УДК 517.956

©2006 р. В.І. Мироник, В.В. Городецький

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

НУЛЬОВІ МНОЖИНИ ОДНОГО КЛАСУ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Обгрунтовується поняття "аналітичний періодичний функціонал рівний нулю на відкритій множині".

The term "analytical periodical functional is equal to zero on an open set" is found.

Для рядів Фур'є сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана: збіжність або розбіжність ряду Фур'є функції $f \in L_1([0, 2\pi])$ в точці залежить тільки від поведінки f у околі цієї точки (самий же ряд Фур'є визначається "глобальними" властивостями функції f). Точніше, якщо функції $\{f_1, f_2\} \subset L_1([0, 2\pi])$ збігаються на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то на будь-якому відрізку $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b)$, $\varepsilon > 0$, різниця їхніх рядів Фур'є рівномірно збігається до нуля. Цей принцип для рядів Фур'є сформульований ще в середині 18-го століття у працях Фур'є, Остроградського, Лобачевського, Рімана. Свій подальший розвиток він дістав у численних працях математиків з тригонометричних рядів, дослідження яких стало одним з основним об'єктів математичного аналізу і привело до виникнення багатьох важливих понять сучасної математики, зокрема, і до поняття узагальненої функції.

Тригонометричні ряди з необмежено зростаючими коефіцієнтами дістали природну інтерпретацію у рамках теорії узагальнених функцій. Наприклад, якщо коефіцієнти тригонометричного ряду зростають степеневим способом, то він є рядом Фур'є періодичного розподілу Соболєва-Шварца. Теорія ультрарозподілів і гіперфункцій, розвинена в працях Кете, Комацу, М.Л.Горбачука, В.І.Горбачук (див. [1]), дозволяє вивчати тригонометричні ряди з коефіцієнтами, які зростають швидше за будь-який степінь. Такі ряди ототожнюються з узагальненими періодичними функціями – лінійними неперервними функціоналами над простором тригонометричних поліномів.

У багатьох просторах узагальнених функцій має зміст поняття "функціонали F_1 і F_2 збігаються на відкритій множині Q", тобто можна говорити про "локальну" рівність узагальнених функцій. Це дає можливість сформулювати проблему локалізації для рядів Фур'є узагальнених періодичних функцій. Оскільки коефіцієнти таких рядів необмежені, то з урахуванням відомої теореми Кантора-Лебега (такий ряд не може збігатись на множині додатної міри), під сумою ряду слід розуміти не границю його частинних сум, а підсумовувати ряди певними лінійними методами; тоді принцип локалізації може виконуватись для рядів Фур'є узагальнених функцій з різних просторів. Особливо широкий клас таких узагальнених функцій вдалося виділити для методів підсумовування Абеля-Пуассона та Гаусса-Вейєрштрасса. В.І.Горбачук та М.Л.Горбачук довели [1], що принцип локалізації у цьому випадку має місце у класі рядів Фур'є ультрарозподілів Жевре.

Зазначимо, що у вигляді лінійних перетворень рядів Фур'є подаються розв'язки багатьох крайових задач для рівнянь з частинними похідними (наприклад, розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі представляє собою перетворення Абеля-Пуассона ряду Фур'є граничної функції). Якщо лінійне перетворення задовольняє певні природні умови регулярності, то середні методу підсумовування, що визначаються цим перетворенням, мають вигляд $F * K_t$, де $\{K_t,\ t \in T\} \subset X$ – сім'я основних функцій з простору X (ядер Фур'є методу підсумовування), T – деяка множина з граничною точкою t_0, $F \in X'$ – лінійний неперервний функціонал на X. Отже, проблема локалізації для рядів Фур'є узагальнених функцій, просумованих лінійним методом, зводиться до проблеми локалізації для згорток вказаного вигляду: які умови повинна задовольняти сукупність $\{K_t,\ t \in\ T\}$, щоб, коли функціонал $F \in X'$ збігається на деякій відкритій множині Q з гладкою функцією g (така ситуація є типовою для функціоналів – регуляризацій функцій з неінтегровними особливостями), виконувалась умова: $F * K_t \to g,\ t \to t_0$, рівномірно на $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K}$– довільний компакт з Q (у цьому випадку сім'ю функцій $\{K_t,\ t \in T\}$ називатимемо сім'єю функцій класу $\mathcal{L}(X)$). І.Г.Ізв'єков [2] вивчав необхідні і достатні умови належності сукупності основних функцій $\{K_t,\ t \in\ T\}$ до класу $\mathcal{L}(X)$ у випадку, коли X – ультрадиференційовні періодичні функції класу Жевре $G_{\{\beta\}}$, $\beta >\ 1$. Простір $G_{\{1\}}$, який складається з усіх 2π-періодичних аналітичних на $\mathbb{R}$ функцій, не містить фінітних функцій. Використання аналітичних зображень (індикатрис) гіперфункцій дозволило встановити І.Г.Ізв'єкову [2] необхідні і достатні умови характеристики класу $\mathcal{L}(G_{\{1\}})$.

Аналітичні зображення узагальнених функцій досліджувались також Г.Тільманом [3] і М.Сато [4]. Особливу увагу зображенню розподілів за допомогою аналітичних функцій і вивченню їхніх властивостей приділяє у своїх працях Г.Бремерман [5]. Теорема Бремермана про аналітичне зображення узагальнених функцій з простору $\mathcal{E}'$ перенесена Т.І.Готинчан на випадок класу $(S^1_\alpha)'$, $\alpha\ >\ 0$ [6]. За допомогою цієї теореми та безпосередніх наслідків з неї Т.І.Готинчан у співавторстві з В.В.Городецьким [7] обгрунтували поняття "аналітичний функціонал рівний нулю на відкритій множині $Q \subset\ \mathbb{R}$" у випадку неперіодичних класів квазіаналітичних функцій типу S. Тут аналогічні результати одержані у випадку певних класів аналітичних періодичних функцій.

