УДК 517.956.4

©2006 р. Т.М.Балабушенко, С.Д.Івасишен, В.П.Лавренчук, Л.М.Мельничук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ І ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Доведені теореми про розв'язність у спеціальних вагових L_p-просторах задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь зі зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^n$ при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами та оператором Бесселя за змінною $t \in \mathbb{R}$.

Theorems on a resolvability in special weight L_p-spaces of the Cauchy problem for one class of parabolic equations with growing coefficients on a variable $x \in \mathbb{R}^n$ as $|x| \to \infty$ and with Bessel operator on a variable $y \in \mathbb{R}$ are proved.

У попередній статті [1] для деяких параболічних рівнянь другого порядку з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами побудований та досліджений фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК). У даній статті означаються сім'ї спеціальних банахових просторів $L_p^{k(t,a)}$ і $L_p^{k(t,a),P}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$, функцій, які швидко зростають з ростом просторових змінних. Належністю до цих просторів характеризується еволюція в часі t розв'язків розглядуваних рівнянь. Доводяться теореми про розв'язність задачі Коші для рівнянь з [1] у просторах $L_p^{k(t,a)}$ і $L_p^{k(t,a),P}$, $t \in [0,T]$, $p \in [1,\infty]$. Аналогічні теореми для випадку $n = 1$ доведені в праці [2] одного з авторів.

1. Розглянемо рівняння

$$\partial_t u(t,X) = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l}u(t,X)+ + \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}(x_j u(t,X)) + B_y u(t,X), \quad (1)$$

$$\partial_t v(t,X) = \sum_{j=1}^{n}\Bigg(\partial_{x_j}^2 + 2b_j(x_j)\partial_{x_j} + +\Big(\frac{1}{2}-\frac{x_j^2}{4}+b_j^2(x_j)+b_j'(x_j)\Big)\Bigg)v(t,X)+B_y v(t,X), \quad (2)$$

$$t>0, X\in\mathbb{R}^{n+1},$$

де $X \equiv (x,y)$, $x \equiv (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$; $a_{jl} \in \mathbb{R}$, причому матриця $A \equiv (a_{jl})_{j,l=1}^n$ симетрична й додатно визначена; b_j, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – неперервно диференційовні функції в $\mathbb{R}^n$, b_j' – похідна від b_j; $B_y \equiv \partial_y^2 + ((2\nu+1)/y)\partial_y$ – оператор Бесселя, $\nu \geq 0$, $y > 0$; $\mathbb{R}^{n+1} \equiv \{X \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, y > 0\}$.

У праці [1] знайдені явні формули для ФРЗК G і Z відповідно для рівнянь (1) і (2). З цих формул виводяться оцінки

$$|\partial_x^k\partial_y^l\partial_\xi^m\partial_\eta^r G(t,X;\tau,\Xi)| \leq C_{klmr}\beta(t-\tau)\times \times(\alpha(t-\tau))^{-(|k|+|m|)/2}(t-\tau)^{-(l+r)/2}E(t-\tau,X,\Xi)\times \times\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t-\tau,X,\Xi), \quad t>\tau, \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1}, \{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+^n, \{l,r\}\subset\mathbb{Z}_+, \quad (3)$$

в яких $\Xi \equiv (\xi,\eta)$, $\alpha(t) \equiv 1-e^{-2t}$, $\beta(t) \equiv (\alpha(t))^{-n/2}t^{-\nu-1}$,

$$E(t,X,\Xi) \equiv \exp\{-c_1|x-e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)- -c_2(y-\eta)^2/t\},$$

$$\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi) \equiv \exp\{-\hat{c}_1|x-e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)\}\times \times T_y^\eta[\exp\{-\hat{c}_2 y^2/t\}],$$

$c_1 > 0$, $\hat{c}_1 > 0$, $c_2 \in (0,1/4)$, $\hat{c}_2 \equiv \frac{1}{4} - c_2$, T_y^η – оператор узагальненого зсуву, властивості якого досліджені в [3]. Для функції Z

правильна формула

$$Z(t,X;\tau,\Xi)=\exp\{\sum_{j=1}^{n}(-P_j(x_j)+P_j(\xi_j)+$$

$$+(x_j^2-\xi_j^2)/4)\}G(t,X;\tau,\Xi),$$

$$t>\tau,\quad \{X,\Xi\}\subset\mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{4}$$

де G – ФРЗК для рівняння (1), в якому $a_{jl}=\delta_{jl}$, $\{j,l\}\subset\{1,\dots,n\}$ (δ_{jl} – символ Кронекера), P_j – первісна функції b_j.

Наведемо означення потрібних норм і просторів.

