УДК 517.51+517.98

©2006 р. **Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В.**

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ОПЕРАТОР ПЕРЕХОДУ ДО ПОТОЧКОВОЇ ГРАНИЦІ

Доведено, що не існує секвенціально неперервного правого оберненого оператора до оператора переходу до поточкової границі.

We proved there does not exist sequentially continuous operator which is right-inversed to operator of crossing to pointwise limit.

1. Результати цієї праці постали у зв'язку з поки що нерозв'язаною проблемою, поставленою в [1].

Проблема 1. Чи кожна функція $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, яка належить до першого класу Бера відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної є поточковою границею послідовності нарізно неперервних функцій $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$?

Для топологічного простору X позначимо через $L(X)$ сукупність всіх послідовностей (f_n) неперервних функцій $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, які поточково збігаються на X до деякої функції $f_\infty : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Якщо над елементами з $L(X)$ ввести дії покомпонентного додавання, множення і множення на дійсні скаляри, то $L(X)$ перетворюється в алгебру над $\mathbf{R}$. Наділимо $L(X)$ топологією, індукованою з добутку послідовності просторів, кожен з яких збігається з простором $C_p(X)$ всіх неперервних на X функцій з топологією поточкової збіжності. При цьому вказаний добуток наділяється своєю тихоновською топологією. Алгебру $L(X)$ з уведеною на ній топологічною структурою можна ототожнити з алгеброю $\overline{C}C(X \times \alpha\mathbf{N}, \mathbf{R})$ всіх горизонтально майже нарізно неперервних функцій $f : X \times \alpha\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ з топологією поточкової збіжності, співставивши послідовності (f_n) з $L(X)$ функцію f, для якої $f(x, n) = f_n(x)$ при $x \in X$ і $n \in \alpha\mathbf{N}$ (тут $\alpha\mathbf{N} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ — компактифікація Александрова натурального ряду $\mathbf{N}$). Нехай $B_1(X)$ — простір всіх функцій $g : X \to \mathbf{R}$ першого класу Бера з топологією поточкової збіжності. Відображення $P : L(X) \to B_1(X)$, яке ставить у відповідність кожній послідовності (f_n) з $L(X)$ її поточкову границю f_∞, яка, зрозуміло, належить до $B_1(X)$, є, очевидно, сюр'єктивним гомоморфізмом алгебр. Позначимо через $R(P)$ множину всіх відображень $Q : B_1(X) \to L(X)$, які є правими оберненими до оператора $P : L(X) \to B_1(X)$, тобто для яких $PQ = id_{B_1(X)}$. Ясно, що P, як і кожний лінійний сюр'єктивний оператор, має правий обернений, який також є лінійним оператором. Природно виникають такі питання.

Проблема 2. Чи містить множина $R(P)$ відображення, яке було б гомоморфізмом алгебр $L(X)$ і $B_1(X)$?

Проблема 3. Чи існує оператор $Q \in R(P)$, який є неперервним відносно топології поточкової збіжності на $B_1(X)$ і топології покоординатної збіжності на $L(X)$?

Як легко зміркувати, з позитивної відповіді на проблему 3 випливає позитивна відповідь на проблему 1. Втім, виявляється, що відповіді на проблеми 2 і 3 є негативними при досить широких припущеннях на X. З'ясуванню цього і присвячена дана праця. Попередні версії її результатів були анонсовані в [2].

2. Почнемо з розв'язання проблеми 2.

Теорема 1. Якщо на зв'язному топологічному просторі X є неперервні дійснозначні функції, що відрізняються від констант, то в множині $R(P)$ немає оператора, який би зберігав множення.

Доведення. Нехай на просторі X є неперервні і несталі функції і тим не менше існує оператор $Q \in R(P)$, який зберігає множення. Покажемо, що це приведе нас до суперечності.

