УДК 517.9

©2006 р. В.Ю. Слюсарчук

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

ТЕОРЕМА ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ c-НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ОБМЕЖЕНИХ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Наведено теорему про нерухому точку для c-неперервних операторів, що діють у просторі $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$.

A fixed point theorem for a c-continuous mappings in the space $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$, are obtained.

1. c-Неперервні оператори.

Позначимо через $l_p = l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ банахів простір усіх відображень $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, для кожного з яких $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| < \infty$, якщо $p = \infty$, і $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p < \infty$, якщо $p \in [1,\infty)$, з нормою

$$\|x\|_{l_p} = \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|, & \text{якщо } p = \infty, \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\right)^{1/p}, & \text{якщо } p \in [1,\infty). \end{cases}$$

Для множини $M \subset \mathbb{Z}$ визначимо оператор $I_M : l_p \longrightarrow l_p$ рівністю

$$(I_M x)(n) = \begin{cases} x(n), & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \in \mathbb{Z} \setminus M, \end{cases}$$

де $x \in l_p$.

Говоритимемо, що послідовність $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, *локально збігається* до елемента $x \in l_p$ при $k \to \infty$, і позначатимемо

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_p} x \text{ при } k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \|I_M(x_k - x)\|_{l_p} = 0$$

для кожної скінченної множини $M \subset \mathbb{Z}$.

Оператор $F : l_p \longrightarrow l_p$ називатимемо *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_p$ і послідовності $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_p} x$ при $k \to \infty$, випливає, що $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_p} Fx$ при $k \to \infty$.

Поняття c-неперервного оператора було введено (на мові "ε, δ") Е. Мухамадієвим [1] при дослідженні диференціальних операторів, і було продовжено його вивчення в [2]–[9] та інших роботах. Розглянуте вище означення c-неперервного оператора було введено автором (див., наприклад, [10,11]).

Зауважимо, що c-неперервний оператор може не бути неперервним.

Приклад 1. Оператор $A : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, визначений рівністю

$$(Ax)(n) = \{nx(n)\},\ n \in \mathbb{Z},$$

де $\{nx(n)\}$ – дробова частина числа $nx(n)$, очевидно, є c-неперервним. Однак, у точці $x = 0$ для A порушується властивість неперервності. Справді,

$$A0 = 0$$

і для елементів $x_m \in l_\infty$, $m \in \mathbb{N}$, де

$$x_m(n) = \frac{1}{m+1} \text{ для всіх } n \in \mathbb{Z},$$

виконуються співвідношення

$$\frac{1}{2} \le \|Ax_m\|_{l_\infty} < 1,$$

$$\lim_{m\to\infty} \|x_m\|_{l_\infty} = 0,$$

$$\lim_{m\to\infty} \|Ax_m\|_{l_\infty} \ne \|A0\|_{l_\infty}.$$

2. Множини $cl_{l_p}S$ і $cl_{l_p}^{\text{лок}}S$.

Для множини $S \subset l_p$ позначимо через $cl_{l_p}^{\text{лок}}S$ множину всіх таких елементів x простору l_p, для кожного з яких існує послідовність $x_k \in S$, $k \geq 1$, що $x_k \xrightarrow{\text{лок.},\ l_p} x$ при $k \to \infty$. Замикання множини S у просторі l_p позначимо через $cl_{l_p}S$.

Зауважимо, що $cl_{l_p}S \subset cl_{l_p}^{\text{лок}}S$ *для кожного простору* l_p, $1 \leq p \leq \infty$, *і множини* $cl_{l_p}^{\text{лок}}S$ *і* $cl_{l_p}S$ *можуть не збігатися.*

Приклад 2. Розглянемо елементи

$$e_k(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = k, \\ 0, & \text{якщо } n \neq k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N},$$

простору l_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Очевидно, що

$$cl_{l_p}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$0 \in cl_{l_p}^{\text{лок}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$$

і

$$0 \notin cl_{l_p}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Отже,

$$cl_{l_p}^{\text{лок}}\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \neq cl_{l_p}\{e_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

3. Основні задача і теорема.

Далі використовуватимемо поняття опуклої множини, опуклої оболонки множини і замкненої опуклої оболонки множини. Нагадаємо, що підмножина A топологічного векторного простору X називається *опуклою*, якщо для довільних векторів $x \in A$, $y \in A$ і чисел $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ $(\lambda + \mu = 1)$ вектор $\lambda x + \mu y$ є елементом множини A. *Опуклою оболонкою множини* A називається множина

$$\text{co}\, A = \bigcup_{x,y \in A} \{\lambda x + \mu y : \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\}.$$

Замкненою опуклою оболонкою множини A називається замикання її опуклої оболонки, тобто множина cl_X co A.

Важливою в нелінійному функціональному аналізі є

Теорема 1 (Шаудер [12,13]). *Якщо* Ω *– замкнена опукла обмежена підмножина банахового простору* X *і* $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ *– цілком неперервний оператор, то тоді* F *має нерухому точку.*

Метою цієї статті є встановлення аналога теореми 1 для c-неперервних операторів, що діють у просторі l_p.