Нехай a_1, a_2 і T – фіксовані числа такі, що $a_j>0$, $j\in\{1,2\}$, $0<T<\min(\frac{1}{2}\ln\frac{c_1+a_1}{a_1},\frac{c_2}{a_2})$; $\Pi\equiv(0,T]\times\mathbb{R}_+^{n+1}$;

$$k_1(t,a_1)\equiv\frac{c_1a_1e^{2t}}{c_1-a_1e^{2t}\alpha(t)}, k_2(t,a_2)\equiv\frac{c_2a_2}{c_2-a_2t},$$

$$\Phi_r(t,X)\equiv\exp\{r(k_1(t,a_1)|x|^2+k_2(t,a_2)y^2)\},$$

$$r\in\{-1,1\}, t\geq 0, X\in\mathbb{R}_+^{n+1}. \tag{5}$$

Нехай $u(t,X)$, $(t,X)\in\overline{\Pi}$, – задана комплекснозначна функція, вимірна за Лебегом при кожному $t\in[0,T]$. Для $t\in[0,T]$ і $1\leq p\leq\infty$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\equiv\|u(t,\cdot)\Phi_{-1}(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a),P}\equiv\Bigg\|u(t,X)\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}P_j(x_j)-\frac{|x|^2}{4}\right\}\Phi_{-1}(t,X)\Bigg\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)},$$

де $k(t,a)\equiv(k_1(t,a_1),k_2(t,a_2))$, $L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)$ – L_p-простір функцій φ: $\mathbb{R}_+^{n+1}\to\mathbb{C}$ відносно міри λ, пов'язаної з мірою Лебега рівністю

$$\lambda(A)=\int\limits_A y^{2\nu+1}dxdy. \tag{6}$$

Зауважимо при цьому, що для $1\leq p<\infty$

$$\|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi(X)|^pd\lambda(X)\right)^{1/p}=$$

$$=\left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi(x,y)|^py^{2\nu+1}dxdy\right)^{1/p}.$$

Позначимо через $L_p^{k(t,a)}$ і $L_p^{k(t,a),P}$ простори всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\varphi(X)$, $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, для яких скінченні відповідно норми $\|\varphi\|_p^{k(t,a)}$ і $\|\varphi\|_p^{k(t,a),P}$.

Нехай $\mathcal{B}$ – σ-алгебра борельових множин півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$, а M – сукупність усіх зліченно адитивних функцій ν: $\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ (узагальнених борельових мір), які мають скінченну повну варіацію $|\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$. Якщо для ν ввести норму за формулою $\|\nu\|\equiv|\nu|(\mathbb{R}_+^{n+1})$, то M стане банаховим простором, який можна ототожнити з простором, спряженим до простору $C_0(\mathbb{R}_+^{n+1})$ усіх таких неперервних функцій $\varphi(X)$, $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, що $|\varphi(X)|\to 0$ при $|X|\to\infty$, з рівномірною нормою. Через $M^{k(0,a)}$ позначимо сукупність усіх узагальнених борельових мір μ: $\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ таких, що функція

$$\nu(A)=\int\limits_A\Phi_{-1}(0,X)d\mu(X),\quad A\in\mathcal{B}_{n+1},$$

належить до простору M. При цьому для довільної $\mu\in M^{k(0,a)}$

$$\|\mu\|^{k(0,a)}\equiv\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\Phi_{-1}(0,X)d|\mu|(X)<\infty.$$

Використовуватимемо ще такі простори:

$M^{k(0,a),P}$ – сукупність усіх узагальнених борельових мір μ: $\mathcal{B}\to\mathbb{C}$ таких, що

$$\|\mu\|^{k(0,a),P}\equiv\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}P_j(x_j)-\frac{|x|^2}{4}\right\}\times$$

$$\times\Phi_{-1}(0,X)d|\mu|(X)<\infty;$$

$L_1^{-k(T,a)}$ і $L_1^{-k(T,a),-P}$ – множини всіх вимірних за Лебегом комплекснозначних функцій $\eta(X)$, $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, для яких скінченні відповідно норми

$$\|\eta\|_1^{-k(T,a)}\equiv\|\eta(X)\Phi_1(T,X)\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}\quad і$$

$$\left\| \eta(X) \exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n} P_j(x_j) + \frac{|x|^2}{4} \right\} \times \right.$$
$$\left. \times \Phi_1(T,X) \right\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)};$$

$C_0^{-k(T,a)}$ і $C_0^{-k(T,a),-P}$ – простори неперервних комплекснозначних функцій $\eta(X)$, $X \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, таких, що при $|X| \to \infty$ відповідно $\Phi_1(T,X)|\eta(X)| \to 0$ і

$$\exp\left\{ -\sum_{j=1}^{n} P_j(x_j) + \frac{|x|^2}{4} \right\} \Phi_1(T,X)|\eta(X)| \to 0.$$

Зауважимо, що функції (5) мають такі властивості:

$$k_j(t-\tau, k_j(\tau, a_j)) = k_j(t, a_j), j \in \{1,2\}, \quad (7)$$

$$E(t-\tau, X, \Xi)\Phi_1(\tau, \Xi) \le \Phi_1(t, X), \quad (8)$$
$$0 \le \tau < t \le T, \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}.$$

Рівності (7) перевіряються безпосередньо, доведення (8) зводиться до доведення нерівностей

$$-c_1 \frac{(x - e^{-(t-\tau)}\xi)^2}{\alpha(t-\tau)} + k_1(\tau, a_1)\xi^2 \le k_1(t, a_1)x^2,$$

$$-c_2 \frac{(y-\eta)^2}{t-\tau} + k_2(\tau, a_2)\eta^2 \le k_2(t, a_2)y^2,$$
$$0 \le \tau < t \le T, \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}.$$

Перша з цих нерівностей доведена в [4], а друга – в [5, с. 41 – 42].

