УДК 517.9:532

©2006 р. М.Ю. Царков

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ АБСТРАКТНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ РУХУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Абсолютно тверде тіло, що обертається навколо фіксованої осі, має порожнину, заповнену рідиною. На основі класичних рівнянь руху даної гідросистеми виводяться більш загальні варіаційне рівняння (рівняння робіт) і операторне рівняння руху. Формулюються і доводяться результати про існування та властивості розв'язків цих рівнянь.

Perfectly rigid body revolves on its fixed axis and has a cavity with liquid. The generalized variational equations (actions equations) and operator motion equation are obtained on the basis of classical motion equations of this hydraulics. The assertions about existence and properties of the solutions of such equations are proved.

У монографії [1] задачі про рух в'язкої рідини досліджуються на основі варіаційного рівняння динаміки. В [2] використовується виключно метод ортогонального проектування, для жодної з розглянутих там гідродинамічних задач варіаційне рівняння не з'являється. В роботі [3] на прикладі задач, розглянутих в [2] і [4], показано, як використання варіаційного рівняння на порядок скорочує і спрощує громіздкі викладки. Порівняння згаданих підходів вказує на доцільність використання варіаційного рівняння, спроби його обійти приводять до ускладнень і менш повного дослідженні задачі. Зауважимо, що варіаційне рівняння руху — це аналітичний запис принципа Даламбера–Лагранжа і воно має самостійний інтерес.

В роботі, яка пропонується нижче, розглянута гідросистема, яка складається з абсолютно твердого тіла, що обертається навколо фіксованої осі і має порожнину, заповнену рідиною. На основі класичних рівнянь руху даної гідросистеми виводяться більш загальні варіаційне рівняння (рівняння робіт) і операторне рівняння руху. Формулюються і доводяться результати про існування та властивості розв'язків цих рівнянь.

Абсолютно тверде тіло, що обертається навколо фіксованої осі із сталою кутовою швидкістю ω_0, має порожнину, повністю або частково заповнену неоднорідною, в'язкою, нестислою рідиною. В прямокутній декартовій системі координат, яка жорстко зв'язана з тілом, порожнині відповідає область $G \subset \mathbb{R}^3$. Гідромеханічна система знаходиться в потенціальному силовому полі $\nabla U(x)$, де функція $U(x)$ двічі неперервно диференційована, а модуль $|\nabla U(x)|$ обмежений зверху та знизу додатними сталими. Позначимо $n(x) = \nabla U(x)/|U(x)|$. В стані рівноваги тиск $P_0(x)$ і щільність $\rho_0(x)$ зв'язані рівнянням $\nabla P_0(x) = \rho_0(x)\nabla U(x)$. Припускається, що щільність $\rho_0(x)$ має (еквіпотенціальну) поверхню розриву Γ, за межами якої, тобто на $G\backslash\Gamma$ її градієнт є неперервною до межі функцією. Щільність $\rho_0(x)$ є сталою на еквіпотенціальних поверхнях і вектори $\nabla U(x)$ і $\nabla\rho_0(x)$ колінеарні. Стан рівноваги природно вважати стійким: $\nabla U(x)\cdot\nabla\rho_0(x) \geq 0$ (тут і далі крапкою позначається скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$).

Розглядаються малі рухи рідини в порожнині, близькі до стану рівноваги. Нехай $u(x,t)$ — нестаціонарне векторне поле відхилень рідини від положення рівноваги, а $p(x,t)$ — відхилення тиску в рідині від тиску рівноваги $P_0(x)$. Таким чином, частинка рідини, яка в положенні рівноваги знаходилася в точці x, в момент часу t знаходиться в точці $x + u(x,t)$. В'язкість $\mu(t)$ є вимірною функцією часу, обмеженою зверху та знизу додатними числами.

