УДК 519.6

©2006 р. М.Р. Петрик

Лабораторія математичного моделювання масопереносу в неоднорідних і нанопористих середовищах Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя, Тернопіль

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНОГО МАСОПЕРЕНОСУ ЗІ СПЕКТРАЛЬНИМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ n-ІНТЕРФЕЙСНИХ НЕОДНОРІДНИХ І НАНОПОРИСТИХ НЕОБМЕЖЕНИХ СЕРЕДОВИЩ

Методами інтегрального перетворення Лапласа і фундаментальних функцій Коші побудований точний аналітичний розв'язок математичної моделі дифузійного масопеносу для неоднорідного напівобмеженого нанопористого середовища з системою n-інтерфейсних взаємодій та умов нестаціонарності переносу на масообмінних межах. Доведено теорему про розв'язність крайової задачі, розроблено нові рекурентні алгоритми та обчислювальні процедури для побудови матриць впливу, породжених неоднорідностями задачі та системою $2n$-інтерфейсних умов.

The exact analytical solution of the problem of adsorption mass transfer for heterogeneous n-interface and nano porous unlimited medias with n-interface limits system with $2n$ no stationary regimes of mass exchange process on the mass exchanged surfaces is constructed. The theorem of resolution is proved. The new algorithms end calculation procedures for the fluid functions matrix construction of heterogeneous systems, of the boundary conditions end interface conditions system are introduced.

Вступ. Створення новітніх нанотехнологій і наноструктур вимагає дослідження механізмів кінетики дифузійно-адсорбційного масопереносу в багатошарових неоднорідних і нанопористих середовищах (**heterogeneous multilayer medias**) різної природи і конфігурації. Це потребує розробки нових методів моделювання системи механізмів багатоінтерфейсних взаємодій і нестаціонарності переносу на масообмінних поверхнях. Проблеми математичного моделювання масопереносу в однорідних і неоднорідних пористих середовищах розглянуто в працях [6-10]. Для однорідних середовищ застосовувались методи інтегральних перетворень Фур'є, Лапласа, Вебера, Ганкеля тощо. Математична теорія інтегральних перетворень та їх застосувань для задач масопереносу в неоднорідних і пористих середовищах з урахуванням системи інтерфейсних взаємодій та нестаціонарних режимів масообміну на масообмінних поверхнях (врахування спектрального параметру в крайових умовах та в системі інтерфейсних умов) нами розроблена в [1]. В працях [2, 3] розглянуто математичні моделі адсорбційного масопереносу в неоднорідних обмежених плоских і циліндричних n- інтерфейсних нанопористих середовищ, обгрунтовано розв'язність відповідних крайових задач, побудовано їх точні аналітичні розв'язки та виписано компоненти матриць впливу неоднорідності системи. Пропонована робота є логічним продовженням цих досліджень.

Математичний опис задачі. Розглядається масоперенос в необмеженому неоднорідному n-інтерфейсному по координаті z нанопористому середовищі, заповненому n адсорбентами з різними фізико-хімічними характеристиками. Математична модель такого переносу з урахуванням нестацінарності переносу на масообмінних поверхнях та фізичних припущень, поданих в працях [2 – 4], може бути описана у вигляді такої змішаної крайової задачі: побудувати обмежений в області $D_n = \{(t,z)\colon t > 0,\ z \in \bigcup\limits_{k=1}^{n+1} (l_{k-1}, l_k),$

$l_0 = -\infty;\ l_{n+1} = \infty\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\frac{\partial C_k(t,z)}{\partial t}+\frac{\partial a_k(t,z)}{\partial t}+\eta_k^2 C_k = D_k\frac{\partial^2 C_k}{\partial z^2}+f_k(t,z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} = \beta_k(C_k - \gamma_k a_k), \quad (2)$$

що задовольняє початкові умови

$$C_k(t,z)_{t=0} = C_{0_k}(z); \quad a_k(t,z)_{t=0} = a_{0_k}(z) \quad (3)$$

та систему n-інтерфейсних умов по геометричній координаті z

$$\left[[(\alpha_{j1}^k + \delta_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial z} + (\beta_{j1}^k + \gamma_{j1}^k\frac{\partial}{\partial t})]C_k(t,z) - \right.$$

$$-[(\alpha_{j2}^k + \delta_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t})\frac{\partial}{\partial z} +$$

$$\left.+ (\beta_{j2}^k + \gamma_{j2}^k\frac{\partial}{\partial t})]C_{k+1}(t,z)\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0,$$

$$k = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,2}. \quad (4)$$

Тут C_k, a_k – концентрації адсорбтиву відповідно в рідинній фазі (міжчастинковий простір) та твердій фазі (в нанопорах зерен адсорбенту) для $k-$го шару пористого середовища ($k = \overline{1,n+1}$).

Методологія побудови аналітичного розв'язку моделі

Теорема ***(про розв'язність):*** *Якщо справджується умова необмеженої розв'язності крайової задачі (умова Шапіро - Лопатинського) і задані функції є оригіналами за Лапласом та задовольняють умови Гельдера з показником* α по z $(0 < \alpha \leq 1)$:

$$|f(z) - f(y)| \leq |z-y|^{\alpha}\cdot C; C < \infty,$$

то розв'язок крайової задачі (1)-(5) існує і єдиний.

Доведення: В припущенні, що шукані вектор-функції $C(t,z)$, $a(t,z)$ є оригіналами за Лапласом, застосуємо до крайової задачі (1) – (4) інтегральне перетворення Лапласа стосовно часової змінної t[5]. В результаті отримаємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині $I_n = \left\{z : z \in \bigcup_{k=1}^{n+1}(l_{k-1}, l_k),\ l_0 = -\infty, l_{n+1} = \infty\right\}$ розв'язок системи диференціальних рівнянь Фур'є для модифікованих функцій

$$\frac{d^2 C_k^*}{dz^2} - q_k^2(p)C_k^*(p,z) = -\mathcal{F}_k^*(p,z), \quad (5)$$

