[(\|k\| + \|l\|) \sup \|F_{kl}\| + \sup \left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial \tau}\right\| + \right.$$

$$\left. + \sup \left\|\frac{\partial F_{kl}}{\partial z}\right\| \right] \leq a_2,$$

$$\sum_{\|k+l\|>0} \frac{1}{\|k + l\|} \left(\sup \left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial \tau \partial z}\right\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{2m} \sup \left\|\frac{\partial^2 F_{kl}}{\partial z \partial z_\nu}\right\| \right) \leq \overline{a}_2,$$

де супремум обчислюється в області G_1.

4^0. Матриці

$$Q_1(\varepsilon) = \int_0^L \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x}(\overline{M}_1) \frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{y}}(\tau, \overline{y}, \varepsilon) + \right.$$

$$+\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_\Delta}(\overline{M}_1)\frac{\partial\overline{x}_\Delta}{\partial\overline{y}}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\Bigg)d\tau,$$

$$Q_2(\varepsilon)=\int\limits_0^L A(\tau,\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon),\overline{x}_\Delta(\tau,\overline{y},\varepsilon))d\tau$$

не вироджені, коли $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, і

$$\|Q_\nu(\varepsilon)\|\le\sigma_\nu\varepsilon^{-\chi_\nu},$$

де $\sigma_\nu>0$, $0\le\chi_1<m^{-1}$, $0\le\chi_1+\chi_2<m^{-1}$.

3. Питання існування розв'язку задачі вигляду (1) – (3) із лінійно перетвореним аргументом розглядалося в [8]. Для задачі (1)-(4)розв'язок тільки неперервний при $\tau>0$. Тому, щоб скористатися методикою [4], виділимо проміжки $[0,2\varepsilon\Delta]$ і $[2\varepsilon\Delta,L]$, на другому з яких $(x(\cdot,\varepsilon),\varphi(\cdot,\varepsilon))\in C^2$ для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$.

Теорема. *Нехай виконуються умови* 1^0 – 4^0, *вектор-функції* x^0 *і* φ^0 *неперервні на* $[-\epsilon\Delta,0)$. *Тоді* $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, *де* ε_0 – *досить мале, існує розв'язок* $(x(\tau,y,\psi,\varepsilon),\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon))$ *задачі (1) – (4),* $(x(0,y,\psi,\varepsilon),\varphi(0,y,\psi,\varepsilon))=(y,\psi)$, *і така функція* $\xi(\varepsilon)$, *що виконується нерівність*

$$\|x(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)\|+$$
$$+\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\varepsilon)-\xi(\varepsilon)\|\le c_{11}\varepsilon^\alpha,$$
$$\alpha=1/m-\chi_1$$

для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$, c_{11} не залежить від ε.

Доведення. Нехай $\rho_1=0.5\rho$, $\mu\in\mathbb{R}^n$, $\|\mu\|\le c_1^{-1}\rho_1$, $c_1=\exp(2a_1nL)$. Тоді $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ крива $\overline{x}=\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)$ лежить в ρ_1-околі кривої $\overline{x}=\overline{x}(\tau,\overline{y},\varepsilon)$. На підставі теореми 3 [10] існує розв'язок системи (1), визначений для $\tau\in[0,L]$, і

$$\|x(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)\|\le c_2\varepsilon^{1/m}.$$

Звідси випливає нерівність

$$\|x(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\overline{y}+\mu,\varepsilon)\|\le$$
$$\le c_1\|\mu\|+c_2\varepsilon^{1/m}.\qquad(8)$$

Покажемо, що $\exists\mu=\mu(\xi,\varepsilon)\in\mathbb{R}^n$ таке, що $\forall(\xi,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m\times(0,\varepsilon_0]$ існує розв'язок системи (1) який при $t=0$ набуває значень $(x(0,\varepsilon),\varphi(0,\varepsilon))=(\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi)$ і задовольняє умову (2). Із (2) і (6) випливає

$$\int\limits_0^{2\varepsilon\Delta}(f(M)-\overline{f}(\overline{M}_1))d\tau+$$

$$+\sum_{k+l=0}\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^L(f_{kl}(M_1)e^{i(k,\varphi-\varphi_\Delta)}-$$
$$-f_{kl}(\tilde{M}_1)e^{i(k,\omega(\tau))\Delta})d\tau+$$
$$+\sum_{k+l=0}\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^L f_{kl}(M_1)e^{i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\Delta)}d\tau+$$
$$+\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^L(\overline{f}(\overline{M}_1)-\overline{f}(\tilde{M}_1))d\tau\equiv$$
$$\equiv R_1+R_2+R_3+R_4=0.$$

Із умови 1^0 одержується оцінка

$$\|R_1\|\le4a_1\Delta\varepsilon.\qquad(9)$$

При $\tau\ge2\varepsilon\Delta$ маємо

$$\|\varphi(\tau)-\varphi(\tau-\varepsilon\Delta)-\omega(\tau)\Delta\|\le c_3\varepsilon,$$

$$c_3=\left(\Delta^2\max_{1\le\nu\le m}\max_{\tau\in[0,L]}\left|\frac{d\omega_\nu(\tau)}{d\tau}\right|+2\sup_G\|Y\|\right)\Delta/2.$$