Далі користуватимемося рівностями

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi) = \hat{C}e^{nt}, \quad (9)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(X) = \hat{C}, \quad (10)$$

$$t > 0, \{X, \Xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1},$$

які випливають з таких рівностей:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-\hat{c}_1|x - e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)\}d\xi =$$
$$= \pi^{n/2}(\alpha(t)/\hat{c}_1)^{n/2}e^{nt},$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{-\hat{c}_1|x - e^{-t}\xi|^2/\alpha(t)\}dx = \pi^{n/2}(\alpha(t)/\hat{c}_1)^{n/2},$$

$$\int\limits_0^\infty T_y^\eta[\exp\{-\hat{c}_2 y^2/t\}]\eta^{2\nu+1}d\eta =$$
$$= \int\limits_0^\infty T_\eta^y[\exp\{-\hat{c}_2 \eta^2/t\}]\eta^{2\nu+1}d\eta =$$
$$= \int\limits_0^\infty T_\eta^y[\exp\{-\hat{c}_2 \eta^2/t\}]y^{2\nu+1}dy = \hat{c}_1 t^{\nu+1}. \quad (11)$$

Перші дві рівності з (11) одержуються, якщо в інтегралах перейти відповідно від змінних ξ і x до z за формулою $x - e^{-t}\xi = (\alpha(t)/\hat{c}_1)^{1/2}z$. Доведення решти рівностей наведене в [2, 3].

2. Сформулюємо теореми про коректну розв'язність задачі Коші для рівнянь (1) і (2).

Теорема 1. *Для довільної функції* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, *та узагальненої міри* $\mu \in M^{k(0,a)}$ *формули*

$$u(t,X) \equiv \mathcal{Y}[\varphi](t,X) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), \quad (12)$$

$$u_0(t,X) \equiv \mathcal{Y}_0[\mu](t,X) \equiv$$
$$\equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi), \quad (13)$$

$$(t,X) \in \Pi,$$

визначають єдині розв'язки рівняння (1) в Π, *які задовольняють умову*

$$\partial_y u(t,X)|_{y=0} = 0, \quad t \in (0,T], x \in \mathbb{R}^n, \quad (14)$$

і мають такі властивості: існує стала $C > 0$, *яка не залежить від* φ *та* μ *і така, що для будь-якого* $t \in (0,T]$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^{k(0,a)}, \quad (15)$$

$$\|u_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\|\mu\|^{k(0,a)}; \qquad (16)$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t,a)} = 0, \qquad (17)$$

а при $p = \infty$ *і для функції (13)* $u(t,\cdot) \to \varphi$, $u_0(t,\cdot) \to \mu$, *коли* $t \to 0$, *слабко, тобто для довільних* η *відповідно із просторів* $L_1^{-k(T,a)}$ *і* $C_0^{-k(T,a)}$ *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u(t,X)d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X)d\lambda(X), \qquad (18)$$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u_0(t,X)d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)d\mu(X). \qquad (19)$$

Теорема 2. *Нехай* $\varphi \in L_p^{k(0,a),P}$, $1 \le p \le \infty$, *і* $\mu \in M^{k(0,a),P}$. *Тоді функції*

$$v(t,X) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,X;0,\Xi)\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi), \qquad (20)$$

$$v_0(t,X) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} Z(t,X;0,\Xi)d\mu(\Xi), \qquad (21)$$

$$(t,X) \in \Pi,$$

є єдиними розв'язками рівняння (2) в Π, *які задовольняють умову (14) та умови: для будь-якого* $t \in (0,T]$ *справджуються оцінки*

$$\|v(t,\cdot)\|_p^{k(t,a),P} \le C\|\varphi\|_p^{k(0,a),P},$$

$$\|v_0(t,\cdot)\|_1^{k(t,a),P} \le C\|\mu\|^{k(0,a),P};$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0} \|v(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t,a),P} = 0,$$

а при $p = \infty$ *для* v *і* v_0 *правильні співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)v(t,X)d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X)d\lambda(X),$$

$$\lim_{t\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)v_0(t,X)d\lambda(X) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)d\mu(X),$$

в яких η *– довільна функція відповідно із просторів* $L_1^{-k(T,a),-P}$ *і* $C_0^{-k(T,a),-P}$.

Інтеграли із (12), (20) та (13), (21) називатимемо *інтегралами Пуассона* відповідно функції φ та узагальненої міри μ.

Із теорем 1 і 2 випливає, що розв'язки (12) і (13) при кожному фіксованому $t \in (0,T]$ належать відповідно до просторів $L_p^{k(t,a)}$ і $L_1^{k(t,a)}$, а розв'язки (20) і (21) – відповідно до просторів $L_p^{k(t,a),P}$ і $L_1^{k(t,a),P}$.

Оскільки ФРЗК Z для рівняння (2) і G для рівняння (1) у частинному випадку пов'язані між собою формулою (4), то досить довести тільки теорему 1.