за системою n-інтерфейсних умов по координаті z

$$\left[[(\bar{\alpha}_{j1}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_j^k)]C_k^*(p,z) - \right.$$

$$\left.-(\bar{\alpha}_{j2}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{j2}^k)C_{k+1}^*(p,z)\right]\Bigg|_{z=l_k} = \omega_{jk}$$

$$k = \overline{1,n}, j = \overline{1,2}. \quad (6)$$

Тут

$$\mathcal{F}_k^*(p,z) = \frac{1}{D_k}[f_k^*(p,z)+C_{o_k}(z)+\frac{\beta_k\gamma_k}{p+\beta_k\gamma_k}a_{0_k}(z)], \quad (7)$$

$$\omega_{jk} = \left[\left(\delta_{j1}^k\frac{d}{dz} + \gamma_{j1}^k\right)C'_{0k}(z) - \right.$$

$$\left.-\left(\delta_{j2}^k\frac{d}{dz} + \gamma_{j2}^k\right)C_{0_{k+1}}(z)\right]\Bigg|_{z=l_k}, \quad (8)$$

$$q_k^2(p) = \frac{1}{D_k\,(p+\beta_k\gamma_k)}\times$$

$$\times\left[p^2 + p(\beta_k(1+\gamma_k) + \eta_k^2) + \beta_k\gamma_k\eta_k^2\right], \quad (9)$$

$$\bar{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k\cdot p, \quad \bar{\beta}_{jm}^k = \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k\cdot p,$$

$$k = \overline{1,n}, \ \ j,m = \overline{1,2},$$

p – параметр інтегрального перетворення Лапласа, присутний в інтерфейсних умовах (6). При цьому

$$a_k^*(p,z) = \frac{a_{0_k}(z)}{p+\beta_k\gamma_k} + \frac{\beta_k}{p+\beta_k\gamma_k}C_k^*(p,z),$$

$$k = \overline{1,n+1}. \quad (10)$$

Зафіксувавши вітку $Re q_k(p) > 0$, розв'язок неоднорідної крайової задачі (6) – (7) будуємо методом функцій Коші [1]:

$$C_1^*(p,z) = A_1 e^{q_1(z-l_1)} + \int_{-\infty}^{l_1}\mathcal{E}_1^*(p,z,\xi)\mathcal{F}_1^*(p,\xi)d\xi, \quad (11)$$

$$C_k^*(p,z) = A_k \cdot chq_k z + B_k \cdot shq_k z +$$

$$+\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k} \mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)\mathcal{F}_k^*(p,\xi)d\xi, \quad k=\overline{2,n}, \quad (12)$$

$$C_{n+1}^*(p,z) = B_{n+1}e^{-q_{n+1}(z-l_n)} +$$

$$+\int\limits_{l_n}^{\infty} \mathcal{E}_{n+1}^*(p,z,\xi)\mathcal{F}_{n+1}^*(p,\xi)d\xi, \qquad (13)$$

де $\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)$, $\quad k=\overline{1,n+1}$ – функції Коші, що задовольняють умови

$$\begin{cases} \mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)|_{z=\xi+0} - \mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)|_{z=\xi-0} = 0, \\ \frac{d}{dz}\,\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)|_{z=\xi+0} - \frac{d}{dz}\,\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)|_{z=\xi-0} = -1. \end{cases} \qquad (14)$$

Функції Коші $\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)$, $\quad k=\overline{1,n+1}$ шукаємо у вигляді:

$$\mathcal{E}_1^*(p,z,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}_1^{-*} = D_{1_1}e^{q_1(z-l_1)}, \\ \mathcal{E}_1^{+*} = D_{2_1}chq_1z + E_{2_1}shq_1z, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -\infty < z < \xi < l_1 \\ -\infty < \xi < z < l_1 \end{array} \qquad (15)$$

$$\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}_k^{-*} = D_{1_k}chq_kz + E_{1_k}shq_kz, \\ \mathcal{E}_k^{+*} = D_{2_k}chq_kz + E_{2_k}shq_kz, \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} l_{k-1} < z < \xi < l_k, \\ l_{k-1} < \xi < z < l_k, \end{array} \qquad (16)$$

$$\mathcal{E}_{n+1}^*(p,z,\xi) = \begin{cases} \mathcal{E}_{n+1}^{-*} = D_{1_{n+1}}chq_{n+1}z + \\ \mathcal{E}_{n+1}^{+*} = E_{2_{n+1}}e^{-q_{n+1}(z-l_n)}, \end{cases}$$

$$+E_{1_{n+1}}shq_{n+1}z, \quad \begin{array}{l} l_n < z < \xi < \infty, \\ l_n < \xi < z < \infty, \end{array} \qquad (17)$$

при додаткових умовах: перша ліва умова 1-го інтерфейсу (на межі $z=l_1$):

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^1\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{11}^1\right)\mathcal{E}_1^{+*}\Big|_{z=l_1} = 0; \qquad (18)$$

- права і ліва умови $k--1$-го та k-го інтерфейсу ($z=l_{k-1}$ і $z=l_k$), $k=\overline{2,n}$:

$$\left(\bar{\alpha}_{12}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{12}^k\right)\mathcal{E}_k^{-*}\Big|_{z=l_{k-1}} = 0;$$

$$\left(\bar{\alpha}_{11}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{11}^k\right)\mathcal{E}_k^{+*}\Big|_{z=l_k} = 0. \qquad (19)$$

- перша права умова n-го інтерфейсу – на межі $z=l_n$:

$$\left(\bar{\alpha}_{12}^n\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{12}^n\right)\mathcal{E}_{n+1}^{-*}\Big|_{z=l_n} = 0. \qquad (20)$$

Означимо функції

$$V_{ij}^{k1}(q_sl_k) = (\bar{\alpha}_{ij}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{ij}^k)\ chq_sz|_{z=l_k} =$$

$$= \bar{\alpha}_{ij}^kq_sshq_sl_k + \bar{\beta}_{ij}^kchq_sl_k,$$

$$V_{ij}^{k2}(q_sl_k) = (\bar{\alpha}_{ij}^k\frac{d}{dz} + \bar{\beta}_{ij}^k)\ shq_sz|_{z=l_k} =$$

$$= \bar{\alpha}_{ij}^kq_schq_sl_k + \bar{\beta}_{ij}^kshq_sl_k, \qquad (21)$$

$$\Phi_{ij}^k(q_sl_k, q_sz) = V_{ij}^{k2}(q_sl_k)chq_sz - V_{ij}^{k1}(q_sl_k)shq_sz.$$

