УДК 517.95

©2006 р. Н.В.Салдіна

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

# ІДЕНТИФІКАЦІЯ СТАРШОГО КОЕФІЦІЄНТА В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ З ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення невідомого коефіцієнта $a(t)t^{\beta 1}, 0<\beta 1<1$ при старшій похідній у повному параболічному рівнянні зі слабким виродженням.

We establish conditions for existence and uniqueness of a solution of inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation with unknown coefficient $a(t)t^{\beta 1}, 0<\beta 1<1$ at the higher-order derivative.

В області $Q_T \equiv \{(x,t): 0<x<h, 0<t<T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)t^{\beta 1}u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)>0, t\in[0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad x\in[0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t)=\mu_1(t), \quad u(h,t)=\mu_2(t), \quad t\in[0,T] \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,t)=\mu_3(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$

Обернені задачі з виродженням розглядались в роботах [1-3] для рівнянь гіперболічного та еліптичного типів з невідомими вільним членом або молодшим коефіцієнтом.

Умови існування розв'язку задачі (1)-(4) наведені в наступній теоремі.

**Теорема існування.** *Припустимо, що виконуються умови:*

1) $\varphi\in C^1[0,h]; \mu_i\in C^1[0,T], i=1,2; \mu_3\in C[0,T]; b,c,f\in C(\overline{Q}_T)$ *і* $f(x,t), c(x,t), b(x,t)$ *задовольняють умову Гельдера по змінній* $x$ *з показником* $\alpha, 0<\alpha<1$;

2) $\varphi'(x)>0, x\in[0,h]; \mu_3(t)>0, t\in[0,T]; 0<\beta 1<1$;

3) $\varphi(0)=\mu_1(0), \quad \varphi(h)=\mu_2(0)$.

*Тоді можна вказати таке число* $t_0, 0<t_0\le T$, *яке визначається вихідними даними задачі, що існує розв'язок задачі (1)-(4)* $(a(t),u(x,t))$ *з класу* $C[0,t_0]\times C^{2,1}(Q_{t_0})\bigcap C^{1,0}(\overline{Q}_{t_0})$, *причому* $a(t)>0, t\in[0,t_0]$.

**Доведення.** Для доведення існування розв'язку задачі (1)-(4) застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперевного оператора. Для цього зведемо задачу (1)-(4) до системи рівнянь стосовно невідомих $(a(t),u(x,t),v(x,t))$, де $v(x,t)\equiv u_x(x,t)$. Припустимо, що функція $a(t)$ відома. Використовуючи функцію Гріна, замінимо пряму задачу (1)-(3) еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$u(x,t)=u_0(x,t)+\int_0^t\int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \tag{5}$$
$$v(x,t)=u_{0x}(x,t)+\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{6}$$

У виразі (5) через $u_0(x,t)$ позначено розв'язок рівняння теплопровідності

$$u_t=a(t)t^{\beta 1}u_{xx}+f(x,t) \tag{7}$$

з умовами (2),(3), який має вигляд

$$u_0(x,t) = \int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\tau^{\beta 1}\mu_1(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\tau^{\beta 1}\mu_2(\tau)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (8)$$

Через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ позначаємо функції Гріна першої ($k=1$) та другої ($k=2$) крайових задач для рівняння (7):

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$

$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right), \qquad (9)$$

де $\theta(t) = \int\limits_0^t a(\tau)\tau^{\beta 1}d\tau$. Похідна $u_{0x}(x,t)$ одержується з виразу (8) диференціюванням, інтегруванням частинами з застосуванням умов узгодженості та властивостей функції Гріна:

$$u_{0x}(x,t) = \int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi -$$

$$-\int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\times$$

$$\times\mu_2'(\tau)d\tau + \int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (10)$$

Підставляючи вираз (6) в умову (4), отримуємо рівняння

$$a(t) = \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)}, \quad t\in[0,T]. \qquad (11)$$

Отже, обернену задачу (1)-(4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (5),(6),(11).

Встановимо існування неперервного розв'язку системи (5),(6),(11). Для цього визначимо апріорні оцінки розв'язку цієї системи. З принципу максимуму [4, с.23] випливає оцінка

$$|u(x,t)|\le U, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T, \qquad (12)$$

де стала $U>0$ залежить від відомих величин.