У наступних пунктах доводяться леми, з яких випливає, що формулами (12) і (13) визначаються розв'язки рівняння (1), які мають указані в теоремі 1 властивості. Єдиність розв'язків є наслідком теореми про інтегральне зображення розв'язків задачі Коші, яка буде доведена в наступній статті. У цій статті буде також установлена теорема, в певному розумінні обернена до теореми 1.

3. Наведемо властивості інтеграла Пуассона (12) функцій з просторів $L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$.

Лема 1. *Якщо* $\varphi \in L_p^{k(0,a)}$, $1 \le p \le \infty$, *то для функції (12) правильна нерівність*

$$\exists C > 0 \;\; \forall t \in (0,T]:$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\|\varphi\|_p^{k(0,a)}. \qquad (22)$$

Доведення. Нехай спочатку $p=\infty$. За допомогою (3), (8) і (9) маємо

$$|u(t,X)| \le C \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)(E(t,X,\Xi)\Phi_1(0,\Xi))\times$$

$$\times \hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)(|\varphi(\Xi)|\Phi_{-1}(0,\Xi))d\lambda(\Xi) \le$$

$$\le Ce^{nT}\|\varphi\|_\infty^{k(0,a)}\Phi_1(t,X), \quad (t,X)\in\Pi,$$

звідки випливає оцінка (22) для $p=\infty$.

Розглянемо випадок, коли $1<p<\infty$. Використовуючи оцінки (3) і (8), а також нерівність Гельдера для інтеграла відносно міри λ з (6), одержуємо

$$|u(t,X)| \le C\Phi_1(t,X)\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |\varphi(\Xi)|^p\Phi_{-p}(0,\Xi)\times$$

$$\times\beta(t)\hat{E}_{p\hat{c}_1/2,p\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)\times$$

$$\times\hat{E}_{p'\hat{c}_1/2,p'\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p'}, \quad (t,x)\in\Pi,$$

де число p' таке, що $1/p+1/p'=1$. Звідси за допомогою рівностей (9) і (10) маємо

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)} \le C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi(\Xi)|^p\Phi_{-p}(0,\Xi)\times$$

$$\times\beta(t)\hat{E}_{p\hat{c}_1/2,p\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Big)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p} =$$

$$= C\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi(\Xi)|^p\Phi_{-p}(0,\Xi)\Big(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)\times$$

$$\times\hat{E}_{p\hat{c}_1/2,p\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi)d\lambda(X)\Big)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p} =$$

$$= C\|\varphi\|_p^{k(0,a)}, \quad t\in(0,T].$$

Якщо $p=1$, то на підставі нерівностей (3) і (8) одержуємо

$$|u(t,X)| \le C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)(E(t,X,\Xi)\Phi_1(0,\Xi))\times$$

$$\times\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)(|\varphi(\Xi)|\Phi_{-1}(0,\Xi))d\lambda(\Xi) \le$$

$$\le C\Phi_1(t,X)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times$$

$$\times(|\varphi(\Xi)|\Phi_{-1}(0,\Xi))d\lambda(\Xi), \quad (t,X)\in\Pi,$$

звідки з урахуванням рівності (10) випливає оцінка

$$\|u(t,\cdot)\|_1^{k(t,a)} \le C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi(\Xi)|\Phi_{-1}(0,\Xi)\times$$

$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(X)\Bigg)d\lambda(\Xi) =$$

$$= C\|\varphi\|_1^{k(0,a)}, \quad t\in(0,T].$$

Зауваження. Використовуючи властивості ФРЗК, легко доводиться, що для будь-якої функції $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1\le p\le\infty$, функція (12) є розв'язком рівняння (1) в Π, який задовольняє умову (14).

З'ясуємо, в якому сенсі функція (12) задовольняє початкову умову.

Лема 2. *Нехай $\varphi\in L_p^{k(0,a)}$, $1\le p\le\infty$. Тоді для функції (12) правильні твердження (17) і (18).*

Доведення. Нехай $1\le p<\infty$. Треба довести, що

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall t\in(0,\delta):$$
$$\|\mathcal{Y}[\varphi](t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t,a)}<\varepsilon. \qquad (23)$$

Для $R>0$ означимо функцію $\varphi^{(R)}(X)$, $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, за допомогою рівностей

$$\varphi^{(R)}(X)\equiv\begin{cases}\varphi(X), & X\in C_R,\\ 0, & X\in\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_R,\end{cases} \qquad (24)$$

де $C_R\equiv\{X\in\mathbb{R}^{n+1}\,\big|\,|x|\le R, y\in(0,R]\}$. Маємо

$$\|\mathcal{Y}[\varphi](t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t,a)} \le \|\mathcal{Y}[\varphi-\varphi^{(R)}](t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}+$$

$$+\|\mathcal{Y}[\varphi^{(R)}](t,\cdot)-\varphi^{(R)}\|_p^{k(t,a)}+\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(t,a)},$$
$$t\in(0,T]. \qquad (25)$$

З леми 1 випливає нерівність

$$\|\mathcal{Y}[\varphi-\varphi^{(R)}](t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le C\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)},$$
$$t\in(0,T],$$