Властивості (14), (18) – (20) функцій Коші $\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)$ ($k=\overline{2,n}$) визначають співвідношення:

$$D_{2_1} = D_{1_1}e^{-q_1l_1} + \frac{shq_1\xi}{q_1};$$

$$E_{2_1} = D_{1_1}e^{-q_1l_1} - \frac{chq_1\xi}{q_1},$$

$$D_{1_1} = q_1^{-1}(\bar{\alpha}_{11}^1q_1 + \bar{\beta}_{11}^1)\Phi_{11}^1(q_1l_1, q_1\xi),$$

$$(D_{2_k} - D_{1_k}) = \frac{1}{q_k}shq_k\xi, (E_{2_k} - E_{1_k}) = -\frac{1}{q_k}chq_k\xi,$$

$$D_{1_k} = -\frac{\Phi_{11}^k(q_kl_k, q_k\xi)}{q_k\cdot\Delta_{11}(q_kl_{k-1}, q_kl_k)}V_{12}^{k-1,2}(q_kl_{k-1}),$$

$$E_{1_k} = \frac{\Phi_{11}^k(q_kl_k, q_k\xi)\cdot V_{12}^{k-1,1}(q_kl_{k-1})}{q_k\cdot\Delta_{11}(q_kl_{k-1}, q_kl_k)}; k=\overline{2,n};$$

$$D_{1_{n+1}} = -\frac{shq_{n+1}\xi}{q_{n+1}} + E_{2_{n+1}}e^{q_{n+1}l_n},$$

$$E_{1_{n+1}} = \frac{chq_{n+1}\xi}{q_{n+1}} - E_{2_{n+1}}e^{q_{n+1}l_n},$$

$$E_{2_{n+1}} = \frac{\Phi_{12}^n\left(q_{n+1}l_n, q_{n+1}\xi\right)}{q_{n+1}\cdot\left(\bar{\alpha}_{12}^nq_{n+1} - \bar{\beta}_{12}^n\right)}.$$

Визначені у такий спосіб функції Коші $\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)$, $k=\overline{1,n+1}$, внаслідок симетрії відносно діагоналі $z=\xi$, мають таку структуру

$$\mathcal{E}_1^*(p,z,\xi) = \frac{1}{q_1\left(\bar{\alpha}_{11}^1q_1 + \bar{\beta}_{11}^1\right)}\times$$

$$\times\begin{cases} e^{q_1(z-l_1)}\cdot\Phi_{11}^{1}\left(q_{n+1}l_n,q_{n+1}z\right)\cdot, & -\infty<z<\xi<l_1;\\ e^{q_1(\xi-l_1)}\cdot\Phi_{11}^{1}\left(q_{n+1}l_n,q_{n+1}\xi\right)\cdot, & -\infty<\xi<z<l_1;\end{cases}\tag{22}$$

$$\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)=-\frac{1}{q_k\Delta_{11}\left(q_kl_{k-1},q_kl_k\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Phi_{12}^{k-1}\left(q_kl_{k-1},q_kz\right)\cdot\Phi_{11}^{k}\left(q_kl_k,q_k\xi\right), & l_{k-1}<z<\xi<l_k,\\ \Phi_{12}^{k-1}\left(q_kl_{k-1},q_k\xi\right)\cdot\Phi_{11}^{n}\left(q_kl_k,q_kz\right), & l_{k-1}<\xi<z<l_k,\end{cases}\tag{23}$$

$$\mathcal{E}_{n+1}^*(p,z,\xi)=\frac{1}{q_{n+1}\left(\bar{\alpha}_{12}^{n}q_{n+1}-\bar{\beta}_{12}^{n}\right)}\times$$

$$\times\begin{cases}\Phi_{12}^{n}\left(q_{n+1}l_n,q_{n+1}z\right)\cdot e^{-q_{n+1}(\xi-l_n)}, & l_n<z<\xi<\infty\\ \Phi_{12}^{n}\left(q_{n+1}l_n,q_{n+1}\xi\right)\cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}, & l_n<\xi<z<\infty\end{cases}\tag{24}$$

Тут $\Delta_{11}(q_kl_{k-1},q_kl_k)=V_{12}^{k-1,1}(q_kl_{k-1})\times\times V_{11}^{k2}(q_kl_k)-V_{11}^{k1}(q_kl_k)V_{12}^{k-1,2}(q_kl_{k-1})$.

При відомих функціях Коші $\mathcal{E}_k^*(p,z,\xi)$ з урахуванням системи інтерфейсних умов (6) одержимо алгебраїчну систему із 2n рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів A_k $(k=\overline{1,n})$ та B_j $(j=\overline{2,n+1})$, які входять у структури (10) – (12) загального розв'язку крайової задачі (5) – (6):

$$\begin{cases}(\bar{\alpha}_{11}^{1}q_1+\bar{\beta}_{11}^{1})A_1-V_{12}^{11}\left(q_2l_1\right)A_2-\\ -V_{12}^{12}\left(q_2l_1\right)B_2=\omega_{1_1},\\ (\bar{\alpha}_{21}^{1}q_1+\bar{\beta}_{21}^{1})A_1-V_{22}^{11}\left(q_2l_1\right)A_2-\\ -V_{22}^{12}\left(q_2l_1\right)B_2=\omega_{2_1}+G_{_1}^*,\\ V_{11}^{21}\left(q_2l_2\right)A_2+V_{11}^{22}\left(q_2l_2\right)B_2-\\ -V_{12}^{21}\left(q_3l_2\right)A_3-V_{12}^{22}\left(q_3l_2\right)B_3=\omega_{1_2},\\ V_{21}^{21}\left(q_2l_2\right)A_2+V_{21}^{22}\left(q_2l_2\right)B_2-\\ -V_{22}^{21}\left(q_2l_2\right)A_3-V_{22}^{22}\left(q_2l_2\right)B_3=\omega_{2_2}+G_{_2}^*,\\ \dots\\ V_{11}^{k1}\left(q_kl_k\right)A_k+V_{11}^{k2}\left(q_kl_k\right)B_k-V_{12}^{k1}\left(q_{k+1}l_k\right)\times\\ \times A_{k+1}-V_{12}^{k2}\left(q_{k+1}l_k\right)B_{k+1}=\omega_{1_k},\\ V_{21}^{k1}\left(q_kl_k\right)A_k+V_{21}^{k2}\left(q_kl_k\right)B_k-\\ -V_{22}^{k1}\left(q_{k+1}l_k\right)A_{k+1}-V_{22}^{k2}\left(q_{k+1}l_k\right)B_{k+1}=\\ =\omega_{2_k}+G_{_k}^*,\\ \dots\\ V_{11}^{n,1}\left(q_nl_n\right)A_n+V_{11}^{n,2}\left(q_nl_n\right)B_n-\\ -\left(\bar{\beta}_{12}^{n}-\bar{\alpha}_{12}^{n}q_{n+1}\right)B_{n+1}=\omega_{1_n},\\ V_{21}^{n,1}\left(q_nl_n\right)A_n+V_{21}^{n,2}\left(q_nl_n\right)B_n-\\ -\left(\bar{\beta}_{22}^{n}-\bar{\alpha}_{22}^{n}q_{n+1}\right)B_{n+1}=\omega_{2_n}+G_{_n}^*.\end{cases}\tag{25}$$