Враховуючи рівність

$$\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)d\xi = 1, \qquad (13)$$

з умови 2 теореми існування встановлюємо додатність першого доданка виразу (10). Всі інші доданки з формули (6) при $t=0$ дорівнюють нулю. Тому існує таке значення $t_1, 0<t_1\le T$, що

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)d\xi \ge \int\limits_0^t G_2(x,t,0,\tau)\times$$

$$\times\mu_1'(\tau)d\tau - \int\limits_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau -$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+$$

$$+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad t\in[0,t_1]. \qquad (14)$$

Тоді з (6), використовуючи (10),(13),(14) отримуємо оцінку $v(x,t)$ знизу:

$$v(x,t)\ge\frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]}\varphi'(x)\equiv M_1>0, \quad t\in[0,t_1]. \qquad (15)$$

З (15) випливає оцінка зверху функції $a(t)$ :

$$a(t) \leq \frac{\mu_3(t)}{M_1} \leq A_1, \quad A_1 > 0, \quad t \in [0, t_1]. \tag{16}$$

Встановимо оцінку $|v(x,t)|$. Перший доданок з (10) оцінимо за допомогою (13). Для оцінки двох наступних виразів з (10) використовуємо явний вигляд функції Гріна та відому оцінку [5, с.12]:

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \leq C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

де $C_1, C_2 > 0$ – відомі сталі. Для оцінки останнього доданка з (10) розглянемо інтеграл

$$I_1 \equiv \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau) d\xi d\tau \right| \leq$$

$$\leq C_3 \int\limits_0^t \int\limits_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg( |x-\xi+2nh| \times$$

$$\times \exp\left( -\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + |x+\xi+2nh| \times$$

$$\times \exp\left( -\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \Bigg) \frac{d\xi d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}},$$

де $C_3 > 0$ – відома стала. Розбиваючи останній інтеграл на суму двох інтегралів і роблячи відповідно заміни змінних $z = \dfrac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$ та $z = \dfrac{x+\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, одержимо

$$I_1 \leq C_4 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\frac{x+h(2n-1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^{\frac{x+h(2n+1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}} |z| \times$$

$$\times \exp(-z^2) dz = C_4 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \times$$

$$\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |z| \exp(-z^2) dz = C_4 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{17}$$

Внаслідок цього отримаємо

$$|u_{0x}(x,t)| \leq C_5 + C_6 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{18}$$

Введемо позначення $V(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |v(x,t)|$. Використовуючи (17),(12) оцінимо другий доданок з (6):

$$\Bigg| \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau) \times$$

$$\times u(\xi,\tau)) d\xi d\tau \Bigg| \leq C_7 \int\limits_0^t \frac{(V(\tau)+1)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

де $C_7 > 0$ – відома стала. Остаточно маємо оцінку

$$V(t) \leq C_5 + C_8 \int\limits_0^t \frac{(V(\tau)+1)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}},$$

або

$$V_1(t) \leq C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{V_1(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad t \in [0, t_1], \tag{19}$$

де $V_1(t) = V(t)+1$. З умови (4) маємо $\dfrac{1}{a(t)} \leq \dfrac{V_1(t)}{\mu_3(t)}$. Використовуючи цю нерівність та додатність функції $\mu_3(t)$, з (19) отримуємо

$$V_1(t) \leq C_9 + C_{11} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Піднесемо до квадрату обидві частини нерівності, використовуючи нерівності Коші, Коші-Буняковського:

$$V_1^2(t) \leq 2C_9^2 + 2C_{11}^2 \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \times$$

$$\times \int\limits_0^t \frac{a^2(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq C_{12} +$$

$$+ C_{13} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \quad (20)$$

З оцінки (16) маємо $\theta(t) \leq \frac{A_1}{\beta 1+1} t^{\beta 1+1}$ або $t \geq \theta(t)^{\frac{1}{\beta 1+1}} (\frac{\beta 1+1}{A_1})^{\frac{1}{\beta 1+1}}$. Використаємо отриману нерівність для оцінки інтеграла

$$I_2 \equiv \int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \leq$$

$$\leq C_{14} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)\tau^{\beta 1} d\tau}{(\theta(\tau))^{\frac{\beta 1}{\beta 1+1}} \sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