Запишемо класичні лінеаризовані рівняння руху рідини. Штрихом позначається похідна по t. Дивергенція, градієнт та оператор Лапласа обчислюються по просторових змінних. В області G маємо рівняння нестисливості $\nabla u(x,t) = 0$, а в області $G \backslash \Gamma$ — рівняння динаміки

$$\rho_0(x)u''(x,t) - \mu(t)\triangle u'(x,t) +$$
$$+2\rho_0(x)(\omega_0 \times u'(x,t)) +$$
$$+(\nabla \rho_0(x) \cdot u(x,t))\nabla U(x) +$$
$$+\nabla p(x,t) = f(x,t).$$

На межі S області G виконується умова прилипання $u(x,t) = 0$, а на поверхні Γ — динамічна умова

$$[\tau]_\Gamma n = a(x)\zeta_u(x,t)n - h(x,t)n.$$

Тут τ — тензор напруги із компонентами τ_{ij}, рівними

$$p(x,t)\delta_{ij} - \mu(t)\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(x,t) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(x,t)\right),$$

$[\tau]_\Gamma$ — його стрибок на поверхні Γ, який обчислюється у відповідності із вибором нормалі $n(x)$, $a(x) = [\rho_0(x)]_\Gamma |\nabla U(x)|$ — функція, задана на поверхні Γ (стрибок $[\rho_0(x)]_\Gamma$ є сталою на зв'язних компонентах поверхні Γ, при його обчисленні на вільній поверхні вважаємо щільність нульовою в тій частині порожнини, де рідина відсутня), $\zeta_u(x,t) = u(x,t) \cdot n(x)$ — нормальна складова поля $u(x,t)$ на поверхні Γ. В рівняннях динаміки $f(x,t)$ і $h(x,t)$ — задані відповідно векторна та скалярна функції, які представляють малі зовнішні сили, що діють на систему.

Ці рівняння доповнюються початковими умовами:

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = v_0(x).$$

Уведемо два гільбертових простори V і H ([1], с.13). Спочатку зауважимо, що, як завжди, $L_2(G)$ — це простір вимірних на G функцій з інтегровним квадратом модуля, а $H^1(G)$ — це простір функцій, які мають узагальнені похідні першого порядку в $L_2(G)$. Простір H — це замикання в просторі $(L_2(G))^3$ лінеала векторних полів, які соленоїдальні в G і мають нескінченно диференційовні фінітні компоненти. Скалярний добуток в просторі H задається рівністю

$$(u,w)_H = \int_G \rho_0(x)u(x) \cdot w(x)dx.$$

Простір V — це замикання того ж самого лінеала в просторі $(H^1(G))^3$. Скалярний добуток вводимо наступним чином: $(v,w)_V = 1/2\, E(v,w)$, де $E(v,w)$ — білінійна форма

$$\int_G \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)dx.$$

З допомогою нерівності Корна доводиться, що всі аксіоми скалярного добутку виконуються. Скалярні добутки в просторах H і V — це білінійні форми, які з'являються далі у варіаційному рівнянні руху даної гідросистеми.

Векторне поле w з простору V має на Γ нормальну складову $\zeta_w(x) = w(x) \cdot n(x)$ внаслідок теореми про сліди. Для $q(x)$ з простору $H^1(G \backslash \Gamma)$ і $w(x)$ з простору V є вірною рівність

$$\int_G \nabla q(x) \cdot w(x)dx = \int_\Gamma [q(x)]_\Gamma \zeta_w(x)d\sigma.$$

Але ліва частина рівності існує також для $w \in H$ і в цьому випадку також залежить тільки від стрибка $[q(x)]_\Gamma$, що випливає із щільності V в H. Для полів $w \in H$ ліва частина приймається за означення для правої. Таким чином, для $w \in H$ нормальна складова $\zeta_w(x)$ на Γ вводиться як функціонал (узагальнена функція). Більш точно, це функціонал, визначений даною рівністю на функціях виду $[q(x)]_\Gamma$, де $q \in H^1(G \backslash \Gamma)$.

Нехай V' — простір, спряжений до V. Оскільки $V \subset H$ і простір V вкладений в простір H неперервно та щільно, то $H \subset V'$, де вкладення також неперервне та щільне. Простори V і V' утворюють оснащення простору H. Скалярний добуток простору H довизначається по неперервності так, що $(u,f)_H = (f,u)_H$ має сенс для $u \in V$ і $f \in V'$.