Функції $G_{_k}^*$, що беруть участь в системі (34), мають вигляд

$$G_{_1}^*=c_{1_1}\int\limits_{-\infty}^{l_1}\frac{e^{q_1(\xi-l_1)}}{\bar{\alpha}_{11}^{1}q_1+\bar{\beta}_{11}^{1}}\mathcal{F}_1^*(p,\xi)d\xi+$$

$$+c_{2_1}\int\limits_{l_1}^{l_2}\frac{\Phi_{11}^{2}(q_2\xi,q_2l_2)}{\Delta_{11}(q_2l_1,q_2l_2)}\mathcal{F}_2^*(p,\xi)d\xi$$

$$G_{_k}^*=c_{2_k}\int\limits_{l_k}^{l_{k+1}}\frac{\Phi_{11}^{k+1}(q_{k+1}l_{k+1},q_{k+1}\xi)}{\Delta_{11}(q_{k+1}l_k,q_{k+1}l_{k+1})}\mathcal{F}_{k+1}^*(p,\xi)d\xi-$$

$$-c_{1_k}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}\frac{\Phi_{12}^{k-1}(q_kl_{k-1},q_k\xi)}{\Delta_{11}(q_kl_{k-1},q_kl_k)}\mathcal{F}_k^*(p,\xi)d\xi,$$

$$k=\overline{2,n-1},$$

$$G_{_n}^*=c_{2_n}\int\limits_{l_n}^{\infty}\frac{e^{-q_{n+1}(\xi-l_n)}}{\bar{\beta}_{12}^{n}-\bar{\alpha}_{12}^{n}q_{n+1}}\mathcal{F}_{n+1}^*(p,\xi)d\xi-$$

$$-c_{1_n}\int\limits_{l_{n-1}}^{l_n}\frac{\Phi_{12}^{n-1}(q_nl_{n-1},q_n\xi)}{\Delta_{11}(q_nl_{n-1},q_nl_n)}\mathcal{F}_n^*(p,\xi)d\xi.\tag{26}$$

Тут $c_{j_k} = \bar{\alpha}^k_{2j} \cdot \bar{\beta}^k_{1j} - \bar{\alpha}^k_{1j} \cdot \bar{\beta}^k_{2j}$, $\quad k = \overline{1,n}$, $\; j = \overline{1,2}$.

Припускаємо згідно умов теореми, що виконана умова однозначної розв'язності алгебраїчної системи (34), тобто, що визначник цієї системи

$$\Delta^*(p) \neq 0. \tag{27}$$

Після відповідних перетворень отримаємо загальні вирази для знаходження компонент $C^*_k(p,z)$ вектор-функції – розв'язку неоднорідної крайової задачі (5) – (6):

$$C^*_k(p,z) = \sum_{j=1}^{n} \left[\mathcal{R}^*_{1_{k,j}}(p,z)\omega_{1_j} + \mathcal{R}^*_{2_{k,j}}(p,z)\omega_{2_j} \right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n+1} \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} \mathcal{H}^*_{k,j}(p,z,\xi) \cdot \mathcal{F}^*_j(p,\xi) d\xi,$$

$$k = \overline{1,n+1}, \quad l_0 = -\infty; l_{n+1} = \infty, \tag{28}$$

де головні розв'язки крайової задачі подано нижче.

Функції впливу j - го джерела $\mathcal{F}^*_j(p,\xi)$ на $k-$тий сегмент адсорбційного середовища $\mathcal{H}^*_{k,j}(p,z,\xi)$:

- впливу $j-$го джерела ($j = \overline{1,n+1}$) на перший сегмент середовища

$$\mathcal{H}^*_{11}(p,z,\xi) = \frac{1}{q_1 \Delta^*(p)} \begin{cases} e^{q_1(\xi - l_1)} \times \\ e^{q_1(z-l_1)} \times \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \times[\Phi^1_{21}(q_1 l_1, q_1\xi)\mathrm{A}'_{\overline{1,1}} - \Phi^1_{11}(q_1 l_1, q_1 \xi)\mathrm{A}_{\overline{1,1}}]; \\ \times[\Phi^1_{21}(q_1 l_1, q_1 z)\mathrm{A}'_{\overline{1,1}} - \Phi^1_{11}(q_1 l_1, q_1 z)\mathrm{A}_{\overline{1,1}}]; \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -\infty < \xi < z < \infty; \\ -\infty < z < \xi < \infty; \end{array}$$

$$H^*_{1j}(p,z,\xi) = \frac{\prod\limits_{s=1}^{j-1} q_s c_{2_s}}{q_1 \Delta^*(p)} e^{q_1(z-l_1)} \times$$

$$\times \left[\Phi^j_{21}(q_j l_j, q_j \xi)\mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}} - \Phi^j_{11}(q_j l_j, q_j\xi)\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}} \right],$$

$$j = \overline{2,n}; \tag{29}$$

$$H^*_{1,n+1}(p,z,\xi) = -\frac{\prod\limits_{s=1}^{n} q_s c_{2_s}}{q_1 \cdot \Delta^*(p)} e^{q_1(z-l_1)} \cdot e^{-q_{n+1}(\xi - l_n)}; \tag{30}$$

- впливу $j-$го джерела ($j = \overline{1,n+1}$) на $k-$ий сегмент ($k = \overline{2,n}$) середовища

$$\mathcal{H}^*_{k1}(p,z,\xi) = \frac{q_1(\xi - l_1)}{q_1 \Delta^*(p)} \cdot \prod_{s=1}^{k-1} c_{1_s} q_s \times$$

$$\times \left[\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k z)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}} - \Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k z)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}} \right]; \tag{31}$$

$$\mathcal{H}^*_{kj}(p,z,\zeta) = \frac{\prod\limits_{s=j}^{k-1} q_s c_{1_s}}{q_j \Delta^*(p)} \Bigg[\Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k z)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}} -$$

$$-\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k z)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}} \Bigg] \Bigg[\Phi^{j-1}_{22}(q_j l_j, q_j \xi)\Delta_{\overline{1,2j-3}} -$$

$$-\Phi^{j-1}_{12}(q_j l_{j-1}, q_j \xi)\Delta'_{\overline{1,2j-3}} \Bigg], \quad j = \overline{2,k-1}; \tag{32}$$