1.Простори основних та узагальнених періодичних функцій

Через T позначимо множину всіх тригонометричних поліномів

$$P(x) = \sum_{k=-s}^{s} c_{k,p} e^{ikx},\ x \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{Z}_+,\ i = \sqrt{-1},$$

над полем комплексних чисел. Зрозуміло, що відносно звичайних операцій додавання поліномів та множення їх на числа T є лінійним простором.

Нехай T_m, $m\ \in\ \mathbb{Z}_+$, – сукупність усіх поліномів з T, степінь яких не перевищує m. Тоді $T\ =\ \bigcup\limits_m T_m$. Збіжність у просторі T визначається так: послідовність $\{P_n,\ n\ \in\ \ \mathbb{N}\} \subset T$ збігається в T до полінома P (записується: $P_n \xrightarrow{T} P,\ n\ \to\ \infty$), якщо, починаючи з деякого номера, всі P_n належать до одного й того ж простору T_m (з деяким m) і $c_{k,p_n}\ \to\ c_{k,p},\ n\ \to\ \infty$, для кожного $k\ :\ \ 0\ \le\ |k|\ \le\ m$. Так визначена збіжність – це збіжність в T як індуктивної границі просторів $T_m:\ T = \lim\limits_{m\to\infty} \mathrm{ind} \mathrm{T_m}$.

У T природним чином вводяться операції диференціювання, множення поліномів та згортки

$$(P{*}Q)(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P(t)Q(x{-}t)dt,\ \{P,Q\} \subset T,$$

які є неперервними в T.

Символом T' позначимо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на T зі слабкою збіжністю. Елементи T' назвемо 2π-періодичними узагальненими функціями. Операція диференціювання в T' визначається за допомогою формули

$$\langle f^{(k)}, P\rangle = (-1)^k \langle f, P^{(k)}\rangle,\ P \in T,\ k \in \mathbb{N}$$

(символом $\langle f, \cdot\rangle$ позначається дія функціоналу f на основний елемент). Вона є неперервною в T', оскільки неперервною є така ж операція в просторі T. Отже, кожний елемент з T' є нескінченно диференційовним. В T' визначена також операція згортки:

$$\langle f * g, P\rangle = \langle f(x), \langle g(y), P(x+y)\rangle\rangle,$$

$$\{f, g\} \subset T', \ \forall P \in T.$$

Рядом Фур'є узагальненої 2π-періодичної функції $f \in T'$ називається ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$, де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle, \ k \in \mathbb{Z}$, – коефіцієнти Фур'є функції f. Для довільної узагальненої 2π-періодичної функції f її ряд Фур'є збігається до f у просторі T'. Навпаки, послідовність частинних сум довільного тригонометричного ряду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx}$ збігається в T' до деякого елемента $f \in T'$ і цей ряд є рядом Фур'є для f [1]. Звідси випливає також, що T лежить щільно в T'. Отже, будь-яку узагальнену 2π-періодичну функцію $f \in T'$ можна ототожнювати з її рядом Фур'є, тобто T' можна трактувати як простір формальних тригонометричних рядів вигляду $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$ (без жодних обмежень на числову послідовність $\{c_k, \ k \in \mathbb{Z}\}$).

Розглянемо послідовність $\{m_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $m_0 = 1$, додатних чисел, яка володіє властивостями:

1)$\forall \alpha > 0 \ \ \exists c_\alpha > 0 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ m_k \leq c_\alpha \cdot \alpha^k$ (тобто $\{m_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ зростає швидше за експоненту);

2)$\exists M > 0 \ \exists h > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ m_{k+1} \leq M h^k m_k$ (стабільність відносно диференціювання);

3)$\exists A > 0 \ \exists L > 0 \ \forall \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+ : \ m_k \cdot m_l \leq A L^{k+l} m_{k+l}$ (стабільність відносно операції множення);

4)$\exists B > 0 \ \exists s > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ : \ m_k \leq B s^k \min\limits_{0 \leq l \leq k} m_{k-l} m_l$ (стабільність відносно згортки).

Прикладами таких послідовностей є послідовності Жевре вигляду: $m_k = (k!)^\beta, \ m_k = k^{k\beta}, \ \beta > 0$.

Введемо тепер деякі класи нескінченно диференційовних періодичних функцій. Символом $H\langle m_k\rangle$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій φ, які володіють властивістю: існують сталі $c, B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c B^k m_k, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Елементи простору $H\langle m_k\rangle$ називаються ультрадиференційовними функціями класу $\{m_k\}$. Множина функцій $\varphi \in H\langle m_k\rangle$, для яких оцінки (1) виконуються з фіксованою сталою $B > 0$, утворює банахів простір $H_B\langle m_k\rangle$ відносно норми

$$\|\varphi\|_B = \sup_{\substack{x \in [0, 2\pi] \\ k \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi^{(k)}(x)|}{B^k m_k}.$$

При цьому $H_{B_1}\langle m_k\rangle \subset H_{B_2}\langle m_k\rangle$, якщо $B_1 < B_2$ і $H\langle m_k\rangle = \bigcup\limits_{B > 0} H_B\langle m_k\rangle$. Отже, в $H\langle m_k\rangle$ природно ввести топологію індуктивної границі банахових просторів $H_B\langle m_k\rangle$: $H\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B \to \infty} \mathrm{ind} \mathrm{H_B}\langle \mathrm{m_k}\rangle$. При цьому $H\langle m_k\rangle$ перетворюється в повний локально опуклий простір. Внаслідок властивостей 2)-4) послідовності $\{m_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ цей простір інваріантний відносно операцій диференціювання, множення та згортки, які є неперервними в $H\langle m_k\rangle$. Відносно операцій множення та згортки цей простір утворює також топологічні алгебри [8]. Якщо послідовність $\{m_k, \ k \in \mathbb{Z}_+\}$ збігається з однією із послідовностей Жевре, то $H\langle m_k\rangle = G_{\{\beta\}}$, де $G_{\{\beta\}}$ – простір ультрадиференційовних функцій класу Жевре порядку $\beta > 0$. Простір $H\langle k!\rangle = H\langle k^k\rangle = G_{\{1\}}$ складають аналітичні 2π-періодичні на $\mathbb{R}$ функції.