використовуючи яку та нерівності (25) і $\|\varphi\|_p^{k(t,a)}\le\|\varphi\|_p^{k(0,a)}$, $t\in(0,T]$, одержуємо

$$\|\mathcal{Y}[\varphi](t,\cdot)-\varphi\|_p^{k(t,a)}\le(C+1)\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)}+$$
$$+\|\mathcal{Y}[\varphi^{(R)}](t,\cdot)-\varphi^{(R)}\|_p^{k(t,a)},\quad t\in(0,T].$$

Нехай $\varepsilon>0$ задане. Виберемо $R>0$ так, щоб

$$\|\varphi-\varphi^{(R)}\|_p^{k(0,a)}=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_R}|\varphi(X)|^p\times$$
$$\times\Phi_{-p}(0,X)d\lambda(X)\Bigg)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{2(C+1)}.$$

Оскільки $\|g(t,\cdot)\|_p^{k(t,a)}\le\|g(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}$, то для доведення (23) досить довести, що

$$\exists\delta>0\ \ \forall t\in(0,\delta):\ \ I^{1/p}\equiv\|\mathcal{Y}[\varphi^{(R)}](t,\cdot)-$$
$$-\varphi^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (26)$$

Запишемо I у вигляді $I=I_1+I_2$, де

$$I_1\equiv\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{2R}}\left|\int\limits_{C_R}G(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(\Xi)d\lambda(\Xi)\right|^p d\lambda(X),$$

$$I_2\equiv\int\limits_{C_{2R}}\left|\int\limits_{C_R}G(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(\Xi)d\lambda(\Xi)\right|^p d\lambda(X).$$

При $p=1$ за допомогою (3), (10) і того, що для довільних $t\ge0$, $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{2R}$ і $\Xi\in C_R$ виконується принаймні одна з нерівностей

$$|x-e^{-t}\xi|^2\ge|\,|x|-e^{-t}|\xi|\,|^2\ge|\,|x|-|\xi|\,|^2\ge R^2,$$
$$|y-\eta|^2\ge|\,|y|-|\eta|\,|^2\ge R^2, \qquad (27)$$

одержуємо

$$I_1\le C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{2R}}\Bigg(\int\limits_{C_R}\beta(t)E(t,X,\Xi)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times$$
$$\times|\varphi^{(R)}(\Xi)|d\lambda(\Xi)\Bigg)d\lambda(X)\le CK(t,R)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}|\varphi^{(R)}(\Xi)|\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}}\beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(X)\Bigg)d\lambda(\Xi)\le$$
$$\le C\|\varphi^{(R)}\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}K(t,R),\quad t\in(0,T], \qquad (28)$$

де $K(t,R)$ дорівнює $\exp\{-c_1R^2/\alpha(t)\}$ або $\exp\{-c_2R^2/t\}$.

Нехай $p>1$. На підставі (3), (9), (27) і нерівності Гельдера для $X\in\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{2R}$ маємо

$$\left|\int\limits_{C_R}G(t,X;0,\Xi)\varphi^{(R)}(\Xi)d\lambda(\Xi)\right|\le CK(t,R)\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{C_R}|\varphi(\Xi)|^p\beta(t)\hat{E}_{p\hat{c}_1,p\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p}\times$$
$$\times\Bigg(\int\limits_{C_R}\beta(t)\hat{E}_{p'\hat{c}_1,p'\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p'}\le$$
$$\le CK(t,R)\Bigg(\int\limits_{C_R}|\varphi(\Xi)|^p\beta(t)\times$$
$$\times\hat{E}_{p\hat{c}_1,p\hat{c}_2}(t,X,\Xi)d\lambda(\Xi)\Bigg)^{1/p},$$

звідки за допомогою (10) одержуємо

$$I_1\le C\|\varphi^{(R)}|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}(K(t,R))^p,\quad t\in(0,T]. \qquad (29)$$

Оцінимо I_2. Нехай $\varphi_h^{(R)}$ – середня функція для $\varphi^{(R)}$. На підставі властивості середніх функцій

$$\|\varphi^{(R)}-\varphi_h^{(R)}\|_{L_p(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)}\to0,\quad h\to0. \qquad (30)$$

Оскільки $\varphi_h^{(R)}$ – нескінченно диференційовна фінітна функція, то з властивостей ФРЗК випливає, що при фіксованому $h > 0$ рівномірно щодо точок $X \in C_{2R}$, для яких $y \in [\varepsilon, R]$, $\varepsilon > 0$,

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t, X; 0, \Xi)\varphi_h^{(R)}(\Xi)d\lambda(\Xi) - \varphi_h^{(R)}(X) \right| \to 0, \quad t \to 0. \tag{31}$$

Маємо

$$I_2^{1/p} \le \left(\int\limits_{C_{2R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t, X; 0, \Xi)(\varphi^{(R)}(\Xi) - \varphi_h^{(R)}(\Xi))d\lambda(\Xi) \Big|^p d\lambda(X) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_{C_{2R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t, X; 0, \Xi)\varphi_h^{(R)}(\Xi)d\lambda(\Xi) - \varphi_h^{(R)}(X) \Big|^p d\lambda(X) \right)^{1/p} + \left(\int\limits_{C_{2R}} |\varphi_h^{(R)}(X) - \varphi^{(R)}(X)|^p d\lambda(X) \right)^{1/p}.$$