Справедлива

Теорема 2. *Нехай:*
1) $1 \leq p \leq \infty$;
2) $\mathcal{V}$ *– обмежена опукла підмножина простору* l_p;
3) $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V} = \mathcal{V}$;
4) $\mathfrak{N} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *– c-неперервний оператор.*

Тоді існує хоча б одна точка $x \in \mathcal{V}$, *така, що*

$$\mathfrak{N}x = x.$$

Встановлюється ця теорема за допомогою теореми 1 і наступного твердження.

Лема 1 ([14]). *Для кожної обмеженої послідовності елементів* $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, *існують такі строго зростаюча послідовність чисел* $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ *і елемент* $x \in l_p$, *що*

$$x_{k_l} \xrightarrow{\text{лок.},\ l_p} x \text{ при } l \to \infty$$

і

$$\|x\|_{l_p} \leq \sup_{k \geq 1} \|x_k\|_{l_p}.$$

Доведення теореми 2. Розглянемо множини $M_k = [-k, k] \cap \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Використаємо оператори I_{M_k}, $k \in \mathbb{N}$, що визначаються аналогічним чином, як і оператор I_M. З умов теореми випливає, що $I_{M_k}l_p$ – скінченновимірний підпростір простору l_p, $I_{M_k}\mathcal{V}$ – обмежена замкнена опукла підмножина простору l_p і оператор $I_{M_k}\mathfrak{N}$ неперервний на $\mathcal{V}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Тому множини $I_{M_k}\mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, є компактними. Отже, для кожного $k \in \mathbb{N}$ існують елементи $x_{1,k} \in \mathcal{V}, \ldots, x_{\nu(k),k} \in \mathcal{V}$ такі, що множина $\left\{I_{M_k}x_{1,k}, \ldots, I_{M_k}x_{\nu(k),k}\right\}$ буде скінченною $\dfrac{1}{2k}$-сіткою множини $I_{M_k}\mathcal{V}$ [15], тобто для будь-якої точки $x \in I_{M_k}\mathcal{V}$ існує хоча б одна точка $a \in \left\{I_{M_k}x_{1,k}, \ldots, I_{M_k}x_{\nu(k),k}\right\}$, для якої

$$\|x - a\|_{l_p} \leq \frac{1}{2k}.$$

Покриємо множину $I_{M_k}\mathcal{V}$ відкритими кулями $S_{1,k}$,. . .,$S_{\nu(k),k}$ радіуса $\dfrac{1}{k}$ із центрами відповідно в точках $I_{M_k}x_{1,k},\ldots,I_{M_k}x_{\nu(k),k}$.

Нехай неперервні функції

$$\psi_{1,k}(x),\ldots,\psi_{\nu(k),k}(x)$$

утворюють *розбиття одиниці* на множині $I_{M_k}\mathcal{V}$ [13,16], узгоджені з покриттям $I_{M_k}\mathcal{V}$ кулями $S_{1,k}$,. . .,$S_{\nu(k),k}$, тобто

$$\psi_{i,k}(x)\geq 0,\ \sum_{i=1}^{\nu(k)}\psi_{i,k}(x)=1 \text{ для } x\in I_{M_k}\mathcal{V}$$

і

$$\psi_{i,k}(x)=0 \text{ для } x\in I_{M_k}\mathcal{V}\setminus S_{i,k}.$$

Визначимо рівністю

$$\mathfrak{N}_k x=\sum_{i=1}^{\nu(k)}\psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x)x_{i,k}$$

неперервний оператор $\mathfrak{N}_k:\mathcal{V}\longrightarrow l_p$. Очевидно, що для всіх $x\in\mathcal{V}$

$$\mathfrak{N}_k x\in \text{co }\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}, \qquad (1)$$

і

$$\|\mathfrak{N}_k x-\mathfrak{N}x\|_{l_p}=$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{\nu(k)}\psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x)[x_{i,k}-\mathfrak{N}x]\right\|_{l_p}.$$

Якщо

$$\psi_{i,k}(I_{M_k}\mathfrak{N}x)>0,$$

то

$$I_{M_k}\mathfrak{N}x\in S_{i,k}$$

і

$$\|x_{i,k}-\mathfrak{N}x\|_{l_p}<\frac{1}{k}.$$

Отже,

$$\|\mathfrak{N}_k x-\mathfrak{N}x\|_{l_p}<\frac{1}{k} \text{ для всіх } x\in\mathcal{V}. \qquad (2)$$

Оскільки множина $\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}$ містить скінченне число елементів, то замкнена опукла оболонка цієї множини збігається з co $\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}$ і co $\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}$ є компактною множиною. Також на підставі (1) справджується співвідношення

$$\mathfrak{N}_k \text{ co }\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}\subset$$
$$\subset \text{co }\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}.$$