- впливу $j-$го джерела ($j = \overline{k+1,n}$) на $k-$ий ($k = \overline{2,n}$) сегмент середовища

$$\mathcal{H}^*_{kj}(p,z,\xi) = \frac{\prod\limits_{s=k}^{s-1} q_s c_{2_s}}{q_k \cdot \Delta^*(p)} \Bigg[\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_{k-1}, q_k z) \times$$

$$\times \Delta'_{\overline{1,2k-3}} - \Phi^{k-1}_{22}(q_k l_{k-1}, q_k z)\Delta_{\overline{1,2k-3}} \Bigg] \times$$

$$\times \left[\Phi^j_{21}(q_j l_j, q_j \xi)\mathrm{A}'_{\overline{1,2j-1}} - \Phi^j_{11}(q_j l_j, q_j \xi)\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}} \right];$$

$$j = \overline{k+1,n} \tag{33}$$

$$\mathcal{H}^*_{kk}(p,z,\xi) = \frac{1}{q_k \cdot \Delta^*(p)} \times$$

$$\times \begin{cases} [\Phi^{k-1}_{22}(q_k l_{k-1}, q_k \xi) \cdot \Delta_{\overline{1,2k-3}} - \\ \quad -\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_{k-1}, q_k \xi)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}] \times \\ \quad \times[\Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k z)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}} - \\ \quad -\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k z) \cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}]; \\ \qquad l_{k-1} < \xi < z < l_k \\ [\Phi^{k-1}_{22}(q_k l_{k-1}, q_k z) \cdot \Delta_{\overline{1,2k-3}} - \\ \quad -\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_{k-1}, q_k z)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}] \times \\ \quad \times[\Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k \xi)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}} - \\ \quad -\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k \xi) \cdot \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}]; \\ \qquad l_{k-1} < z < \xi < l_k \end{cases} \tag{34}$$

$$\mathcal{H}^*_{k,n+1}(p,z,\xi)=\frac{\prod\limits_{s=k}^{n}q_sc_{2_s}}{q_k\Delta^*(p)}[\Phi^{k-1}_{22}(q_kl_{k-1},q_kz)\times$$
$$\times\Delta_{\overline{1,2k-3}}-\Phi^{k-1}_{12}(q_kl_{k-1},q_kz)\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-3}}]e^{-q_{n+1}(\xi-l_n)},$$
$$k=\overline{1,n}; \tag{35}$$

- впливу $j-$го джерела ($j=\overline{1,n+1}$) на $n+1$-ий сегмент середовища:

$$\mathcal{H}^*_{n+1,1}(p,z,\xi)=-\frac{1}{q_1\Delta^*(p)}\prod_{s=1}^{n}c_{1_s}q_s\cdot e^{q_1(\xi-l_1)}\times$$
$$\times e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; \tag{36}$$

$$\mathcal{H}^*_{n+1,j}(p,z,\xi)=\frac{\prod\limits_{s=j}^{n}c_{1_s}q_s}{q_j\cdot\Delta^*(p)}e^{-q_{n+1}(z-l_n)}\times$$
$$\times[\Phi^{j-1}_{22}(q_jl_{j-1},q_j\xi)\cdot\Delta_{\overline{1,2j-3}}-$$
$$-\Phi^{j-1}_{12}(q_jl_{j-1},q_j\xi)\cdot\Delta'_{\overline{1,2j-3}}]; \tag{37}$$

$$\mathcal{H}^*_{n+1,n+1}(p,z,\xi)=-\frac{1}{q_{n+1}\Delta^*()}\times$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}[\Phi^n_{22}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}\xi)\Delta_{\overline{1,2n-1}}-\\ [\Phi^n_{22}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}z)\Delta_{\overline{1,2n-1}}-\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{l}-\Phi^n_{12}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}\xi)\Delta'_{\overline{1,2n-1}}]^{-q_{n+1}(z-l_n)};\\ -\Phi^n_{12}(q_{n+1}l_n,q_{n+1}z)\Delta'_{\overline{1,2n-1}}]^{-q_{n+1}(\xi-l_n)};\end{array}$$
$$\begin{array}{l}l_n<\xi<z<\infty;\\ l_n<z<\xi<\infty;\end{array} \tag{38}$$

Функції впливу неоднорідностей першої умови j-го інтерфейсу ω_{1j} на k-тий сегмент середовища $\mathcal{R}^*_{1_{k,j}}(p,z)$; $k=\overline{1,n+1}$; $j=\overline{1,n}$:

- впливу неоднорідностей першої умови $j--$ го інтерфейсу ω_{1_j} ($j=\overline{1,n}$ на перший сегмент середовища :

$$\mathcal{R}^*_{1_{1_j}}(p,z)=\frac{1}{\Delta^*(p)}\left\{\begin{array}{l}e^{q_1(z-l_1)}\mathrm{A}_{\overline{1,1}};\\ \prod\limits_{s=1}^{j-1}c_{2_s}q_{s+1}e^{q_1(z-l_1)}\times\\ -\prod\limits_{s=1}^{n-1}c_{2_s}q_{s+1}e^{q_1(z-l_1)}\times\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{ll} & j=1;\\ \times\mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}; & j=\overline{2,n-1};\\ \times(\bar\beta^n_{22}-\overline{\alpha}^n_{22}q_{n+1}); & j=n;\end{array} \tag{39}$$

- впливу неоднорідностей першої умови j-го інтерфейсу ω_{1_j} ($j=\overline{1,n}$) на k-тий сегмент середовища ($k=\overline{2,n}$):

$$\mathcal{R}^*_{1_{kj}}(p,z)=-\frac{1}{\Delta^*(p)}\left\{\begin{array}{l}(\bar\alpha^n_{12}q_1+\bar\beta^n_{12})\prod\limits_{s=1}^{k-1}c_{1_s}q_s\times\\ \Delta_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=j+1}^{k-1}c_{1_s}q_s\times\\ \mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}\times\\ \mathrm{A}_{\overline{1,2j-1}}\prod\limits_{s=k}^{j-1}c_{2_s}q_{s+1}\times\\ -(\bar\beta^n_{22}-\bar\alpha^n_{22}q_{n+1})\times\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{c}\times[\Phi^k_{11}(q_kl_k,q_kz)\mathrm{A}_{\overline{1,2-k}}-\\ \times[\Phi^k_{11}(q_kl_k,q_kz)\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}-\\ \times[\Phi^{k-1}_{12}(q_kl_{k-1},q_kz)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-\\ \times[\Phi^{k-1}_{12}(q_kl_k,q_kz)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-\\ \times\prod\limits_{s=k}^{n-1}c_{2_s}q_{s+1}[\Phi^{k-1}_{12}(q_kl_k,q_kz)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-\end{array}$$
$$\begin{array}{ll}-\Phi^k_{21}(q_kl_k,q_kz)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}]; & j=1;\\ -\Phi^k_{21}(q_kl_k,q_kz)\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}]; & j=\overline{2,k-1};\\ -\Phi^{k-1}_{22}(q_kl_{k-1},q_kz)\Delta_{\overline{1,2k-3}}]; & j=\overline{k};\\ -\Phi^{k-1}_{22}(q_kl_k,q_kz)\Delta_{\overline{1,2k-3}}]; & j=\overline{k+1,n-1};\\ \times-\Phi^{k-1}_{22}(q_kl_k,q_kz)\Delta_{\overline{1,2k-3}}]; & j=\overline{n};\end{array} \tag{40}$$