За допомогою заміни змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$ маємо

$$I_2 \leq C_{14}(\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int\limits_0^1 \frac{dz}{z^{\beta/\beta+1}\sqrt{1-z^{\beta 1+1}}} \leq$$

$$\leq C_{15} \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = C_{15}\pi.$$

Тоді нерівність (20) запишеться у вигляді

$$V_1^2(t) \leq C_{12} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Покладемо $t = \sigma$, домножимо обидві частини нерівності на $\dfrac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ і проінтегруємо від 0 до $t$ :

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)V_1^2(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leq C_{12} \int\limits_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} +$$

$$+ C_{16} \int\limits_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \int\limits_0^\sigma \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Перетворимо другий доданок нерівності. Змінюючи порядок інтегрування та враховуючи заміну змінних $z = \dfrac{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}{\theta(t)-\theta(\tau)}$, маємо

$$V_1(t) \leq C_{17} + C_{18} \int\limits_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\tau^{\beta 1}}. \quad (21)$$

Праву частину нерівності позначимо через $W(t)$. Знайдемо похідну

$$W'(t) = C_{18}\frac{V_1^4(t)}{t^{\beta 1}} \leq C_{18}\frac{W_1^4(t)}{t^{\beta 1}}.$$

Розв'язуючи цю нерівність, отримуємо

$$W(t) \leq \frac{C_{17}\sqrt[3]{1-\beta 1}}{\sqrt[3]{1-\beta 1 - 3C_{17}^3 C_{18} t^{1-\beta 1}}}, \quad t \in [0, t_2], \quad (22)$$

де $t_2, 0 < t_2 \leq T$, задовольняє нерівність $1-\beta 1 - 3C_{17}^3 C_{18} t_2^{1-\beta 1} > 0$. Звідси отримуємо наступні оцінки:

$$|v(x,t)| \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0,t_2], \quad x \in [0,h],$$
$$a(t) \geq \frac{\mu_3(t)}{M_2} \geq A_0 > 0, \quad t \in [0,t_2]. \quad (23)$$

Запишемо систему рівнянь (5),(6),(11) у вигляді

$$\omega = P\omega, \quad (24)$$

де $\omega = (a,u,v)$, $P = (P_1,P_2,P_3)$, а оператори $P_1,P_2,P_3$ визначаються правими частинами рівнянь (11),(5),(6). Визначимо множину $N \equiv \{(a(t),u(x,t),v(x,t)) \in C[0,t_0] \times C(\overline{Q}_{t_0}) \times C(\overline{Q}_{t_0}) : A_0 \leq a(t) \leq A_1, |u(x,t)| \leq U, M_1 \leq v(x,t) \leq M_2\}$, де $t_0 = \min\{t_1,t_2\}$. Згідно з отриманими оцінками (12),(15),(16),(23) оператор $P$ переводить множину $N$ в себе. Покажемо, що оператор $P$ цілком неперервний на $N$. Згідно з теоремою Арцела-Асколі для цього слід встановити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$\begin{aligned} &|P_1(t_2) - P_1(t_1)| < \varepsilon, \\ &|P_2(x_2,t_2) - P_2(x_1,t_1)| < \varepsilon, \\ &|P_3(x_2,t_2) - P_3(x_1,t_1)| < \varepsilon, \\ &\forall\, (a(t),u(x,t),v(x,t)) \in N, \end{aligned} \quad (25)$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta, |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1,t_1),(x_2,t_2) \in \overline{Q}_{t_0}$. Покажемо деякі відмінності в доведенні компактності від невиродженого випадку. Знайдемо границю:

$$\lim_{t\to+0} P_1 a(t) = \lim_{t\to+0} \frac{\mu_3(t)}{v(0,t)} = \frac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}.$$

Отже, для малих значень $t^*, 0 < t^* \leq T$, маємо

$$|P_1(t_2) - P_1(t_1)| < \varepsilon, \quad 0 < t_i \leq t^*, i = 1, 2.$$

Доведемо цю нерівність у випадку, коли $t_i > t^*, i = 1, 2$. Зважаючи на те, що

$$|P_1 a(t_2) - P_1 a(t_1)| = \left|\frac{\mu_3(t_2)}{v(0,t_2)} - \frac{\mu_3(t_1)}{v(0,t_1)}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{\mu_3(t_2) - \mu_3(t_1)}{v(0,t_2)}\right| +$$
$$+ \left|\frac{\mu_3(t_1)(v(0,t_2) - v(0,t_1))}{v(0,t_2)v(0,t_1)}\right|,$$