Оператор Рісса J, що лінійно та неперервно діє з V в V', визначається співвідношенням $(Ju,w)_H=(u,w)_V$. Він ізометричний та бієктивний.

Узагальнюючи сформульвані вище класичні умови нестислості та прилипання, будемо вважати далі, що нестаціонарне векторне поле відхилень $u(x,t)$ при кожному фіксованому t, як функція змінної x, є елементом простору V. Будемо позначати цей елемент $u(t)$. Абстрактна функція $u(t)$ із значеннями в просторі V описує рух рідини так само, як і нестаціонарне векторне поле $u(x,t)$.

До операторного рівняння руху даної гідродинамічної системи переходимо за два кроки, встановлюючи спочатку варіаційне рівняння руху і використовуючи далі загальні результати про білінійні форми.

Щоб вивести варіаційне рівняння, домножимо скалярно в $\mathbb{R}^3$ рівняння динаміки на векторне поле $w(x)$ з простору V, а результат проінтегруємо по області G. В одержаній інтегральній тотожності інтеграл, що містить $\nabla p(x,t)$, замінюємо, користуючись формулою

$$\int_G \nabla p(x,t)\cdot w(x)dx=\int_\Gamma [p(x,t)]_\Gamma \zeta_w(x)d\sigma,$$

а інтеграл, що містить $\triangle u'(x,t)$, перетворюємо, користуючись формулою

$$\int_G (\nabla(\nabla v(x)))\cdot w(x)dx+\int_G \triangle v(x)\cdot w(x)dx=$$

$$=\int_\Gamma \sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(x)+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\right]_\Gamma w_j(x)n_i d\sigma-$$

$$-\frac{1}{2}E(v,w).$$

Після цього, враховуючи динамічну умову на поверхні Γ, одержуємо варіаційне рівняння

$$\int_G \rho_0(x)u''(x,t)\cdot w(x)dx+$$

$$+\frac{1}{2}\,\mu(t)\,E(u'(x,t),w(x))+$$

$$+2\int_G \rho_0(x)(\omega_0\times u'(x,t))\cdot w(x)dx+$$

$$+\int_G (\nabla\rho_0(x)\cdot u(x,t))(\nabla U(x)\cdot w(x))dx+$$

$$+\int_\Gamma a(x)\zeta_u(x,t)\zeta_w(x)d\sigma=$$

$$=\int_G f(x,t)\cdot w(x)dx+\int_\Gamma h(x,t)\zeta_w(x)d\sigma.$$

Далі переходимо до операторного рівняння. Як показує нескладне оцінювання, білінійні форми

$$A(v,w)=2\int_G \rho_0(x)(\omega_0\times v(x))\cdot w(x)dx$$

і

$$B(u,w)=\int_G (\nabla\rho_0(x)\cdot u(x))(\nabla U(x)\cdot w(x))dx$$

визначені і неперервні на $H\times H$. За теоремою про зв'язок між неперервними білінійними формами та лінійними неперервними операторами існують такі лінійні та неперервні оператори A і B в просторі H, що ці форми дорівнюють відповідно $(Av,w)_H$ і $(Bu,w)_H$. Білінійна форма

$$C(u,w)=\int_\Gamma a(x)\zeta_u(x)\zeta_w(x)d\sigma$$

визначена і неперервна на прямому добутку $V\times H$, що випливає з такого її запису:

$$C(u,w)=\int_G \nabla(\rho_0(x)(u(x)\cdot\nabla U(x))\cdot w(x)dx.$$

Щоб одержати цей запис, ми використали дане вище означення нормальної складової $\zeta_w(x)$ як функціонала. Тут функція $\rho_0(x)(u(x)\cdot\nabla U(x))$ належить простору $H^1(G\backslash\Gamma)$. За теоремою про зв'язок між формами та операторами білінійна форма $C(u,w)$ дорівнює $(Cu,w)_H$, де лінійний та неперервний оператор C діє з V в H.