Символом $H'\langle m_k\rangle$ позначатимемо простір всіх лінійних неперервних функціоналів на $H\langle m_k\rangle$ зі слабкою збіжністю. Відомо [8], що $H'\langle m_k\rangle$ збігається з проективною границею банахових просторів $H'_B\langle m_k\rangle$: $H'\langle m_k\rangle = \lim\limits_{B \to \infty} \mathrm{pr} \mathrm{H'_B}\langle \mathrm{m_k}\rangle$. Елементи простору $H'\langle m_k\rangle$ називаються ультрарозподілами класу $\{m_k\}$. Елементи з $H'\langle k!\rangle = G'_{\{1\}}$ називаються гіперфункціями або аналітичними періодичними функціоналами.

У праці [8] дається характеристика просторів $H\langle m_k\rangle$ та $H'\langle m_k\rangle$ з точки зору поведінки коефіцієнтів Фур'є їхніх елементів.

Покладемо $\rho(\lambda)=\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{|\lambda|^k}{m_k},\ \lambda\in[1,+\infty)$. Із властивостей послідовності $\{m_k,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ випливає, що функція ρ неперервна, монотонно зростає на $[1,+\infty)$ (швидше ніж $\lambda^n,\ \forall n\in\mathbb{N}$), $\rho(\lambda)\geq 1,\ \forall\lambda\in[1,+\infty)$. Нехай

$$H_{\{\alpha\}}:=\left\{f\in T'|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(f)|^2\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right)<\infty,\right.$$

$$\left. c_k(f)=\langle f,\ e^{-ikx}\rangle\right\},\ \alpha>0.$$

$H_{\{\alpha\}}$ – гільбертів простір зі скалярним добутком

$$(f,g)_{H_{\{\alpha\}}}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k(f)\overline{c_k(g)}\rho^2\left(\frac{|k|}{\alpha}\right),$$

$$\{f,g\}\subset H_{\{\alpha\}}.$$

Якщо $\alpha_1>\alpha_2$, то $H_{\{\alpha_1\}}\supset H_{\{\alpha_2\}}$ і це вкладення є неперервним внаслідок монотонності функції ρ. Покладемо $H\{m_k\}=\bigcup\limits_{\alpha>0}H_{\{\alpha\}}$. Природно в $H\{m_k\}$ ввести топологію індуктивної границі: $H\{m_k\}=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\mathrm{ind}\mathrm{H}_{\{\alpha\}}$. В [8] доведено, що простори $H\langle m_k\rangle$ та $H\{m_k\}$ збігаються не тільки як множини, але і топологічно. Звідси випливає, що простори $H\langle m_k\rangle$ і $H'\langle m_k\rangle$ можна охарактеризувати так [8]:

$$(f\in H\langle m_k\rangle)\Leftrightarrow(\exists\mu>0\ \exists c>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\rho^{-1}(\mu|k|));$$

$$(f\in H'\langle m_k\rangle)\Leftrightarrow(\exists\mu>0\ \exists c=c(\mu)>0$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}:\ |c_k(f)|\leq c\rho(\mu|k|)).$$

Якщо $m_k=k^{k\beta},\ \beta>0$, то $\rho(\lambda)\sim\exp(|\lambda|^{1/\beta})$, тобто в цьому випадку для $f\in T'$ правильними є співвідношення еквівалентності:

$$(f\in G_{\{\beta\}})\Leftrightarrow(\exists\mu>0\ \exists c>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\exp(-\mu|k|^{1/\beta}));$$

$$(f\in G'_{\{\beta\}})\Leftrightarrow(\exists\mu>0\ \exists c=c(\mu)>0\ \forall k\in\mathbb{Z}:$$

$$|c_k(f)|\leq c\exp(-\mu|k|^{1/\beta})).$$

Простори $\mathcal{D}_{2\pi}$ та $\mathcal{D}'_{2\pi}$. Символом $\mathcal{D}_{2\pi}$ позначимо сукупність всіх 2π-періодичних і нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій із збіжністю: послідовність $\{\varphi_n,\ n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{D}_{2\pi}$ збігається до функції φ в $\mathcal{D}_{2\pi}$, якщо $\varphi_n^{(k)}\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}\varphi^{(k)},\ n\to\infty$, при кожному $k\in\mathbb{Z}_+$.

Простір $\mathcal{D}'_{2\pi}$ складається з усіх лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_{2\pi}$. Елементи цього простору називають 2π-періодичними узагальненими функціями типу розподілів або просто 2π-періодичними розподілами.

Для введених просторів правильними є неперервні вкладення: $T\subset H\langle m_k\rangle\subset\mathcal{D}_{2\pi}\subset\mathcal{D}'_{2\pi}\subset H'\langle m_k\rangle\subset T'$.

2. Деякі класи аналітичних періодичних функцій

Припустимо, що послідовність $\{m_k,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє ще одну умову:

5) $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{m_k}}{k}=0$.