і беручи до уваги оцінку $v(0,t) \geq M_1 > 0$, оцінимо вираз $|v(0,t_2) - v(0,t_1)|$. Розглянемо для прикладу вираз

$$F = \left|\int\limits_0^{t_2} G_2(0,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau - \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^{t_1} G_2(0,t_1,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau\right| \leq$$
$$\leq \left|\int\limits_0^{t_1} \mu_1'(\tau)(G_2(0,t_2,0,\tau) - G_2(0,t_1,0,\tau)) \times \right.$$
$$\left. \times\, d\tau\right| + \left|\int\limits_{t_1}^{t_2} G_2(0,t_2,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau\right| \equiv F_1 + F_2.$$

Припустимо для визначеності, що $t_2 > t_1$. Оцінка $G_2(0,t,0,\tau)$ дає можливість записати

$$F_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} + \right.$$
$$\left. + C_{19}\right) d\tau \leq C_{20} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} +$$
$$+ C_{21}(t_2 - t_1).$$

З означення множини $N$ отримуємо

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \leq \sqrt{\frac{\beta 1 + 1}{A_0}} \times$$
$$\times \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{t_2^{\beta 1 + 1} - \tau^{\beta 1 + 1}}} \leq \sqrt{\frac{\beta 1 + 1}{A_0 t_2^{\beta 1}}} \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{\sqrt{t_2 - \tau}} \leq$$
$$\leq C_{22}\sqrt{t_2 - t_1}.$$

Остаточно маємо

$$F_2 \leq C_{23}\sqrt{t_2 - t_1} + C_{21}(t_2 - t_1).$$

Використовуючи вигляд функції Гріна та виділяючи з ряду доданок, що відповідає $n = 0$, оцінимо $F_1$ :

$$F_1 \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \left(\int\limits_0^{t_1} \left|\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} - \right.\right.$$
$$- \left.\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}}\right| d\tau + 2\int\limits_0^{t_1} \left|\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} \times \right.$$
$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{\theta(t_2) - \theta(\tau)}\right) - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}} \times$$
$$\left.\left. \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 h^2}{\theta(t_1) - \theta(\tau)}\right)\right| d\tau\right) \equiv F_{1,1} + F_{1,2}.$$

Розглянемо вираз

$$\frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)}} - \frac{1}{\sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}} =$$
$$= \frac{\theta(t_2) - \theta(t_1)}{\sqrt{(\theta(t_2) - \theta(\tau))(\theta(t_1) - \theta(\tau))}} \times$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{\theta(t_1) - \theta(\tau)} + \sqrt{\theta(t_2) - \theta(\tau)}}.$$

Тоді для $F_{1,1}$ отримаємо

$$F_{1,1} \leq \frac{A_1(\beta 1 + 1)^{3/2}}{2\sqrt{\pi} A_0^{3/2}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \times$$
$$\times \int\limits_0^{t_1} \left(\frac{1}{\sqrt{t_1^{\beta 1 + 1} - \tau^{\beta 1 + 1}}} - \frac{1}{\sqrt{t_2^{\beta 1 + 1} - \tau^{\beta 1 + 1}}}\right) d\tau.$$

Після заміни змінних $z = \dfrac{\tau}{t_1}$ знаходимо

$$F_{1,1} \leq C_{24} t_1^{\frac{1-\beta 1}{2}} \left(\int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{\beta 1 + 1}}} - \right.$$

$$- \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(t_2/t_1)^{\beta 1+1} - z^{\beta 1+1}}}\Big).$$

Позначимо

$$K(\omega) \equiv \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\omega - z^{\beta 1+1}}}, \quad \text{де} \quad \omega \in [1, \infty). \tag{26}$$

Очевидно, що $\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{\omega - z^{\beta 1+1}}} \le \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}}$. З цього слідує, що функція $K(\omega)$ неперервна на $[1, \infty)$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta_1 > 0$, що $F_{1,1} < \varepsilon$, коли $|t_2 - t_1| < \delta_1$. Подамо $F_{1,2}$ у вигляді

$$F_{1,2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \max_{[0,T]} |\mu_1'(t)| \int_0^{t_1} d\tau \times$$
$$\times \Big| \int_{\theta(t_1)-\theta(\tau)}^{\theta(t_2)-\theta(\tau)} \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{n^2 h^2}{z}\Big)\Big) dz \Big|.$$