Повторивши для першого доданка оцінки, аналогічні наведеним при доведенні леми 1, та використавши співвідношення (30) і (31), одержимо, що

$$\exists \delta_2 > 0 \ \ \forall t \in (0, \delta_2) : I_2 < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{32}$$

З нерівностей (28) і (29) випливає, що

$$\exists \delta_1 > 0 \ \ \forall t \in (0, \delta_1) : I_1 < \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p,$$

а звідси та з (32) одержуємо

$$\forall t \in (0, \delta), \ \delta \equiv \min(\delta_1, \delta_2) : \ I < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

і, отже, нерівність (26).

Доведемо співвідношення (18). Спочатку відзначимо, що інтеграли із (18) мають зміст для довільних $\varphi \in L_\infty^{k(0,a)}$, $\eta \in L_1^{-k(T,a)}$ і $t \in (0, T]$, бо згідно з лемою 1 $\|u(t, \cdot)\|_\infty^{k(t,a)} < \infty$, $t \in (0, T]$, якщо $\varphi \in L_\infty^{k(0,a)}$. Справді, оскільки $k_i(0, a_i) \le k_i(t, a_i) \le k_i(T, a_i)$, $t \in (0, T]$, $i \in \{1, 2\}$, то

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u(t, X)d\lambda(X) \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (|\eta(X)|\Phi_1(T, X)) \times (|u(t, X)|\Phi_{-1}(t, X))d\lambda(X) \le \|\eta\|_1^{-k(T,a)} \times \|u(t, \cdot)\|_\infty^{k(t,a)} < \infty,$$

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)\varphi(X)d\lambda(X) \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (|\eta(X)|\Phi_1(T, X)) \times (|\varphi(X)|\Phi_{-1}(0, X))d\lambda(X) \le \|\eta\|_1^{-k(T,a)} \times \|\varphi\|_\infty^{k(0,a)} < \infty.$$

На підставі (12) для доведення (18) досить установити, що

$$W(t) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} (w(t, \Xi) - \eta(\Xi))\varphi(\Xi)d\lambda(\Xi) \to 0, t \to 0,$$

де

$$w(t, \Xi) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t, X; 0, \Xi)\eta(X)d\lambda(X). \tag{33}$$

Враховуючи нерівність

$$|W(t)| \le \|\varphi\|_\infty^{k(0,a)} \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |w(t, \Xi) - \eta(\Xi)|\Phi_1(0, \Xi)d\lambda(\Xi),$$

досить довести, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |w(t, \Xi) - \eta(\Xi)|\Phi_1(0, \Xi)d\lambda(\Xi) \to 0, t \to 0. \tag{34}$$

Оскільки $k_i(0, a_i) < k_i(T, a_i)$, то

$$\exists \gamma > 0 \ \ \forall t \in [0, \gamma) : \ k_i(T, a_i) \ge g_i(t) \ge k_i(0, a_i), \quad i \in \{1, 2\},$$

де

$$g_1(t) \equiv -\frac{c_1 k_1(T,a_1)e^{2t}}{c_1 + k_1(T,a_1)e^{2t}\alpha(t)},$$

$$g_2(t) \equiv \frac{c_2 k_2(T,a_2)}{c_2 + k_2(T,a_2)t}.$$

Тому замість (34) досить довести твердження

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta \in (0,\gamma) \ \ \forall t \in (0,\delta) :$$

$$\|w(t,\cdot) - \eta\|_1^{-g(t)} < \varepsilon, \tag{35}$$

де

$$\|v(t,\cdot)\|_1^{-g(t)} \equiv \|v(t,X)\Psi_1(t,X)\|_{L_1(\mathbb{R}_+^{n+1},\lambda)},$$

$$\Psi_r(t,X) \equiv \exp\{r(g_1(t)|x|^2 + g_2(t)y^2)\},$$

$$r \in \{-1,1\}.$$

Доведення (35) аналогічне доведенню (23). Так само, як і там, введемо для $R>0$ функцію $\eta^{(R)}$ за допомогою рівностей (24), в яких φ треба замінити на η. Для $t \in (0,\gamma)$ маємо

$$\|w(t,\cdot) - \eta\|_1^{-g(t)} \le$$

$$\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\cdot)(\eta - \eta^{(R)})(X)d\lambda(X)\Big\|_1^{-g(t)} +$$

$$+\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\cdot)\eta^{(R)}(X)d\lambda(X) - \eta^{(R)}\Big\|_1^{-g(t)} +$$

$$+\|\eta - \eta^{(R)}\|_1^{-g(t)} \equiv J_1 + J_2 + J_3. \tag{36}$$

Оцінимо J_1. За допомогою оцінки (3) маємо

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)(\eta - \eta^{(R)})(X)d\lambda(X)\Big| \le$$

$$\le C\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)(E(t,X,\Xi)\Phi_{-1}(T,\Xi))\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times$$

$$\times(|(\eta - \eta^{(R)})(X)|\Phi_1(T,X))d\lambda(X) \le$$

$$\le C\Psi_{-1}(t,\Xi)\int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\times$$

$$\times(|(\eta - \eta^{(R)})(X)|\Phi_1(T,X))d\lambda(X). \tag{37}$$

Тут використана нерівність

$$E(t,X,\Xi)\Phi_1(T,X) \le \Psi_{-1}(t,\Xi),$$

$$t>0, \{X,\Xi\} \subset \mathbb{R}_+^{n+1}, \tag{38}$$

яка доводиться так само, як (8).