Умова 5) еквівалентна умові [9]

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{\ln\rho(\lambda)}{|\lambda|}=\infty,$$

тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ \forall\lambda:|\lambda|\geq\max\{1,\delta\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho(\lambda)>e^{\varepsilon|\lambda|}.$$

Отже,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>1\ \forall\lambda:|\lambda|\geq 1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\rho(\lambda)>c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|}. \qquad (2)$$

Покладемо

$$\rho_k:=\inf_{|\lambda|\geq 1}\frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^k},k\in\mathbb{Z}_+.$$

Безпосередньо переконуємось в тому, що послідовність $\{\rho_k,\ k\in\mathbb{Z}_+\}$ є монотонно спадною, $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\rho_k}=0$, послідовність $\left\{\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k},\ k\geq 1\right\}$ обмежена зверху, тобто існує $\alpha>1$ таке, що $\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}\leq\alpha,\ k\geq 1$. Звідси випливає також, що

$$\frac{\rho_{k-2}}{\rho_k}=\frac{\rho_{k-2}}{\rho_{k-1}}\cdot\frac{\rho_{k-1}}{\rho_k}\leq\alpha^2,\ \frac{\rho_{k-3}}{\rho_k}\leq\alpha^3,\ldots \qquad (3)$$

Розглянемо тепер послідовність спеціального вигляду, а саме, $l_k = k!\rho_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, і доведемо, що вона задовольняє умови 1)-5). Із нерівності (2) випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 1\ \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$\rho_k \geq c_\varepsilon \inf_{\lambda \geq 1} \frac{e^{\varepsilon\lambda}}{\lambda^k} = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k k^{-k}$$

Скориставшись формулою Стірлінга знайдемо, що

$$l_k = k!\rho_k = \sqrt{2\pi k} \cdot k^k e^{-k} e^{\frac{\theta_k}{12k}} c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k k^{-k} \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^k,$$

$$0 < \theta_k < 1,$$

тобто послідовність $\{l_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ умову 1) задовольняє.

Перевіримо виконання для цієї послідовності умови 2). Оскільки послідовність $\{\rho_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно спадною, то

$$l_{k+1} = (k+1)!\rho_{k+1} \leq (k+1)^{k+1}\sqrt{2\pi(k+1)}\times$$

$$\times e^{\frac{\theta_k}{12(k+1)}}\rho_k \leq Mh^k k^k \rho_k = Mh^k l_k,$$

$$0 < \theta_k < 1,\ M = 4e\sqrt{2\pi},\ h = e.$$

Отже, умова 2) виконується.

Для доведення властивості 3) досить встановити існування чисел $A, L > 0$ таких, що

$$\frac{l_k \cdot l_p}{l_{k+p}} = \frac{k^k k^p \rho_k \rho_p}{(k+p)^{k+p}\rho_{k+p}} \leq AL^{k+p},$$

$$\forall \{k, p\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Для цього скористаємось оцінками (3) (тоді $\frac{\rho_k}{\rho_{k+p}} \leq \alpha^p,\ \alpha > 1$), а також тим, що послідовність $\{\rho_p,\ p \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна ($\rho_p \leq \rho_0 \equiv A,\ \forall p \in \mathbb{Z}_+$). Отже,

$$\frac{k^k k^p \rho_k \rho_p}{(k+p)^{k+p}\rho_{k+p}} = \frac{k^k \cdot k^p}{k^{k+p}\left(1 + \frac{p}{k}\right)^{k+p}} \cdot \frac{\rho_k}{\rho_{k+p}} \cdot \rho_p \leq$$

$$\leq \rho_0 \alpha^p \leq \rho_0 \alpha^{k+p} \equiv AL^{k+p},\ A = \rho_0,\ L = \alpha > 1,$$

тобто $l_k \cdot l_p \leq AL^{k+p} l_{k+p},\ \forall \{k, p\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Властивість 4) для послідовності $\{l_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ набуває вигляду

$$k!\rho_k \leq Bs^k \min_{0 \leq p \leq k} (k-p)!\rho_{k-p} p!\rho_p$$

з деякими сталими $B, s > 0$. Зазначимо, що $k! \leq 2^k (k-p)!p!$ для $\forall p : 0 \leq p \leq k$, оскільки

$$\frac{k!}{(k-p)!p!2^k} = \frac{1}{2^k} C_k^p \leq 1.$$

Із означення $\rho_k,\ k \in \mathbb{Z}_+$, випливає, що послідовність $\{\rho_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$ володіє властивістю:

$$\rho_k \leq \rho_{k-p} \cdot \rho_p,\ \forall p : 0 \leq p \leq k.$$

Справді,

$$\rho_k = \inf_{|\lambda| \geq 1} \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^k} = \inf_{|\lambda| \geq 1} \left\{ \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^{k-p}} \cdot \frac{1}{|\lambda|^p} \right\} \leq$$

$$\leq \inf_{|\lambda| \geq 1} \left\{ \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^{k-p}} \cdot \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^p} \right\} =$$

$$= \inf_{|\lambda| \geq 1} \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^{k-p}} \cdot \inf_{|\lambda| \geq 1} \frac{\rho(\lambda)}{|\lambda|^p} = \rho_{k-p} \cdot \rho_p$$

(тут враховано, що $\rho(\lambda) \geq 1,\ \lambda \in [1, +\infty)$). Отже,

$$l_k \leq 2^k \min_{0 \leq p \leq k} l_{k-p} \cdot l_p,$$

що й потрібно було довести.

Послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє також умову 5). Справді, послідовність $\left\{\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}, k \geq 1\right\}$ обмежена, а внаслідок відповідної властивості послідовності $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ маємо, що $\lim\limits_{k \to \infty} \sqrt[k]{\rho_k} = 0$. Отже,

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt[k]{l_k}}{k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\sqrt[k]{k!\rho_k}}{k} = 0.$$

Розглянемо тепер клас періодичних ультрадиференційовних функцій $H\langle k!\rho_k \rangle$. Виявляється, що елементами цього класу є аналітичні (цілі) періодичні функції, які як функції комплексної змінної задовольняють певну умову. Точніше, правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k \rangle$ тоді і лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z), z \in \mathbb{C}$, і це продовження задовольняє умову: існують сталі $c, b > 0$ (залежні, можливо, лише від φ) такі, що*

$$|\varphi(x + iy)| \leq c\tilde{\rho}(by), \quad \forall \{x, y\} \subset \mathbb{R},$$

$$\tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \geq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Доведення. Нехай φ має аналітичне продовження в $\mathbb{C}$ і виконується умова (4). Згідно з інтегральною формулою Коші

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{(z-x)^{k+1}} dz,$$

$$x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де γ_R – коло радіуса R з центром у точці x. Тоді

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{k!}{2\pi} \max_{z \in \gamma_R} \frac{|\varphi(z)|}{|z-x|^{k+1}} \oint\limits_{\gamma_R} ds \leq$$

$$\leq ck! b^k \inf_R \frac{\tilde{\rho}(bR)}{b^k R^k} = cb^k \cdot k! \rho_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Тут враховано, що оскільки

$$\inf_{y \neq 0} \frac{1}{|y|^k} = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \ y \neq 0, \\ 0, & |y| \geq 1, \ k \geq 1, \end{cases}$$

то

$$\inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} = \inf_{|y| \geq 1} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} = \inf_{y \geq 1} \frac{\rho(y)}{|y|^k} = \rho_k.$$

Отже,

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq cb^k k! \rho_k, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R},$$

тобто $\varphi \in H\langle k!\rho_k \rangle$.

Навпаки, нехай нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належить до класу $H\langle k!\rho_k \rangle$, тобто існують сталі $c' > 0$, $B > 0$ такі, що

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq c' B^k k! \rho_k, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ x \in \mathbb{R}.$$

Тоді її можна аналітично продовжити у всю комплексну площину $\mathbb{C}$. Справді, залишковий член у формулі Тейлора

$$\varphi(x+\Delta x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(z)}{k!} (\Delta x)^k + \frac{\varphi^{(n)}(\xi)}{n!} (\Delta x)^n,$$

де $x \in \mathbb{R}$, $|\xi - x| < |\Delta x|$, допускає оцінку

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} |\Delta x|^n \leq c' B^n \rho_n |\Delta x|^n =$$

$$= c' (B |\Delta x| \sqrt[n]{\rho_n})^n.$$

Оскільки $\sqrt[n]{\rho_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o = n_o(\varepsilon) \quad \forall n \geq n_o : \ \rho_n < \varepsilon^n.$$

Покладемо $\varepsilon = \frac{1}{2}(B|\Delta x|)^{-1}$. Тоді

$$\frac{|\varphi^{(n)}(\xi)|}{n!} \leq c' \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0, \ n \to \infty.$$

Отже, залишковий член у формулі Тейлора прямує до нуля при $n \to \infty$ для довільного Δx, тобто φ продовжується до цілої функції $\varphi(z) = \varphi(x+iy)$, причому

$$\varphi(x+iy) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \varphi^{(k)}(x)$$

і

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B^k |y|^k \rho_k.$$

Оскільки

$$|y|^k B^k \rho_k = |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k} =$$

$$= |y|^k B^k \inf_{y \neq 0} \frac{\tilde{\rho}(2By)}{(2B|y|)^k} \leq |y|^k B^k \frac{\tilde{\rho}(2By)}{2^k B^k |y|^k} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \tilde{\rho}(by), \ b = 2B, \ k \geq 1, \ y \neq 0,$$

то

$$|\varphi(x+iy)| \leq c' \tilde{\rho}(by) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = c\tilde{\rho}(by), \ y \neq 0,$$

де $c = 2c'$. Зазначимо, що для $y = 0$ ця нерівність є очевидною. Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо $m_k = k^{k(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то $\rho(y) \sim \exp(|y|^{1/(1-\beta)})$ і в цьому випадку $\rho_k \sim k^{-k(1-\beta)}$. Тоді $\ell_k = k!\rho_k \sim k^{k\beta}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже, з теореми 1 випливає, що клас Жевре $H\langle k^{k\beta} \rangle = G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, характеризується так: *для того, щоб нескінченно диференційовна 2π-періодична функція φ належала до класу $G_{\{\beta\}}$, $0 < \beta < 1$, необхідно і досить, щоб вона аналітично продовжувалась в комплексну площину до цілої функції і це продовження задовольняло умову:*

$$\exists c > 0 \ \exists b > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(x+iy)| \le c \cdot \exp\left\{b|y|^{1/(1-\beta)}\right\}.$$

3. Нульові множини аналітичних функціоналів

Наявність у локально опуклому просторі X фінітних функцій дозволяє ввести означення рівності нулю узагальненої функції $F \in X'$ на відкритій множині.

Означення 1. *Узагальнена функція $F \in X'$ рівна нулю на відкритій множині $\Omega \subset \mathbb{R}$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in X$ такої, що $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega$, виконується рівність $\langle F, \varphi\rangle = 0$.*

Простір $H\langle k!\rho_k\rangle \subset G_{\{1\}} = H\langle k!\rangle$ складається з усіх 2π-періодичних функцій на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і тому цей простір фінітних функцій не містить. Тут ми введемо поняття "аналітичний періодичний функціонал $f \in H'\langle k!\rho_k\rangle \supset G'_{\{1\}}$ рівний нулю на відкритій множині", використовуючи при цьому певні твердження, які стосуються поняття гіперфункції та рівності гіперфункції нулю на відкритій множині, встановлені І.Г.Ізв'єковим в [2].