Візьмемо неперервну функцію $f_0 : X \to \mathbf{R}$, яка набуває принаймні двох значень α і β, де $\alpha < \beta$. Розглянемо лінійну функцію $\varphi_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для якої $\varphi_0(\alpha) = 0$ і $\varphi_0(\beta) = 1$, і покладемо $g_0 = \varphi_0 \circ f_0$. Функція g_0 теж неперервна і набуває значень 0 і 1. Далі покладемо $f(x) = \max\{0, \min\{g_0(x), 1\}\}$ для $x \in X$. Функція f неперервна, причому її значення лежать між 0 і 1, а множини $f^{-1}(0)$ і $f^{-1}(1)$ непорожні. Нехай $f_n(x) = (f(x))^n$ для $x \in X$. Функції $f_n : X \to \mathbf{R}$ неперервні і їх поточковою границею буде характеристична функція g множини $A = f^{-1}(1)$, причому $A \neq \Omega$ і $B = X \setminus A \neq \Omega$. Зрозуміло, що $g \in B_1(X)$ і при цьому $g^2 = g$.

Нехай $Q(g) = (g_n)$. Тоді

$$(g_n) = Q(g^2) = (Q(g))^2 = (g_n^2),$$

отже , $g_n^2 = g_n$ для кожного номера n. Таким чином, функція g_n для кожного n є характеристичною функцією деякої множини A_n. Оскільки вона до того ж неперервна, а простір X зв'язний, то $A_n = X$ або $A_n = \Omega$, тобто $g_n = 1$ або $g_n = 0$ для кожного n. За припущенням $PQ = id_{B_1(X)}$. Отже, $P((g_n)) = PQ(g) = g$, тобто функція g є поточковою границею послідовності функцій g_n на X. Але послідовність з нулів і одиниць збігається тоді і тільки тоді, коли вона стабілізується, тобто, починаючи з деякого номера, стане набувати одного значення 0 чи 1. Звідси впливатиме, що $g = 0$ або $g = 1$, але це не так, бо g набуває і значення 0, і значення 1. Отримана суперечність і доводить наше твердження.

Зауваження. Як видно з доведення теореми 1 для простору X, що задовольняє її умови, не існує навіть оператора $Q \in R(P)$, який би зберігав співвідношення $g^2 = g$, тобто переводив би характеристичні функції на X в послідовність характеристичних функцій на X.

3. Для розв'язання проблеми 3 нам будуть потрібні кілька допоміжних результатів.

Лема 1. Нехай X — цілком регулярний простір, в якому кожна одноточкова множина є типу G_δ, і φ — відображення, яке ставить у відповідність кожній точці x з X характеристичну функцію $\varphi(x) = \chi_{\{x\}}$ одноточкової множини $\{x\}$. Тоді $\varphi(X) \subseteq B_1(X)$, причому $\varphi(x_n) \to 0$ поточково на X для кожної послідовності попарно різних точок x_n простору X.

Доведення. Нехай $x \in X$. Існує спадна послідовність відкритих множин U_n в X, така, що $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n = \{x\}$. З повної регулярності X випливає, що для кожного n існує неперервна функція $f_n : X \to [0, 1]$, така, що $f_n(x) = 1$ і $f_n(u) = 0$ на $X \setminus U_n$. Якщо $u \in X \setminus \{x\}$, то існує такий номер N, що $u \notin U_N$. Тоді $u \notin U_n$ і для всіх $n \geq N$, бо послідовність околів U_n спадає. В такому разі $f_n(u) = 0$ при $n \geq N$, отже, $f_n(u) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки до того ж $f_n(x) = 1$ для кожного n, то $f_n \to \chi_{\{x\}}$ поточково на X, отже, $\chi_{\{x\}} \in B_1(X)$, а значить, $\varphi(X) \subseteq B_1(X)$.

Далі, нехай $x_n \neq x_m$ при $n \neq m$ і $x \in X$. Якщо $x \neq x_n$ для кожного n, то $\varphi(x_n)(x) = 0$ для кожного n, якщо ж $x = x_N$ для деякого N, то $\varphi(x_n)(x) = 0$ при $n \neq N$, зокрема, при $n > N$. Таким чином, ми бачимо, що $\varphi(x_n)(x) \to 0$ при $n \to \infty$ на X.