Припустимо, що для фіксованих значень t по змінній x векторне поле $f(x,t)$ належить простору $(L(G))^3$, а функція $h(x,t)$ — простору $L_2(\Gamma)$. Тоді права частина варіаційного рівняння при фіксованому t буде лінійним та неперервним функціоналом $F(t)$

по змінній $w \in V$. Права частина буде рівною $(F(t), w)_H$ — значенню цього функціонала на w.

З допомогою операторів A, B, C і введеного раніше оператора J варіаційне рівняння записується у вигляді

$$(u''(t), w)_H + \mu(t)(Ju'(t), w)_H + (Au'(t), w)_H +$$

$$+(Bu(t), w)_H + (Cu(t), w)_H = (F(t), w)_H.$$

Враховуючи, що w — довільний елемент з простору V, одержуємо операторне рівняння руху даної гідромеханічної системи:

$$u''(t) + \mu(t)Ju'(t) + Au'(t) +$$

$$+Bu(t) + Cu(t) = F(t). \qquad (1)$$

Рівняння доповнюється початковими умовами

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = v_0. \qquad (2)$$

Позначимо $L_2(0, T; V')$ — гільбертовий простір вимірних функцій із значеннями в просторі V', які визначені на $[0, T]$ і мають інтегровний на цьому відрізку квадрат норми. Аналогічно визначається простір $L_2(0, T; V)$.

Нехай $S(t)$ визначена на $[0, T]$ та обмежена за нормою оператор-функція, значеннями якої є лінійні та неперервні оператори, що діють з H в V'. Припускаємо, що для довільної вимірної на $[0, T]$ функції $u(t)$ із значеннями в H буде вимірною функція $S(t)u(t)$. Аналогічно визначається оператор-функція $T(t)$, але її значеннями є оператори, що діють з V в V'. Розглянемо рівняння

$$u''(t) + \mu(t)Ju'(t) +$$

$$+S(t)u'(t) + T(t)u(t) = F(t) \qquad (3)$$

разом з початковими умовами (2).

Доведення наступної теореми наведено в роботі [5].

Теорема 1. *Нехай функція $F(t)$ належить $L_2(0, T; V')$, а $u_0 \in V$ і $v_0 \in H$. Тоді існує і тільки одна неперервна на $[0, T]$ функція $u(t)$ із значеннями в V, така, що:*

1) узагальнена похідна $u'(t)$ належить простору $L_2(0, T; V)$ і також є неперервною на $[0, T]$ функцією із значеннями в H;

2) функція $u(t)$ задовольняє початкові умови (2) і в розумінні теорії узагальнених функцій задовольняє на $(0, T)$ рівняння (3).

Зауважимо, що в просторі H функція $u(t)$ має класичну похідну.

Рівняння (1) — це частинний випадок рівняння (3), тому для задачі (1), (2) є вірною сформульована теорема.

Для довільного $\alpha \geq 0$ введемо гільбертовий простір V_α як образ простору H при відображенні $J^{-\alpha/2}$ із скалярним добутком, який переноситься з H в V_α цим відображенням. Гільбертовий простір $V_{-\alpha}$ визначимо як спряжений до V_α. Одержали шкалу гільбертових просторів V_α, де $\alpha \in \mathbb{R}$. Виконуються рівності $V_1 = V$, $V_0 = H$ і $V_{-1} = V'$. Оператор J довизначається таким чином, що для довільного α його звуження на $V_{\alpha+2}$ буде ізометричним ізоморфізмом просторів $V_{\alpha+2}$ і V_α.

Теорема 2. *Нехай функція $F(t)$ має узагальнену похідну з простору $L_2(0, T; V')$, а функція $\mu(t)$ неперервно диференційована на $[0, T]$. Нехай $u_0 \in V$, $Jv_0 \in H$ і $F(0) \in H$. Тоді розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) є функцією із значеннями в V, такою, що:*

1) похідна $u'(t)$ неперервна на $[0, T]$ як функція із значеннями в V;

2) узагальнена похідна $u''(t)$ належить простору $L_2(0, T; V)$ і неперервна на $[0, T]$, як функція із значеннями в H.