Тоді для R_2 одержимо оцінку

$$\|R_2\|\le c_3L\varepsilon\sum_{k+l=0}\sup_{G_1}\|f_{kl}(M_1)\|+$$
$$+L\sum_{k+l=0}\|f_{kl}(M_1)-f_{kl}(\tilde{M}_1)\|\le\qquad(10)$$
$$\le\Bigg(2c_1nL\sum_{k+l=0}\Bigg(\sup_{G_1}\|f_{kl}(\tilde{M}_1)\|+$$
$$+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial f_{kl}}{\partial x}(M_1)\right\|+\sup_{G_1}\left\|\frac{\partial f_{kl}}{\partial x_\Delta}(M_1)\right\|\Bigg)\Bigg)\varepsilon=c_4\varepsilon,$$

якщо $\varepsilon_0\le\left(\dfrac{c_2n}{c_1}\right)^{\frac{m}{m-1}}$.

Застосуємо одержану в [10] оцінку осциляційного інтеграла для оцінки такого інтеграла:

$$R_3 = \int\limits_{2\varepsilon\Delta}^{L} \tilde{g}_{kl}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^{\tau}\gamma_{kl}(s,\varepsilon)ds\right)d\tau,$$

де

$$\tilde{g}_{kl}(\tau,\varepsilon) = f_{kl}(M_1)\exp\Bigg[i(k,\varphi)+i(l,\varphi_\Delta)-$$

$$-\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^{\tau}\gamma_{kl}(s,\varepsilon)ds\Bigg],$$

$$\gamma_{kl}(\tau,\varepsilon) = (k,\omega(\tau)) + (l,\omega(\tau-\varepsilon\Delta)).$$

Маємо

$$\|R_3\| \le c_5\varepsilon^{\frac{1}{m}}\sum_{\|k+l\|\neq 0}\left(\sup_{G_1}\|f_{kl}\|+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\|k+l\|}\sup_{G_1}\left\|\frac{df}{d\tau}\right\|\right) \le (1+a_1)a_2c_5\varepsilon^{\frac{1}{m}}. \quad (11).$$

Далі одержимо,

$$R_4 = \int\limits_{2\varepsilon\Delta}^{L}[\overline{f}(\tilde{M}_1)-\overline{f}(\overline{M}_1)]d\tau = Q_1(\varepsilon)\mu+$$

$$+\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}(\overline{M})P_{11}+\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}_\Delta}(\overline{M})P_{12}+P_1.$$

Тут

$\|P_{11}\| = \left\|\tilde{x}-\overline{x}-\frac{\partial\overline{x}}{\partial\overline{y}}\mu\right\| \le \frac{1}{2}na_3\|\mu\|^2$, де $a_3(\overline{x}) = \sum\limits_{\nu=1}^{n}\sup\left\|\frac{\partial^2\overline{x}}{\partial\overline{y}\partial\overline{y}_\nu}\mu\right\|$.

Така ж оцінка справджується і для $P_{12} = \tilde{x}_\Delta-\overline{x}_\Delta-\frac{\partial\overline{x}_\Delta}{\partial\overline{y}}\mu$.

Таким же чином одержується оцінка для P_1:

$$\|P_1\| = \left\|\overline{f}(M_1)-\overline{f}(\overline{M}_1)-\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}(\overline{M}_1)(\tilde{x}-\overline{x})-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}_\Delta}(\overline{M}_1)(\tilde{x}_\Delta-\overline{x}_\Delta)\right\| \le$$

$$c_1n\varepsilon^{\frac{1}{m}}\left(\sup\left\|\frac{\partial\overline{f}}{\partial x}\right\|+\sup\left\|\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_\Delta}\right\|\right)+\frac{1}{2}a_3(\overline{f})\|\mu\|^2 \le$$

$$\le c_6(\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\|\mu\|^2), c_6>0.$$

Для μ маємо рівняння

$$\mu = -Q_1^{-1}(\varepsilon)(R_1+R_2+R_3+P_1+\frac{\partial\overline{f}}{\partial\overline{x}}(M_1)P_{11}+$$

$$+\sup\left\|\frac{\partial\overline{f}}{\partial x_\Delta}P_{12}\right) \equiv M_1(\mu,\xi,\varepsilon).$$

На підставі нерівностей (8)-(10), оцінок для P_{11}, P_{12} і P_1 справджується нерівність

$$\|M_1\| \le c_7\varepsilon^\alpha + c_8\varepsilon^{-\chi_1}\|\mu\|^2,$$

де $c_7 = 4a_1\Delta + c_4 + (1+a_1)a_2c_5 + c_6$, $c_8 = a_1a_3(\alpha)n + c_6$.

Нехай $\|\mu\| \le 2c_7\varepsilon^\alpha$, $2c_7c_8\varepsilon_0^{\alpha-\chi_1} \le 1$. Тоді $\forall\xi\in\mathbb{R}^m$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$

$$\|M_1\| \le 2c_7\varepsilon^\alpha. \quad (12)$$

Отже, $M_1(\cdot,\xi,\varepsilon)$: $S_1\to S_1$, де S_1 – куля з радіусом $r_1 = 2c_7\varepsilon^\alpha$.