- впливу неоднорідностей першої умови j-го інтерфейсу ω_{1_j} ($j=\overline{1,n}$) на $n+1$-ший сегмент середовища:

$$\mathcal{R}^*_{1_{n+1,j}}(p,z)=-\frac{1}{\Delta^*(p)}\left\{\begin{array}{l}(\bar\alpha^1_{12}q_1+\bar\beta^1_{12})\times\\ \Delta'_{\overline{1,2j-1}}\times\\ -(\bar\beta^n_{22}-\bar\alpha^n_{22}q_{n+1})\times\end{array}\right.$$
$$\begin{array}{ll}\times\prod\limits_{j=2}^{n}c_{1_s}q_s\cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=1;\\ \times\prod\limits_{j=2}^{n}c_{1_s}q_s\cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=\overline{2,n-1};\\ \times\Delta'_{\overline{1,2n-1}}\cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=n;\end{array} \tag{41}$$

Функції впливу неоднорідностей другої умови j-го інтерфейсу ω_{2_j}, $j=\overline{1,n}$ на k-тий сегмент середовища $\mathcal{R}^*_{2_{k,j}}(p,z); k=\overline{1,n+1}$; $j=\overline{1,n}$:

- впливу неоднорідностей другої умови j-го інтерфейсу ω_{2_j} ($j=\overline{1,n}$) на перший сегмент середовища:

$$\mathcal{R}^*_{2_{1j}}(p,z) = -\frac{1}{\Delta^*(p)} \begin{cases} e^{q_1(z-l_1)}\text{A}_{\overline{1,1}}; \\ \prod_{s=1}^{j-1} c_{2_s} q_{s+1} \times \\ -\prod_{s=1}^{n-1} c_{2_s} q_{s+1} \cdot e^{q_1(z-l_1)} \times \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} & j=1; \\ \times e^{q_1(z-l_1)} \cdot \text{A}'_{\overline{1,2j-1}}; & j=\overline{2,n-1}; \\ \times(\bar{\beta}^n_{12} - \bar{\alpha}^n_{12} q_{n+1}); & ;j=n; \end{array} \quad (42)$$

- впливу неоднорідностей другої умови j-го інтерфейсу ω_{2_j} $(j=\overline{1,n})$ на k-тий сегмент середовища $(k=\overline{2,n})$:

$$\mathcal{R}^*_{2_{kj}}(p,z) = \frac{1}{\Delta^*(p)} \begin{cases} (\bar{\alpha}^1_{11} q_1 + \bar{\beta}^1_{11}) \prod_{s=1}^{k-1} c_{1_s} q_s \times \\ \Delta'_{\overline{1,2j-1}} \prod_{s=j+1}^{k-1} c_{1_s} q_s \times \\ \text{A}'_{\overline{1,2k-1}} \times \\ \text{A}'_{\overline{1,2j-1}} \prod_{s=k}^{j-1} c_{2_s} q_{s+1} \times \\ -(\bar{\beta}^n_{12} - \bar{\alpha}^n_{12} q_{n+1}) \times \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \times \left[\Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k z)\text{A}_{\overline{1,2k-1}} - \right. \\ \times \left[\Phi^k_{11}(q_k l_k, q_k z)\text{A}_{\overline{1,2k-1}} - \right. \\ \times \left[\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_{k-1}, q_k z)\Delta'_{\overline{1,2k-3}} - \right. \\ \times \left[\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_k, q_k z)\Delta'_{\overline{1,2k-3}} - \right. \\ \times \prod_{s=k}^{n-1} c_{2_s} q_{s+1} \left[\Phi^{k-1}_{12}(q_k l_k, q_k z)\Delta'_{\overline{1,2k-3}} - \right. \end{array} \quad (43)$$

$$\begin{array}{ll} \left. -\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k z)\text{A}'_{\overline{1,2k-1}} \right]; & j=1; \\ \left. -\Phi^k_{21}(q_k l_k, q_k z)\text{A}'_{\overline{1,2k-1}} \right]; & j=\overline{2,k-1}; \\ \left. -\Phi^{k-1}_{22}(q_k l_{k-1}, q_k z)\Delta_{\overline{1,2k-3}} \right]; & j=k; \\ \left. -\Phi^{k-1}_{22}(q_k l_k, q_k z)\Delta_{\overline{1,2k-3}} \right]; & j=\overline{k+1,n-1}; \\ \left. -\Phi^{k-1}_{22}(q_k l_k, q_k z)\Delta_{\overline{1,2k-3}} \right]; & j=n; \end{array}$$

- впливу неоднорідностей другої умови j-го інтерфейсу ω_{2_j} $(j=\overline{1,n})$ на $n+1$–ший сегмент середовища :

$$\mathcal{R}^*_{2_{n+1,j}}(p,z) = \frac{1}{\Delta^*(p)} \begin{cases} (\bar{\alpha}^1_{11} q_1 + \bar{\beta}^1_{11}) \times \\ \Delta_{\overline{1,2j-1}} \times \\ -(\bar{\beta}^n_{12} - \bar{\alpha}^n_{12} q_{n+1}) \times \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \times \prod_{j=2}^{n} c_{1_s} q_s \cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=1; \\ \times \prod_{j=2}^{n} c_{1_s} q_s \cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=\overline{2,n-1}; \\ \times \Delta_{\overline{1,2n-1}} \cdot e^{-q_{n+1}(z-l_n)}; & j=n; \end{array} \quad (44)$$

Тут $\Delta_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з перших $2k-1$ рядків і стовпців (під номерами $\overline{1,2k-1}$, $k=\overline{1,n}$) визначника $\Delta^*(p)$ системи; $\Delta'_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з перших $2k$ рядків за виключенням $2k-1$-го (під номерами$\overline{1,2k-2}$, $2k$, $k=\overline{1,n}$) і перших $2k-1$ стовпців (під номерами $\overline{1,2k-1}$, $k=\overline{1,n}$) визначника системи; $\text{A}_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з визначника системи $\Delta^*(p)$ шляхом викреслювання перших $2k-1$ рядків і стовпців; $\text{A}'_{\overline{1,2k-1}}$ – визначник, утворений з визначника $\Delta^*(p)$ системи шляхом викреслювання перших $2k$ рядків за виключенням $2k-1$-го і перших $2k$ стовпців.