Нагадаємо, що гіперфункціями називають елементи простору, спряженого до $G_{\{1\}}$. Елементи простору $G'_{\{1\}}$ можна охарактеризувати так. Нехай $f \in G'_{\{1\}}$. За допомогою формули

$$\langle f, \ \frac{1}{e^{ix}-z}\rangle = \tilde{f}(z), \ z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$$

(тут Γ – одиничне коло в $\mathbb{C}$ з центром у початку координат), кожній гіперфункції f ставиться у відповідність функція $\tilde{f}(z)$, яка є аналітичною на множині $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, а на нескінченності обертається в нуль [2]. Навпаки, кожній такій функції $\tilde{f}(z)$ зіставляється гіперфункція f:

$$\langle f, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma'\bigcup\gamma''} \tilde{f}(z)\hat{\varphi}(z)dz, \ \varphi \in G_{\{1\}},$$

де $\hat{\varphi}(e^{ix}) = \varphi(x)$, γ' і γ'' – кола, які лежать відповідно всередині та зовні одиничного круга і на них $\hat{\varphi}(z)$ є аналітичною; при цьому контур γ' проходиться проти, а γ'' – за годинниковою стрілкою. Функція $\tilde{f}(z)$ називається *аналітичним зображенням* або *індикатрисою* функціоналу $f \in G'_{\{1\}}$. Наприклад, індикатриса дельта-функції Дірака має вигляд: $\tilde{\delta}(z) = \frac{1}{1-z}$. Зазначимо також, що індикатриса $\tilde{f}(z)$ гіперфункції $f \in G'_{\{1\}}$ в околах точок 0 та ∞ розкладається відповідно в ряди [2]:

$$\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)z^{k-1}, \ |z| < 1, \qquad (5)$$

$$\tilde{f}(z) = -\sum_{k=-\infty}^{0} c_k(f)z^{k-1}, \ |z| > 1, \qquad (6)$$

де $c_k(f) = \langle f, e^{-ikx}\rangle$.

У праці [2] введено таке означення: гіперфункція f рівна нулю на відкритій множині Ω, якщо її індикатриса $\tilde{f}$ аналітично продовжується на дугу $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in \Omega\}$. Введемо тепер поняття "функціонал $f \in H'\langle k!\rho_k\rangle \supset G'_{\{1\}}$ рівний нулю на інтервалі $(a,b) \subset [0,2\pi]$". Символом $H(a,b)$ позначимо сукупність нескінченно диференційовних 2π-періодичних функцій з простору $\mathcal{D}_{2\pi}$, які на $[0,2\pi]\setminus(a,b)$ збігаються з функціями з простору $H\langle k!\rho_k\rangle$. Топологію в $H(a,b)$ задамо так: нехай $\{\varphi;\ \varphi_n,\ n \in \mathbb{N}\} \subset H(a,b)$; $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{H(a,b)} \varphi$, якщо для довільного $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)}}{B^k k!\rho_k} \underset{n\to\infty}{\overset{[0,2\pi]\setminus(a,b)}{\rightrightarrows}} 0,$$

при деякому $B > 0$ і $\varphi_n^{(k)} - \varphi^{(k)} \underset{n\to\infty}{\overset{(a,b)}{\rightrightarrows}}$. Очевидно, що

1)$H\langle k!\rho_k\rangle \subset H(a,b)$;

2)$K(a,b) \subset H(a,b)$, де $K(a,b)$ – сукупність фінітних функцій з $\mathcal{D}_{2\pi}$, носії яких містяться в (a,b). Наведемо тепер наступне означення.

Означення 2. *Узагальнена функція $f \in H'\langle k!\rho_k\rangle$ рівна нулю на $(a,b) \subset [0,2\pi]$, якщо існує продовження цього функціоналу $F \in H'(a,b)$, рівне нулю на (a,b).*

Теорема 2. *Якщо $f \in H'\langle m_k\rangle$, де $H\langle m_k\rangle$– неквазіаналітичний клас функцій, то $f = 0$*

на (a,b) *за означенням* 1 *тоді і лише тоді, коли* $f=0$ *на* (a,b) *за означенням* 2.

Доведення. Необхідність. Нехай $f \in H'\langle m_k\rangle$ і $f=0$ на (a,b) за означенням 1. Побудуємо функціонал $F : H(a,b) \longrightarrow \mathbb{C}$ так. Візьмемо довільну функцію $\psi \in H(a,b)$. За цією функцією розглянемо функцію $\varphi \in H\langle k!\rho_k\rangle \subset H\langle m_k\rangle$ таку, що $\varphi(x)=\psi(x)$ на $[0,2\pi]\setminus(a,b)$. Зрозуміло, що якщо *supp* $\psi \subset (a,b)$, то $\varphi \equiv 0$ на $[0,2\pi]$. Розглянемо також функцію $\gamma \in \mathcal{D}_{2\pi}$ таку, що: 1) $\gamma(x)=1,\ x \in [a_1,b_1] \subset (a,b)$; 2)$\gamma(x)=0$, якщо $x \notin (a,b)$. Функціонал F задамо тепер так:

$$\langle F,\psi\rangle = \langle f,\varphi\rangle + \langle \gamma G, \psi-\varphi\rangle,$$

де $G \in \mathcal{D}'_{2\pi}$– продовження функціоналу f з простору $H\langle m_k\rangle$ на $\mathcal{D}_{2\pi}$. Очевидно, що функціонал F визначений на всьому просторі $H(a,b)$ і є лінійним. Доведемо, що він є неперервним.