Аналогічно як в [8] доводиться, що для досить малого $\varepsilon_0>0$ відображення M_1 є стискаючим. Тому, на підставі теореми Брауера [12] $\forall(\xi,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m\times(0,\varepsilon_0]$ існує єдиний розв'язок $\mu=\mu(\xi,\varepsilon)$.

Доведемо, що $\exists\xi\in\mathbb{R}^m$ таке, що розв'язок системи (1) із значеннями $(\overline{y}+\mu(\xi,\varepsilon),\overline{\psi}+\xi(\varepsilon))$ задовольняє умову (3). Із (3) і (7) маємо

$$\xi = -Q_2^{-1}(\varepsilon)\Bigg\{\int\limits_0^{2\varepsilon\Delta}(A(M_1^0)\varphi-A(\overline{M}_1^0)\overline{\varphi}+g(M)-$$

$$-\overline{g}(M_1))d\tau+\int\limits_{2\varepsilon\Delta}^{L}[A(M_1^0)(\varphi-\tilde{\varphi})+(A(M_1^0)-$$

$$-A(\overline{M}_1^0))\tilde{\varphi}+A(\overline{M}_1^0)(\tilde{\varphi}-\overline{\varphi})+(\overline{g}(M_1)-\overline{g}(\overline{M}_1))+$$

$$+\sum_{k+l\neq 0}g_{kl}(M_1)\exp(i(k,\varphi)+(l,\varphi_\Delta))]d\tau\Bigg\} \equiv$$

$$\equiv M_2(\xi,\varepsilon).$$

Аналогічно, як була одержана оцінка (12), дістанемо

$$\|M_2(\xi,\varepsilon)\| \le c_9\varepsilon^{\alpha-\chi_2}\|\xi\| + c_{10}\varepsilon^{\alpha-\chi_2-1}. \quad (13)$$

Нерівність (13) виконується для всіх $(\xi,\varepsilon)\in\mathbb{R}^m\times(0,\varepsilon_0]$. Нехай

$$\|\xi\| \le r_2 = 2c_{10}\varepsilon^{\alpha-\chi_2-1}, \quad \varepsilon_0 \le (2c_9)^{1/(\chi_2-\alpha+1)}.$$

Тоді $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ маємо M_2: $S_2\to S_2$, де S_2 – куля в $\mathbb{R}^m$ з радіусом r_2. На підставі теореми Брауера з неперервності відображення M_2 по ξ $\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ випливає існування нерухомої точки $\xi=\xi(\varepsilon)$ відображення $M_2(\cdot,\varepsilon)$. Отже, існує розв'язок системи (1), який задовольняє інтегральні умови (2) і (3). Крім того,

$$\|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi(\varepsilon)\| \le$$
$$\le \|\varphi(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\tilde{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)\|+ \quad (14)$$
$$+\|\tilde{\varphi}(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\overline{y},\overline{\psi},\varepsilon)-\xi(\varepsilon)\| \le$$
$$\le c_2\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\|\mu\|c_9 \le c_2\varepsilon^{\frac{1}{m}}+2c_1c_{10}\varepsilon^{\alpha} \le 4c_1c_{10}\varepsilon^{\alpha},$$

якщо $\varepsilon_0 \le (2c_1c_{10}/c_2)^{1/\chi_1}$.

Об'єднавши оцінки (8) і (14) одержимо оцінку похибки методу усереднення із сталою $c_{11}=4c_1c_{10}$.

Нехай $2c_{11}\varepsilon_0^{\alpha}\le\rho$. Тоді крива $x=x(\tau,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon)$ лежить в ρ_1-околі розв'язку усередненої задачі для всіх $(\tau,\varepsilon)\in[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Арнольд В.И.* Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс // Докл. АН СССР. – 1965. – 161, № 1. – С. 9 – 12.

2. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 320 с.

3. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

4. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наукова думка, 2004. – 474 с.

5. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики.— М.: УРСС, 2002.— 416 с.

6. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 1. – С. 8 – 14.

7. *Бігун Я.Й.* Обгрунтування методу усереднення для нелінійних резонансних систем із запізненням // Нелінійні коливання. – 1999. – Т. 2, № 2. – С. 162 – 169.

8. *Бігун Я.Й.* Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореним аргументом та інтегральними крайовими умовами // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 5 – 10.

9. *Бігун Я.Й.* Дослідження багаточастотних коливних систем із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 15 – 20.

10. *Бігун Я.Й.* Усереднення крайових задач для багаточастотних систем із сталим запізненням // Вісник Київського ун-ту: Зб. наук. пр. – Сер. фіз.-мат. науки. – Київ, 2005.– Вип. №2. – С. 90 – 96.

11. *Медведев Г.Н., Моргунов Б.И.* Об асимптотическом решении методом усреднения некоторых систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Вестник МГУ. – Сер. 3. – М.: МГУ, 1968, № 2. – С. 109 – 111.

12. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. – М.: Мир, 1983. – 432 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2006