Якщо додатково вимагати, що $F(t)$ неперервна на $[0, T]$ як функція із значеннями в H, то одержимо, що $Ju'(t)$ неперервна на $[0, T]$ як функція із значеннями в H.

Доведення. Кожна з функцій $F(t)$, $Au'(t)$, $Bu(t)$, $Cu(t)$, $Ju'(t)$ неперервна на $[0, T]$, як функція із значеннями в V_{-2}. Тому вони визначені в кожній точці відрізка $[0, T]$. Якщо в (1) прийняти $t = 0$, то одержимо співвідношення, всі члени якого, крім $u''(0)$, внаслідок зроблених припущень належать простору H. Тому $w_0 = u''(0) \in H$.

Розглянемо допоміжне рівняння

$$v''(t) + \mu(t)Jv'(t) + Av'(t) +$$
$$+\mu'(t)Jv(t) + Bv(t) + Cv(t) = F'(t)$$

з початковими умовами

$$v(0) = v_0, \qquad v'(0) = w_0.$$

Для цієї задачі виконуються умови попередньої теореми. Тому розв'язок $v(t)$ має узагальнену похідну $v'(t)$ з простору $L_2(0,T;V)$, яка є неперервною на $[0,T]$ функцією із значеннями в H. Розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) і розв'язок $v(t)$ допоміжної задачі зв'язані рівністю

$$u(t) = u_0 + \int_0^t v(s)ds.$$

Для підтвердження достатньо показати, що функція з правої частини рівності також є розв'язком задачі (1), (2). Початкові умови (2) вона, очевидно, задовольняє. З означення елемента w_0 випливає, що вона задовольняє рівняння (1) при $t = 0$. Використовуючи цей факт і інтегруючи допоміжне рівняння по відрізку $[0,t]$, одержуємо, що вона задовольняє рівняння (1) на $[0,T]$. Якщо додатково маємо, що $F(t)$ неперервна на $[0,T]$ як функція із значеннями в H, то в рівнянні (1) всі елементи, крім $Ju'(t)$, неперервні на $[0,T]$ як функції із значеннями в H, тому і $Ju'(t)$ буде мати таку властивість. Теорема доведена.

Процитуємо монографію [6, с.132]: „В механике сплошной среды основную роль играют не массовые , а поверхностные, т.е. распределенные на поверхности сплошной среды силы “. Постановка розглянутої нами задачі передбачає врахування поверхневих сил. Функція $h(x,t)$ представляє сили, які діють на поверхні Γ. Якщо рідина частково заповнює порожнину твердого тіла, то певна частина Γ є вільною поверхнею. Без додаткових ускладнень можна також розглядати поверхневі сили, які діють на інших поверхнях всередині рідини.

Частинні випадки дослідженої вище задачі розглядалися раніше методом ортогонального проектування і методом допоміжних задач С.Г.Крейна в роботах [2, 7—11]. При використанні цих відносно складних підходів наявність поверхневих сил виключалась. Таким чином, порівнювати результати можна тільки при додатковому припущенні про відсутність поверхневих сил, яке означає, що функція $F(t)$ приймає значення з простору H. Зауважимо, що результат теореми 2, який стосується цього випадку, новий, такі умови на $F(t)$ раніше не розглядалися. Наведемо ще один результат.

Теорема 3. *Нехай $F(t)$ належить простору $L_2(0,T;V_0)$, тобто $L_2(0,T;H)$, а $u_0 \in V_2$ і $v_0 \in V_1$. Тоді розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) неперервний на $[0,T]$ як функція із значеннями в V_2, а його похідна належить простору $L_2(0,T;V_2)$ і неперервна на $[0,T]$ як функція із значеннями в V_1. Якщо, більше того, в'язкість $\mu(t)$ є сталою, а $F(t)$ задовольняє на $[0,T]$ умову Гельдера як функція із значеннями в $H = V_0$ або є неперервною на $[0,T]$ функцією із значеннями в V_α при деякому $\alpha > 0$, то похідна $u'(t)$ неперервна $[0,T]$ як функція із значеннями в V_2.*