Перехід до оригіналів. Особливими точками головних розв'язків крайової задачі (5) – (6) $\mathcal{R}^*_{m_{kj}}(p,z)$, $m=\overline{1,2}$, $\mathcal{H}^*_{k,k_1}(p,z,\xi)$ є точки галуження $p=\infty$ та $p_{1,2}=-\frac{1}{2}\left[S_1 \pm \sqrt{S_2}\right] < 0$, $S_1=\beta_k(1+\gamma_k)+\eta_k^2$, $S_2=(\eta_k-\beta_k\gamma_k)^2+\beta_k\left[\beta_k(1+2\gamma_k)+2\eta_k^2\right] > 0$. Отже, при переході до оригіналів за Лапласом інтеграл по контуру Бромвіча можна замінити інтегралом по уявній осі [5]:

$$R_{m_{kj}}(t,z) = L^{-1}\left[\mathcal{R}^*_{m_{kj}}(p,z)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{R}^*_{m_{kj}}(p,z)\cdot e^{pt}dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty} \mathcal{R}^*_{m_{kj}}(p,z)\cdot e^{pt}dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^*_{m_{kj}}(is,z)\cdot e^{ist}ds =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} Re\left[\mathcal{R}^*_{m_{kj}}(is,z)\cdot e^{ist}\right]ds, \quad m=\overline{1,2},$$

$$\mathcal{H}^*_{k,k_1}(t,z,\xi) = L^{-1}\left[\mathcal{H}^*_{k,k_1}(p,z,\xi)\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty Re\left[\mathcal{H}^*_{k,k_1}(is,z,\xi)\cdot e^{ist}\right] ds.$$

У результаті однозначної розв'язності алгебраїчної системи (34), з врахуванням одержаних головних розв'язків задачі (6) – (7) та формул (67), отримаємо єдиний розв'язок вихідної крайової задачі (1) – (5) у вигляді

$$C_k(t,z) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t [\mathcal{R}_{1_{kj}}(t-\tau,z)\cdot\omega_{1_j}(\tau)+$$

$$+\mathcal{R}_{2_{kj}}(t-\tau,z)\cdot\omega_{2_j}(\tau)]d\tau+$$

$$+\int_0^t \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \mathcal{H}_{k,k_1}(t-\tau;z,\xi)\cdot[f_{k_1}(\tau,\xi)+$$

$$+C_{0_{k_1}}(\xi)\cdot\delta_+(\tau)]d\xi d\tau+$$

$$+\int_0^t \sum_{k_1=1}^{n+1} \int_{l_{k_1-1}}^{l_{k_1}} \frac{\beta_{k_1}\gamma_{k_1}}{D_{z_{k_1}}}\mathcal{H}_{k,k_1}(t-\tau;z,\xi)e^{-\beta_{k_1}\gamma_{k_1}\tau}\times$$

$$\times a_{0_{k_1}}(\xi)d\xi d\tau; \tag{45}$$

$$a_k(t,z) = \beta_k \int_0^t e^{-\beta_k\gamma_k(t-\tau)}\times$$

$$\times C_k(\tau,z)d\tau + e^{-\beta_k\gamma_k t}\cdot a_{0_k}(z). \tag{46}$$

Тут

$$\omega_{mj} = \Bigg[(\delta^j_{m1}\frac{d}{dz}+\gamma^j_{m1})C_{0_j}(z)-$$

$$-(\delta^j_{m2}\frac{d}{dz}+\gamma^j_{m2})C_{0_{j+1}}(z)\Bigg]\Bigg|_{z=l_j}\delta_+(t),$$

$$m=\overline{1,2};\, j=\overline{1,n}.$$

Теорема доведена.

Рекурентні алгоритми і процедури обчислення визначника системи $\Delta^*(p)$ та визначників $\Delta_{\overline{1,2k-1}}, \Delta'_{\overline{1,2k-1}}, \mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}}, \mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}}$

визначників $\Delta_{\overline{1,2k-1}}$, $\Delta'_{\overline{1,2k-1}}$:

$$\Delta_{\overline{1,1}} = V^{11}_{11}(q_1l_1);\, \Delta'_{\overline{1,1}} = V^{11}_{21}(q_1l_1);.$$

$$\Delta_{\overline{1,2k-1}} = \Delta_{\overline{1,2k-3}}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} -V^{k-1,1}_{22}(q_kl_{k-1}) & -V^{k-1,2}_{22}(q_kl_{k-1}) \\ V^{k1}_{11}(q_kl_k) & V^{k2}_{11}(q_kl_k)\end{vmatrix}-$$

$$-\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\begin{vmatrix} -V^{k-1,1}_{12}(q_kl_{k-1}) & -V^{k-1,2}_{12}(q_kl_{k-1}) \\ V^{k1}_{11}(q_kl_k) & V^{k2}_{11}(q_kl_k)\end{vmatrix}=$$

$$= \Delta_{11}(q_kl_{k-1},q_kl_k)\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-$$

$$-\Delta_{21}(q_kl_{k-1},q_kl_k)\Delta_{\overline{1,2k-3}};\quad k=\overline{2,n}.$$

$$\Delta'_{\overline{1,2k-1}} = \Delta_{\overline{1,2k-3}}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} -V^{k-1,1}_{22}(q_kl_{k-1}) & -V^{k-1,2}_{22}(q_kl_{k-1}) \\ V^{k1}_{21}(q_kl_k) & V^{k2}_{21}(q_kl_k)\end{vmatrix}-$$

$$-\Delta'_{\overline{1,2k-3}}\begin{vmatrix} -V^{k-1,1}_{12}(q_kl_{k-1}) & -V^{k-1,2}_{12}(q_kl_{k-1}) \\ V^{k1}_{21}(q_kl_k) & V^{k2}_{21}(q_kl_k)\end{vmatrix}=$$

$$= \Delta_{12}(q_kl_{k-1},q_kl_k)\cdot\Delta'_{\overline{1,2k-3}}-$$

$$-\Delta_{22}(q_kl_{k-1},q_kl_k)\cdot\Delta_{\overline{1,2k-3}};\, k=\overline{2,n}. \tag{47}$$

2) визначника системи $\Delta^*(p)$:

$$\Delta^*(p) = \overline{\beta}^n_{12} - \overline{\alpha}^n_{12}q_{n+1}\Delta'_{\overline{1,2n-1}}-$$

$$-(\overline{\beta}^n_{22} - \overline{\alpha}^n_{22}q_{n+1})\Delta_{\overline{1,2n-1}};$$