Для цього розглянемо довільну послідовність $\{\psi_n,\ \ n\in\mathbb{N}\} \subset H(a,b)$ таку, що $\psi_n \to 0$ при $n\to\infty$ у просторі $H(a,b)$. Нехай $\varphi_n,\ \ n\in\mathbb{N}$,– відповідні функції з простору $H\langle k!\rho_k\rangle$, які визначаються функціями $\psi_n,\ \ n\in\mathbb{N}$. Тоді

$$\frac{\varphi_n^{(m)}}{B^m m!\rho_m} \overset{[0,2\pi]\setminus(a,b)}{\rightrightarrows} 0,\ n\to\infty,$$

при деякому $B>0$, тобто

$$\forall\varepsilon>0\ \ \forall m\in\mathbb{Z}_+\ \ \exists n_0=n_0(\varepsilon)\ \ \forall n\ge n_0:$$

$$\frac{|\varphi_n^{(m)}(x)|}{B^m m!\rho_m} < \varepsilon,\ \forall x\in[0,2\pi]\setminus(a,b). \qquad (7)$$

Доведемо, що оцінки (7) зберігаються і на інтервалі (a,b).

Послідовність $\{\varphi_n,\ \ n\in\mathbb{N}\}$ належить до простору $H\langle k!\rho_k\rangle$, тому в околі довільної точки $x_0\in[0,2\pi]$ правильним є розклад

$$\varphi_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_n^{(k+m)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,$$

$$n\in\mathbb{N},\ \ m\in\mathbb{Z}_+. \qquad (8)$$

Зафіксуємо $x_0\in[0,2\pi]\setminus(a,b)$ і розглянемо довільну точку $x\in(a,b)$. Ряд (8) збігається рівномірно на довільному компакті, який містить відрізок, що з'єднує точки x і x_0. Отже,

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\varphi_n^{(k+m)}(x_0)|}{k!}|x-x_0|^k \le$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty} \frac{|\varphi_n^{(k)}(x_0)|}{(k-m)!} L^{k-m},$$

де $L=2\pi$. Використовуючи (7) отримаємо, що

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ \forall m\in\mathbb{Z}_+\ \ \forall x\in(a,b):$$

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| \le \varepsilon \sum_{k=m}^{\infty} \frac{B^k k!\rho_k}{(k-m)!} L^{k-m} =$$

$$= \varepsilon L^{-m} m!\rho_m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{B^k k!\rho_k L^k}{m!(k-m)!\rho_m}.$$

Зазначимо, що для $k\ge m$

$$C_k^m = \frac{k!}{m!(k-m)!} \le \sum_{j=0}^{k} C_k^j = 2^k.$$

Далі скористаємось тим, що послідовність $\{\rho_m,\ \ m\in\mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову (3):

$$\frac{\rho_{m-s}}{\rho_m} \le \alpha^s,\ \ \alpha>1,\ \ 1\le s\le m;$$

тоді $\frac{1}{\rho_m} \le \frac{\alpha^m}{\rho_0}$. Отже,

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| \le \frac{\varepsilon}{\rho_0}\left(\frac{\alpha}{L}\right)^m m!\rho_m \cdot \sum_{k=m}^{\infty}(2BL)^k(\sqrt[k]{\rho_k})^k.$$

Оскільки, як відомо, $\sqrt[k]{\rho_k}\to 0$ при $k\to+\infty$, то для $\varepsilon_0=\frac{1}{4BL}$ знайдеться номер $k_0\ge m$ такий, що для всіх $k\ge k_0$:

$$\sqrt[k]{\rho_k} < \left(\frac{1}{4BL}\right)^k.$$

Тоді

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| \le \varepsilon c_0 B_0^m m!\rho_m \times$$

$$\times\left[\sum_{k=m}^{k_0}(2BL)^k\rho_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}(2BL)^k(\sqrt[k]{\rho_k})^k\right] \le$$

$$\le \varepsilon c_0 B_0^m m! \rho_m \left[\sum_{k=m}^{k_0} (2BL)^k \rho_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right],$$

$$c_0 = \frac{1}{\rho_0}, \ \ B_0 = \frac{\alpha}{L}.$$

Для оцінки $\sum\limits_{k=m}^{k_0} (2BL)^k \rho_k$ скористаємось тим, що

$$\rho_k = \inf_{y \ne 0} \frac{\tilde{\rho}(y)}{|y|^k}, \ \ \tilde{\rho}(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \rho(y), & |y| \ge 1. \end{cases}$$

Тоді правильною є нерівність

$$\rho_k \le \frac{\tilde{\rho}(4BL)}{(4BL)^k}, \ \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

звідки дістаємо, що

$$\sum_{k=m}^{k_0} (2BL)^k \rho_k \le \tilde{\rho}(4BL) \cdot \sum_{k=m}^{k_0} \frac{1}{2^k} \le$$

$$\le \tilde{\rho}(4BL) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\tilde{\rho}(4BL).$$

Отже,

$$|\varphi_n^{(m)}(x)| \le \varepsilon c_0 B_0^m m! \rho_m \times$$

$$\times \left[2\tilde{\rho}(4BL) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right] = \varepsilon \tilde{c_0} B_0^m m! \rho_m,$$