Доведення. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$u''(t) + \mu(t)Ju'(t) = F_1(t), \tag{4}$$

де

$$F_1(t) = F(t) - Au'(t) - Bu(t) - Cu(t).$$

Функція $F_1(t)$ належить класу $L_2(0,T;V_0)$, оскільки $Au'(t)$, $Bu(t)$ і $Cu(t)$ неперервні на $[0,T]$ як функції із значеннями в V_0. Функція $u(t)$ є єдиним розв'язком задачі (4), (2). Теорема 1 сформульована для трійки просторів $V \subset H \subset V'$. Але вона може бути застосована до трійки $V_2 \subset V_1 \subset V_0$, оскільки існує ізометричний ізоморфізм цих трійок. Ізоморфізм здійснює оператор $J^{-1/2}$. Цим доведена перша частина теореми.

Якщо виконуються додаткові умови, то (див. [12]) розв'язок $u_0(t)$ рівняння

$$u''(t) + \mu Ju'(t) = F(t),$$

який задовольняє нульові початкові умови, є неперервно диференційованою на $[0,T]$ функцією із значеннями в V_2. Його друга похідна є неперервною на $[0,T]$ функцією із значеннями в V_0. Виконуючи в задачі (1), (2) заміну невідомої функції $u(t)$ на $u(t)+u_0(t)$, одержимо рівняння

$$u''(t)+\mu(t)Ju'(t)+Au'(t)+Bu(t)+Cu(t)=$$
$$=-Au_0'(t)-Bu_0(t)-Cu_0(t)$$

з тими ж початковими умовами (2). Права частина цього рівняння є неперервно диференційованою функцією із значеннями в V_0, тому за теоремою 2 функція $Ju'(t)$ неперервна на $[0,T]$ як функція із значеннями в H, а $u'(t)$ — в V_2. Теорема доведена.

Частинний випадок дослідженої вище гідросистеми для конкретного зовнішнього силового поля $\nabla U(x)$, при додаткових припущеннях про межу області G і розподіл щільності $\rho_0(x)$ розглядався в [10] для $F(t)$, яка задовольняє умову Гельдера.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса.— М.: Мир, 1981.— 408 с.

2. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике.— М.: Наука, 1989.— 416 с.

3. *Царьков М.Ю.* О методе ортогонального проектирования в задачах линейной гидродинамики // Деп. в ГНТБ Украины 16.12.92, N1971-Ук92.

4. Малые движения и собственные колебания идеальной вращающейся жидкости / Н.Д. Копачевский // Препринт ФТИНТ АН УССР.— Харьков, 1978.— 54 с.

5. *Царьков М.Ю.* О разрешимости возмущенного абстрактного параболического уравнения // Труды математического факультета. Симферополь, СГУ.— 1997.— С.103—106.

6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды.— М.: Наука, 1973. — 536 с.

7. Малые движения и нормальные колебания системы тяжелых вязких вращающихся жидкостей / Н.Д. Копачевский // Препринт ФТИНТ АН УССР.— Харьков, 1978.— 60 с.

8. *Цветков Д.О.* Малые движения стратифицированной жидкости // Ученые записки ТНУ им. В.И.Вернадского, серия „Математика. Механика. Информатика и кибернетика“.— Симферополь, 2002.— **15(54)**, № 2.— С.99—104.

9. *Цветков Д.О.* Малые движения вязкой стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде // Межведомственный научный сборник „Динамические системы“.— Симферополь, 2001.— **Вып. 17**.— С.126—132.

10. *Цветков Д.О.* Малые движения вязкой стратифицированной жидкости во вращающемся сосуде // Таврический вестник информатики и математики.— Симферополь, 2003.— № 1.— С.140—149.

11. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / под ред. А.Д.Мышкиса.— Киев.: Наукова думка, 1992.— 590 с.

12. *Лопушанський А.О.* Розв'язність неоднорідної задачі Коші для абстрактних параболічних рівнянь у комплексних інтерполяційних шкалах // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика.— 2004.— Вип.191—192.— С.89—94.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2005