Із (37) за допомогою (9) випливає, що

$$J_1 \le C\|\eta - \eta^{(R)}\|_1^{-k(T,a)}, \quad t \in (0,\gamma). \tag{39}$$

Оскільки $g_i(t) \le k_i(T,a_i)$, $t \in (0,\gamma)$, $i \in \{1,2\}$, то $J_3 \le \|\eta - \eta^{(R)}\|_1^{-k(T,a)}$, $t \in (0,\gamma)$, тому $J_1 + J_3 \le (C+1)\|\eta - \eta^{(R)}\|_1^{-k(T,a)}$, $t \in (0,\gamma)$. Враховуючи те, що

$$\|\eta - \eta^{(R)}\|_1^{-k(T,a)} = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_R} |\eta(X)|\Phi_1(T,X)d\lambda(X) \to 0,$$

$$R \to \infty,$$

маємо

$$J_1 + J_3 \to 0, R \to \infty, t \in (0,\gamma). \tag{40}$$

Розглянемо вираз J_2. Запишемо його у вигляді

$$J_2 = \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}\setminus C_{2R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\eta^{(R)}(X)d\lambda(X)\Big| \times$$

$$\times \Psi_1(t,\Xi)d\lambda(\Xi) + \int\limits_{C_{2R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\times$$

$$\times \eta^{(R)}(X)d\lambda(X) - \eta^{(R)}(\Xi)\Big| \Psi_1(t,\Xi)d\lambda(\Xi) \equiv$$

$$\equiv J_2' + J_2''.$$

Так само, як у випадку нерівності (39), доводиться, що

$$\Big\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\eta^{(R)}(X)d\lambda(X)\Big\|_1^{-g(t)} \le$$

$$\le C\|\eta^{(R)}\|_1^{-k(T,a)},$$

звідки випливає, що

$$J_2' \to 0, R \to \infty, t \in (0,\gamma). \tag{41}$$

Для J_2'' маємо

$$J_2'' \le C \int\limits_{C_{2R}} \Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\eta^{(R)}(X)d\lambda(X) - $$

$$-\eta^{(R)}(\Xi)\Big| d\lambda(\Xi).$$

Провівши для останнього інтеграла міркування, аналогічні вищепроведеним для I_2, одержимо $J_2'' \to 0$ при $t \to 0$, $R > 0$, звідки та із співвідношень (36), (40), (41) випливає твердження (35).

4. Властивості інтеграла Пуассона узагальнених мір описуються в наступній лемі.

Лема 3. *Нехай $\mu \in M^{k(0,a)}$. Тоді функція (13) є розв'язком рівняння (1) в Π, для якого виконуються умова (14), оцінка (16) і співвідношення (19).*

Доведення. Використовуючи нерівності (3) і (8), одержуємо

$$|u_0(t,X)| \le C \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)(E(t,X,\Xi)\Phi_1(0,\Xi))\times$$

$$\times \hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\Phi_{-1}(0,\Xi)d|\mu|(\Xi) \le C\Phi_1(t,X)\times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t)\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)\Phi_{-1}(0,\Xi)d|\mu|(\Xi),$$

$$(t,X) \in \Pi,$$

звідки за допомогою рівності (10) випливає оцінка (16).

Те, що u_0 є розв'язком рівняння (1), який задовольняє умову (14), випливає із властивостей ФРЗК.

Доведемо співвідношення (19). На підставі оцінки (11) інтеграли з (19) мають сенс для будь-яких $\eta \in C_0^{-k(T,a)}$, $\mu \in M^{k(0,a)}$ і $(0,T]$. Використовуючи формулу (13), одержуємо

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)u_0(t,X)d\lambda(X) - \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \eta(X)d\mu(X)\Big| \le$$

$$\le \|w(t,\cdot) - \eta\|_\infty^{-k(0,a)} \|\mu\|^{k(0,a)},$$

де w – функція із (33). Тому досить довести, що

$$\|w(t,\cdot) - \eta\|_\infty^{-g(t)} \to 0, t \to 0, \qquad (42)$$

де вектор-функція $g \equiv (g_1, g_2)$ та сама, що в п. 3.