де $\tilde{c_0} = 2c_0[\tilde{\rho}(4BL) + 1]$, або, інакше,

$$\|\varphi_n\|_{\tilde{B}} = \sup_{\substack{x \in [0,2\pi] \\ m \in \mathbb{Z}_+}} \frac{|\varphi_n^{(m)}(x)|}{\tilde{B}^m m! \rho_m} < \varepsilon \tilde{c},$$

$$\tilde{B} = \min\{B_0, B\}, \ \ \tilde{c} = \max\{1, \tilde{c_0}\},$$

тобто $\|\varphi_n\|_{\tilde{B}} \to 0$ при $n \to \infty$. Цим доведено, що послідовність $\{\varphi_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ збігається у просторі $H\langle k! \rho_k \rangle$. Крім того, $\{\psi_n - \varphi_n, \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}_{2\pi}$, $\psi_n - \varphi_n = 0$ на $[0, 2\pi] \setminus (a, b)$, тому $\psi_n - \varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ за топологією простору $\mathcal{D}_{2\pi}$. Звідси вже дістаємо, що

$$\langle F, \ \psi_n \rangle = \langle f, \ \varphi_n \rangle + \langle \gamma G, \ \psi_n - \varphi_n \rangle \to 0,$$

при $n \to \infty$, тобто $F \in H'(a, b)$.

Для кожної функції $\varphi \in H\langle k! \rho_k \rangle$ очевидна рівність $\langle F, \ \varphi \rangle = \langle f, \ \varphi \rangle$, тобто F є лінійним неперервним продовженням функціоналу f на простір $H(a, b)$. Доведемо, що $F = 0$ на (a, b).

Візьмемо довільну функцію

$$\psi \in H(a, b) \subset \mathcal{D}_{2\pi}$$

таку, що $\text{supp}\psi \subset (a, b)$. Тоді знайдеться відрізок $[a_1, b_1] \subset (a, b)$ такий, що $\text{supp}\psi \subset [a_1, b_1]$. Оскільки при цьому відповідна функція $\varphi \equiv 0$ на $[0, 2\pi]$, то

$$\langle F, \psi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + \langle \gamma G, \psi - \varphi \rangle =$$

$$= \langle G, \gamma \psi \rangle = \langle G, \psi \rangle.$$

Функціонал G є продовженням функціоналу f на $\mathcal{D}_{2\pi}$, тому $G = 0$ на (a, b), якщо $f = 0$ на (a, b). Нехай $\tilde{G}$ позначає індикатрису функціоналу $G \in \mathcal{D}'_{2\pi} \subset G'\{1\}$. Міркуючи аналогічно тому, як це зроблено в [2] доводимо, що

$$\langle G, \psi \rangle = \lim_{0 < r_1 \nearrow 1} \frac{r_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix} \tilde{G}_1(r_1 e^{ix}) \psi(x) dx -$$

$$- \lim_{0 < r_1 \searrow 1} \int_0^{2\pi} e^{ix} \tilde{G}_2(r_2 e^{ix}) \psi(x) dx, \qquad (9)$$

де $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ визначаються відповідно формулами (5), (6) (із заміною в них $\tilde{f}$ на $\tilde{G}$). Якщо $\text{supp}\psi \subset [a_1, b_1] \subset (a, b)$, то з (9) випливає, що $\langle G, \psi \rangle = 0$, оскільки $\tilde{G}$ аналітично продовжується на дугу $\gamma = \left\{ e^{i\theta}, \ \theta \in (a, b) \right\}$ і $\tilde{G}(re^{ix}) \overset{[a_1, b_1]}{\rightrightarrows} G(e^{ix})$ при $r \to 1$. Із співвідношення $\langle F, \psi \rangle = \langle G, \psi \rangle$ дістаємо, що $F = 0$ на (a, b), тобто узагальнена функція $f = 0$ за означенням 2.

Достатність. Нехай $f \in H'\langle m_k \rangle$ і $f = 0$ за означенням 2, тобто існує продовження $F \in H'(a, b)$, рівне нулю на (a, b). Оскільки

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle F, \varphi \rangle, \ \ \forall \varphi \in H\langle m_k \rangle,$$

то $\langle F, \varphi \rangle = 0$ для довільної функції $\varphi \in H\langle m_k \rangle$ такої, що $\text{supp}\varphi \subset (a, b)$. Тоді $\langle f, \varphi \rangle =$

0, якщо $\operatorname{supp}\varphi \subset (a,b)$. Отже, $f = 0$ на (a,b) за означенням 1.

Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР.— 1981.— **257**, № 4.— С.799—803.

2. *Извеков И.Г.* Принцип локализации для линейных методов суммирования рядов Фурье обобщенных функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1985.— 123 с.

3. *Tillmann H.G.* Die Randvertielungen analitischer Functionen und Distributionen // Math. Zeit.— 1953.— Bd.59.— S.61—83.

4. *Sato M.* Theory of hyperfunctions, I // J.Fac. Sci. Univ.— Tokyo.— Sect.I.— 1959.— № 8.— P.139—193.

5. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье.— М.:Мир, 1968.— 267 с.

6. *Готинчан Т.І.* Про аналітичне зображення ультрарозподілів типу S' // Вісник Київського ун-ту. Серія фізико-математичних наук.— Випуск 1.— 1998.— С.37—41.

7. *Городецький В.В., Готинчан Т.І.* Про нульові множини узагальнених функцій з простору $(S^1_{1/n})'$ // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— Випуск 1(17).— С.79—89.

8. *Горбачук В.И.* О рядах Фурье периодических ультрараспределений // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 2.— С.144—150.

9. *Бабенко К.И.* Об одной новой проблеме квазианалитичности и о преобразовании Фурье целых функций // Труды Моск. матем. общества.— 1956.— **5**.— С.523—542.

Стаття надійшла до редколегії 3.02.2006