3) визначників $\mathrm{A}_{\overline{1,2j}}$, $\mathrm{A}'_{\overline{1,2j}}$:

$$\mathrm{A}_{\overline{1,2n-1}} = \overline{\alpha}^n_{22}q_{n+1} - \overline{\beta}^n_{22},$$

$$\mathrm{A}'_{\overline{1,2n-1}} = \overline{\alpha}^n_{12}q_{n+1} - \overline{\beta}^n_{12}.$$

$$\mathrm{A}_{\overline{1,2k-1}} = \begin{vmatrix} -V^{k,1}_{22}(q_{k+1}l_k) & -V^{k,2}_{22}(q_{k+1}l_k) \\ V^{k+1,1}_{11}(q_{k+1}l_{k+1}) & V^{k+2,2}_{11}(q_{k+1}l_{k+1})\end{vmatrix}\times$$

$$\times\mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}}-$$

$$-\begin{vmatrix} -V^{k,1}_{22}(q_{k+1}l_k) & -V^{k,2}_{22}(q_{k+1}l_k) \\ V^{k+1,1}_{21}(q_{k+1}l_{k+1}) & -V^{k+1,2}_{21}(q_{k+1}l_{k+1})\end{vmatrix}\times$$

$$\times\mathrm{A}'_{\overline{1,2k+1}} =$$

$$= \Delta_{22}(q_{k+1}l_k,q_{k+1}l_{k+1})\mathrm{A}'_{\overline{1,2k+1}}-$$

$$-\Delta_{21}(q_{k+1}l_k,q_{k+1}l_{k+1})\mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}};\, k=\overline{n-3,1}.$$

$$\mathrm{A}'_{\overline{1,2k-1}} = \begin{vmatrix} -V^{k,1}_{12}(q_{k+1}l_k) & -V^{k,2}_{12}(q_{k+1}l_k) \\ V^{k+1,1}_{11}(q_{k+1}l_{k+1}) & V^{k+1,2}_{11}(q_{k+1}l_{k+1})\end{vmatrix}\times$$

$$\times \mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}} -$$

$$- \begin{vmatrix} -V_{12}^{k,1}(q_{k+1}l_k) & -V_{12}^{k,2}(q_{k+1}l_k) \\ V_{21}^{k+1,1}(q_{k+1}l_{k+1}) & -V_{21}^{k+1,2}(q_{k+1}l_k) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \mathrm{A}'_{\overline{1,2k+2}} = \Delta_{12}(q_{k+1}l_k, q_{k+1}l_{k+1}) \mathrm{A}'_{\overline{1,2k+1}} -$$

$$-\Delta_{11}(q_{k+1}l_k, q_{k+1}l_{k+1}) \cdot \mathrm{A}_{\overline{1,2k+1}}; \quad k = \overline{n-3,1}. \tag{50}$$

Тут

$$\Delta_{m1}^k(q_k l_{k-1}, q_k l_k) = V_{m2}^{k-1,1}(q_k l_{k-1}) V_{11}^{k2}(q_k l_k) -$$

$$-V_{m2}^{k-1,2}(q_k l_{k-1}) V_{11}^{k1}(q_k l_k);$$

$$\Delta_{m2}(q_k l_{k-1}, q_k l_k) = V_{m2}^{k-1,1}(q_k l_{k-1}) V_{21}^{k2}(q_k l_k) -$$

$$-V_{m2}^{k-1,2}(q_k l_{k-1}) V_{21}^{k1}(q_k l_k); m = \overline{1,2}.$$

Висновки. Запропоновано математичну модель адсорбційного масопереносу в небмеженому неоднорідному нанопористому середовищі, доведено теорему про розв'язність крайової задачі і отримано точний аналітичний розв'язок, що в узагальненому вигляді описує вплив важливих чинників кінетики: системи $n-$інтерфейсних взаємодій та нестаціонарності переносу на масообмінних межах. Це дозволяє моделювати профілі концентрацій та здійснювати комплексний аналіз кінетики переносу на макро- і мікрорівні (нанопорів частинок) середовищ. Розв'язок та рекурентні матричні алгоритми побудови матриць функцій впливу дозволяють формулювати та ефективно розв'язувати зворотні задачі - моделювати профілі коефіцієнтів дифузії за експериментальними профілями концентрацій. Це дає можливість реалізації ефективних процедур перевірки на адекватність параметрів моделювання і експерименту і водночас визначає перспективні напрями подальшого дослідження.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленюк М.П., Петрик М.Р.* Інтегральні перетворення Фур'є, Бесселя із спектральним параметром в задачах математичного моделювання масопереносу в неоднорідних середовищах.— К.: Наук. думка, 2000.— 372 с.

2. *Ленюк М.П., Петрик М.Р.* Математичне моделювання дифузійного масопереносу зі спектральним параметром для n-інтерфейсних неоднорідних і нанопористих обмежених середовищ // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика.— 2003.— Вип. **1**.— С.69—95.

3. *Ленюк М.П., Петрик М.Р.* Математичне моделювання адсорбційного масопереносу зі спектральним параметром для неоднорідних n-інтерфейсних циліндричних обмежених мікропористих середовищ з порожниною // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2004.— Т. **9**, № 4.— С.147—148.

4. *Петрик М.Р.* Математичне моделювання нелінійних динамічних задач адсорбції та дифузії для нерухомого шару адсорбенту (ізотермічний випадок) // Інтегральні перетворення та їх застосув. до крайових задач: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т. матем. НАН України, 1993.— Вип. 5.— С.201—215.

5. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного.— М.: Наука , 1965.— 715 с.

6. *Chen, N.Y., T.F. Degnan and M.C. Smith.* Molecular Transport and Reaction in Zeolites: Design and Application of Shape Selective Catalysis, V.C.H. Weinheim, New York, (1994).

7. *Magalhaes, F.D., R.L. Laurence, W.C. Conner, M.A. Springuel-Huet, A. Nosov and J. Fraissard.* "Study of molecular transport in beds of zeolite crystallites: semi-quantitative modeling of ^{129}Xe NMR experiments", *J. Phys. Chem. B*, **101**, 2277-2284 (1997).

8. *P. N'Gokoli-Kekele, M. A. Spiringuel-Huet, J. Fressard.* An Analitical Study of Molecular Transport in Zeolite Bed . Adsorption.(Kluwer), **8**, 35-44, (2002).

9. *R. de Boor.* Contemporary progress in porous theory, Apl. Mech. Rev. **53** (11), 323-369 (2000.)

10. *Сергиенко И.В., Скопецький В.В., Дейнека В.С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.— К.: Наук. думка, 1991.— 432 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.11.2005