Тому за теоремою 1 оператор $\mathfrak{N}_k$ має нерухому точку $x_k^*\in$ co $\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}$, тобто

$$\mathfrak{N}_k x_k^*=x_k^*. \qquad (3)$$

Нехай $k\to\infty$. Завдяки другій і третій умовам теореми, співвідношенню

$$\text{co }\left\{x_{1,k},\ldots,x_{\nu(k),k}\right\}\subset\mathcal{V}$$

та лемою 1 існують елемент $u\in\mathcal{V}$ і підпослідовність $(x_{k_m}^*)_{m\geq1}$ послідовності $(x_k^*)_{k\geq1}$, для яких

$$x_{k_m}^*\xrightarrow{\text{лок., } l_p} u \text{ при } m\to\infty. \qquad (4)$$

Оскільки для кожного $n\in\mathbb{Z}$

$$|u(n)-(\mathfrak{N}u)(n)|\leq$$
$$\leq|u(n)-x_{k_m}^*(n)|+|x_{k_m}^*(n)-(\mathfrak{N}_{k_m}x_{k_m}^*)(n)|+$$
$$+|(\mathfrak{N}_{k_m}x_{k_m}^*)(n)-(\mathfrak{N}x_{k_m}^*)(n)|+$$
$$+|(\mathfrak{N}x_{k_m}^*)(n)-(\mathfrak{N}u)(n)|,$$

то на підставі (2)–(4) та четвертої умови теореми

$$\mathfrak{N}u=u.$$

Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. *Нехай:*
1) $1\leq p\leq\infty$;
2) S *– замкнена куля простору* l_p;
3) $\mathfrak{N}:S\longrightarrow S$ *– c-неперервний оператор.*

Тоді існує принаймні одна точка $x\in S$, *така, що*

$$\mathfrak{N}x=x.$$

Зауважимо, що в теоремі 2 третю умову не можна замінити умовою $cl_{l_p}\mathcal{V}=\mathcal{V}$ [14].

4. Застосування теореми 2 до дискретних рівнянь.

Для рівняння

$$\mathcal{A}x+\mathcal{B}x=f, \qquad (5)$$

де $\mathcal{A} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ і $\mathcal{B} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ – відповідно лінійний і нелінійний оператори і f – довільний елемент простору l_∞, наведемо достатні умови існування обмежених розв'язків.

Теорема 3. *Нехай*:
1) *лінійний оператор* $\mathcal{A} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ *є с-неперервним і має обернений неперервний оператор*;
2) *нелінійний оператор* $\mathcal{B} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ *є с-неперервним і задовольняє умову*

$$\overline{\lim_{r \to +\infty}} \sup_{\|y\|_{l_\infty} \le r} \frac{\|\mathcal{B}y\|_{l_\infty}}{r} < \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|^{-1}.$$

Тоді рівняння (5) *для кожного* $f \in l_\infty$ *має принаймні один розв'язок* $x \in l_\infty$.

Ця теорема є наслідком теореми 2 та наступного твердження.

Теорема 4 ([4]). *Нехай* E *– скінченновимірний банахів простір і лінійний оператор* $\mathcal{A} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ *є с-неперервним і має обернений неперервний оператор* $\mathcal{A}^{-1}$.

Тоді оператор $\mathcal{A}^{-1}$ *є с-неперервним.*

Доведення теореми 3. Завдяки умовам теореми рівняння (5) еквівалентне рівнянню

$$x = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}x + \mathcal{A}^{-1}f. \tag{6}$$

Розглянемо оператор $\mathfrak{N} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, що визначається співвідношенням

$$\mathfrak{N}y = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{-1}f, \ y \in l_\infty(G, E).$$

На підставі другої умови теореми оператор $\mathfrak{N}$ є c-неперервним і для досить великого $r > 0$ справджується співвідношення

$$\mathfrak{N}S[0, r] \subset S[0, r],$$

де

$$S[0, r] = \{x \in l_\infty : \|x\|_{l_\infty} \le r\}.$$

Тому за наслідком 1, що є окремим випадком теореми 3, рівняння (6) має принаймні один розв'язок $x \in l_\infty$.

Теорему 3 доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки.— 1972.— **11**, № 3.— С. 269–274.

2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Душанбе. 1978.— 289 с.

3. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб.— 1981.— **116**(158), № 4(12).— С. 483–501.

4. *Слюсарчук В.Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР.— 1981.— сер.А, № 8.— С. 34–37.

5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб.— 1986.— **130**(172), № 1(5).— С. 86–104.

6. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки.— 1987.— **42**, № 2.— С. 262–267.

7. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 2.— С. 201–205.

8. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения.- – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.— 168 с.

9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев. 1993.— 255 с.

10. *Слюсарчук В.Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений.— Душанбе. 1987.— С. 102–103.

11. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Математическая физика и нелинейная механика.— 1991.— Вып. 15(49).— С. 32–35.

12. *Schauder J.* Die Fixpunktsatz in Funktionalräume // Studia Math.— 1930.— **2**.— P. 171–180.

13. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.

14. *Слюсарчук В.Ю.* Теорема про нерухому точку для c-неперервних операторів у просторах обмежених послідовностей // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. Чернівці: Рута, 2002 – С. 87–93.

15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

16. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.03.2006