За допомогою нерівності $x^p \exp(-qx^2) \le M_{p,q} < \infty, x \in [0, \infty), p \ge 0, q > 0$ ми приходимо до оцінки

$$F_{1,2} \le C_{25} |\theta(t_2) - \theta(t_1)| \le C_{26} |t_2^{\beta 1+1} - t_1^{\beta 1+1}| <$$
$$< \varepsilon, \text{коли} \quad |t_2 - t_1| < \delta_2.$$

Оцінювання інших виразів, що входять у (25), проводиться аналогічно до невиродженого випадку [5, с.27-38]. Отже, оператор $P$ цілком неперервний на $N$.

За теоремою Шаудера розв'язок системи (5),(6),(11) існує. За еквівалентністю системи (5),(6),(11) та задачі (1)-(4) одержуємо твердження теореми існування.

Доведемо єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

**Теорема єдиності.** *Припустимо, що виконуються умови:*

*1)* $\varphi \in C^2[0,h]$; $\mu_i \in C^1[0,T], i = 1,2$; $b, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;

*2)* $\mu_3(t) \neq 0, t \in [0,T], 0 < \beta 1 < 1$.

*Тоді розв'язок* $(a(t), u(x,t))$ *задачі (1)-(4) з класу* $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \bigcap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ *єдиний.*

**Доведення.** Припустимо, що $(a_i(t), u_i(x,t)), i = 1,2,-$ два розв'язки задачі (1)-(4). Для їхньої різниці $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ отримуємо задачу

$$u_t = a_1(t) t^{\beta 1} u_{xx} + b(x,t) u_x + c(x,t) u +$$
$$+ a(t) t^{\beta 1} u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{27}$$
$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{28}$$
$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{29}$$
$$a_1(t) u_x(0,t) = -a(t) u_{2x}(0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{30}$$

Позначимо $v(x,t) \equiv u_x(x,t)$. За допомогою функції Гріна $G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $u_t = a_1(t) t^{\beta 1} u_{xx}$ задачу (27)-(29) зведемо до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau) v(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + a(\tau) \tau^{\beta 1} u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)) d\xi d\tau, \tag{31}$$

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_{1x}^{(1)}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau) v(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau) u(\xi,\tau) + a(\tau) \tau^{\beta 1} u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)) d\xi d\tau. \tag{32}$$

Підставимо (32) в умову (30):

$$a(t) u_{2x}(0,t) = -a_1(t) \int_0^t \int_0^h G_{1x}^{(1)}(0,t,\xi,\tau) \times$$
$$\times (b(\xi,\tau) v(\xi,\tau) + c(\xi,\tau) u(\xi,\tau) +$$
$$+ a(\tau) \tau^{\beta 1} u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)) d\xi d\tau. \tag{33}$$

Отримали систему рівнянь (31)-(33), яка еквівалентна задачі (27)-(30). Подамо її у вигляді

$$a(t) = \int_0^t K_{11}(t,\tau) a(\tau) d\tau + \int_0^t \int_0^h K_{12}(\xi,t,\tau) \times$$

$$\times v(\xi,\tau)d\xi d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_0^h K_{13}(\xi,t,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$v(x,t)=\int\limits_0^t K_{21}(x,t,\tau)a(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h K_{22}(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h K_{23}(x,t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

$$u(x,t)=\int\limits_0^t K_{31}(x,t,\xi,\tau)a(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h K_{32}(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)d\xi d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h K_{33}(x,t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

і встановимо інтегровність ядер $K_{ij}, i,j=1,2,3$. Розв'язок $u_2(x,t)$ задачі (1)-(3) подамо за допомогою функції Гріна $G_1^{(2)}(x,t,\xi,\tau)$ у вигляді формул (5),(8) і знайдемо $u_{2xx}(x,t)$:

$$u_{2xx}(x,t)=u_{02xx}(x,t)+$$
$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^h G_{1xx}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau)+$$
$$+c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi, \tag{34}$$

де

$$u_{02xx}(x,t)=\int\limits_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)d\tau+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^h G_{1xx}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi.$$