Нехай $R > 0$ і θ_R – функція з $C^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$ така, що $0 \le \theta_R \le 1$ в $\mathbb{R}_+^{n+1}$, $\theta_R = 1$ в $C_{R/2}$ і $\theta_R = 0$ в $\mathbb{R}_+^{n+1} \setminus C_R$. Покладемо $\eta^{(R)} \equiv \theta_R \eta$. Для $t \in (0,\gamma)$ маємо

$$\|w(t,\cdot) - \eta\|_\infty^{-g(t)} \le \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\cdot)(\eta -$$

$$-\eta^{(R)})(X)d\lambda(X)\Big\|_\infty^{-g(t)} + \Big\| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\cdot)\times$$

$$\times\eta^{(R)})(X)d\lambda(X) - \eta^{(R)}(\cdot)\Big\|_\infty^{-g(t)} + \|\eta^{(R)} -$$

$$-\eta\|_\infty^{-g(t)} \equiv L_1 + L_2 + L_3. \qquad (43)$$

Так само, як при доведенні нерівностей (37), за допомогою рівності (10) одержуємо

$$\Big| \int\limits_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\cdot)(\eta - \eta^{(R)})(X)d\lambda(X)\Big| \le$$

$$\le C\|\eta - \eta^{(R)}\|_\infty^{-k(T,a)}\Psi_{-1}(t,\Xi),$$

звідки випливає, що $L_1 \le C\|\eta - \eta^{(R)}\|_\infty^{-k(T,a)}$, $t \in (0,\gamma)$.

На підставі нерівностей

$$g_i(t) \le k_i(t,a_i), \quad t \in (0,\gamma), \quad i \in \{1,2\},$$

маємо

$$L_3 \le \|\eta - \eta^{(R)}\|_\infty^{-k(T,a)}, \quad t \in (0,\gamma),$$

тому

$$L_1 + L_3 \le (C+1)\|\eta - \eta^{(R)}\|_\infty^{-k(T,a)}, \quad t \in (0,\gamma).$$

Оскільки

$$\|\eta - \eta^{(R)}\|_\infty^{-k(T,a)} \le \sup_{X \in \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus C_{R/2}} (|\eta(X)|\Phi_1(T,X)) \to 0,$$

$$R \to \infty,$$

то

$$L_1 + L_3 \to 0, \quad R \to \infty, t \in (0,\gamma). \qquad (44)$$

Далі маємо

$$L_2 \le \sup_{\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus C_{2R}} \Big(\Big| \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi) \eta^{(R)}(X) d\lambda(X) \Big| \times$$

$$\times \Psi_1(t,\Xi) \Big) + \exp\{(g_1(T)+g_2(T))R^2\} \times$$

$$\times \sup_{\Xi \in C_{2R}} \Big| \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} G(t,X;0,\Xi)\eta^{(R)}(X) d\lambda(X) -$$

$$-\eta^{(R)}(\Xi) \Big| \equiv L_2' + L_2''. \qquad (45)$$

За допомогою нерівностей (3), (27), (38) і рівності (10) одержуємо

$$L_2' \le \sup_{\Xi \in \mathbb{R}_+^{n+1} \setminus C_{2R}} \Big(C \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t) \hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi)(E(t,X,\Xi) \times$$

$$\times \Phi_{-1}(T,X))(|\eta^{(R)}(X)|\Phi_1(T,X)) d\lambda(X) \times$$

$$\times \Psi_1(t,\Xi) \Big) \le C \|\eta\|_\infty^{-k(T,a)} \hat{K}(t,R) \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} \beta(t) \hat{E}_{\hat{c}_1/2,\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi) d\lambda(X) = C\|\eta\|_\infty^{-k(T,a)} \times$$

$$\times \hat{K}(t,R) \to 0, t \to 0, \qquad (46)$$

де $\hat{K}(T,R)$ дорівнює $\exp\{-\hat{c}_1 R^2/(2\alpha(t))\}$ або $\exp\{-\hat{c}_2 R^2/(2t)\}$. Тут використана нерівність

$$\hat{E}_{\hat{c}_1,\hat{c}_2}(t,X,\Xi) \le \hat{E}_{\hat{c}_1/2,\hat{c}_2/2}(t,X,\Xi) \times$$

$$\times \exp\{-\hat{c}_1|x - e^{-t}\xi|^2/(2\alpha(t)) - \hat{c}_2(y-\eta)^2/(2t)\}, \qquad (47)$$

яка справджується на підставі нерівності (32) з [1].

Оскільки $\varphi^{(R)}$ – неперервна й обмежена функція, то згідно з властивостями ФРЗК для рівняння, спряженого до рівняння (1), маємо

$$L_2'' \to 0, \quad t \to 0, R > 0. \qquad (48)$$

Зі співвідношень (43) – (46) і (48) випливає потрібне співвідношення (42).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 288. Математика.— Чернівці: Рута, 2006. — С. 5 – 11.

2. *Ивасишин Л.М.* Интегральное представление и множества начальных значений решений параболических уравнений с оператором Бесселя и растущими коэффициентами.— Черновцы, 1992.— 62 с.— Деп. в УкрИНТЭИ 26.10.92, № 1731—Ук92.

3. *Левитан Б.М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.— 1951.— **6**, №2.— С.102—143.

4. *Вильчак В.В., Ивасишен С.Д.* О задаче Коши для некоторых параболических уравнений с растущими коэффициентами.— Черновиц. ун-т.— Черновы, 1991.— 45 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 9.08.91, № 1130—Ук91.

5. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.03.2006