Використовуючи рівність $G_{1xx}(x,t,\xi,\tau)=G_{1\xi\xi}(x,t,\xi,\tau)$ та інтегруючи частинами, з (34) отримаємо

$$u_{2xx}(x,t)=\int\limits_0^h G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)(\mu_1'(\tau)-f(0,\tau)-$$
$$-b(0,\tau)u_{2\xi}(0,\tau)-c(0,\tau)\mu_1(\tau))d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)(f(h,\tau)-\mu_2'(\tau)+$$
$$+b(h,\tau)u_{2\xi}(h,\tau)+c(h,\tau)\mu_2(\tau))d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)(f_\xi(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau)+$$
$$+c(\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)+b(\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$
$$+c_\xi(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau))d\xi d\tau$$

або

$$u_{2xx}(x,t)=\tilde{u}(x,t)-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)b(\xi,\tau)d\xi d\tau. \tag{35}$$

Позначимо $\tilde{u}(x,t)\equiv\sum\limits_{i=1}^4 R_i$ і оцінимо кожен доданок цього виразу. З того, що $G_1^{(2)}(x,t,\xi,0) < G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)$, та рівності (13) для доданка $R_1$ маємо

$$|R_1|\le\max_{x\in[0,h]}|\varphi''(x)|\int\limits_0^h G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)d\xi\le C_{27}.$$

Для оцінки другого доданка використаємо вигляд функції Гріна:

$$|R_2|\le C_{28}\int\limits_0^t|G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)|d\tau\le C_{29}\times$$

$$\times \int_0^t \frac{1}{(t^{\beta1+1}-\tau^{\beta1+1})^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x+2nh| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{C_{30}(x+2nh)^2}{t^{\beta1+1}-\tau^{\beta1+1}}\right) d\tau.$$

Використовуючи заміну змінних $z = \dfrac{\tau}{t}$ та нерівність

$$1 \le \frac{1-x^{\beta1+1}}{1-x} \le 1+\beta1, \quad x \in [0,1], \beta1 \in [0,1],$$

отримуємо наступну оцінку:

$$|R_2| \le \frac{C_{31}}{t^{(3\beta1+1)/2}} \int_0^1 \frac{1}{(1-z)^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x+2nh| \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{C_{32}(x+2nh)^2}{t^{\beta1+1}(1-z)}\right) dz.$$

Зводячи останній інтеграл до інтеграла ймовірності та використовуючи його властивості, приходимо до оцінки

$$|R_2| \le \frac{C_{33}}{t^{\beta1}}.$$

Аналогічно отримується оцінка для $R_3$. Для $R_4$ використаємо оцінку (17):

$$|R_4| \le C_{34} \int_0^t \int_0^h |G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)| d\xi d\tau \le$$

$$\le C_{35} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}} \le$$

$$\le C_{36} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta1+1}-\tau^{\beta1+1}}} \le C_{37} t^{\frac{1-\beta1}{2}}.$$

Отже, для $\tilde{u}(x,t)$ маємо наступну оцінку

$$|\tilde{u}(x,t)| \le \frac{C_{38}}{t^{\beta1}}. \quad (36)$$

З оцінки $R_4$ випливає, що ядро рівняння (35) має слабку особливість. Тоді з (35) і (36) отримаємо оцінку для $u_{2xx}(x,t)$ :

$$|u_{2xx}(x,t)| \le \frac{C_{39}}{t^{\beta1}}. \quad (37)$$

Звідси випливає, що ядра системи (31)-(33) мають інтегровну особливість, тому за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система має тільки тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0, u(x,t) \equiv 0, v(x,t) \equiv 0, x \in [0,h], t \in [0,T]$. Теорему доведено.

Зауважимо, що за подібною схемою розглядаються обернені задачі визначення коефіцієнта $a(t)$ у рівнянні (1) у випадку інших крайових умов та умов перевизначення.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Гаджиев М.М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения.// Применение методов функ.анал. в уравнениях мат.физ.— Новосибирск.— 1987.— С.66—71.
2. *Елдесбаев Т.* О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений.// Дифференциальные уравнения.— 1976.— **11**, № 3.— С.502—510.
3. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка.// Известия АН КазССР. Серия физико-математическая.— 1987.— №3.— С.27—29.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М.: Наука, 1967.
5. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type.— Lviv: VNTL Publishers, 2003.



Стаття надійшла до редколегії 14.11.2005