Лема 2. Нехай X — сепарабельний топологічний простір і $\psi : X \to C_p(X)$ — відображення, для якого $\psi(x_n) \to 0$ в $C_p(X)$ для будь-якої послідовності різних точок x_n з X. Тоді існує така не більш ніж зліченна множина S в X, що $\psi(x) = 0$ на $X \setminus S$.

Доведення. Нехай $A = \{a_n : n \in \mathbf{N}\}$ — всюди щільна множина в просторі X. Розглянемо послідовність околів

$$V_n = \{f \in C_p(X) : \max_{1 \leq k \leq n} |f(a_k)| < \tfrac{1}{n}\}$$

нульової функції у просторі $C_p(X)$. Множини

$$S_n = \{x \in X : \psi(x) \notin V_n\}$$

скінченні для кожного n. Справді, якби якась множина S_m була нескінченною, то вона б містила деяку неаскінченну послідовність різних точок x_n і при цьому $\psi(x_n) \notin V_m$ для кожного n, що неможливо бо за умовою $\psi(x_n) \to 0$ в $C_p(X)$.

Покладемо $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Ясно, що S — не більш ніж зліченна множина в X. Нехай $x \in X \setminus S$. Тоді $\psi(x) \in V_n$ для кожного n, звідки негайно випливає, що $\psi(x)(a_k) = 0$ для кожного номера k. Але функція $\psi(x) : X \to \mathbf{R}$ неперервна, а множина A всюди щільна в X. Тому $\psi(x)(u) = 0$ для кожного u з X, тобто $\psi(x) = 0$.

Теорема 2. Нехай X — незліченний сепарабельний цілком регулярний топологічний простір, в якому кожна одноточкова множина є типу G_δ. Тоді не існує секвенціально неперервного в нулі відображення Q з $R(P)$.

Доведення. Зауважимо, що простір $L(X)$ є підпростором топологічного векторного простору $C_p(X)^{\mathbf{N}}$, отже, сам є топологічним векторним простором. Тому зсув в $L(X)$ — гомеоморфізм.

Припустимо, що існує секвенціально неперервне в нулі відображення $Q : B_1(X) \to L(X)$, таке, що $PQ = id_{B_1(X)}$. Для $f \in B_1(X)$ покладемо

$$Q_0(f) = Q(f) - Q(0).$$

Оператор $Q_0 : B_1(X) \to L(X)$ теж буде секвенціально неперервним в нулі і при цьому $Q_0(0) = 0$. Крім того,

$$\begin{gathered}(PQ_0)(f) = P(Q(f) - Q(0)) = \\ = (PQ)(f) - (PQ)(0) = f - 0 = f\end{gathered}$$

для кожного $f \in B_1(X)$, бо оператор P лінійний. Таким чином, і $Q_0 \in R(P)$. Тому, щоб не ускладнювати позначень, ми можемо вважати, що $Q(0) = 0$.

Розглянемо проекцію $\pi_n : L(X) \to C_p(X)$, яка співставляє послідовності $(f_m)_{m=1}^{\infty} \in L(X)$ її n-тий елемент f_n. Очевидно, відображення π_n неперервні. Нехай $\varphi(x) = \chi_{\{x\}}$ для кожного $x \in X$. За лемою 1 $\varphi(X) \subseteq B_1(X)$, отже, ми можемо розглянути композицію $\psi_n = Q_n \circ \varphi$, де $Q_n = \pi_n \circ Q$. Зауважимо, що відображення $Q_n : B_1(X) \to C_p(X)$ секвенціально неперервні в нулі і $Q_n(0) = 0$. При цьому для довільної послідовності різних точок x_k з X за лемою 1 будемо мати, що $\varphi(x_k) \to 0$ в $B_1(X)$, а значить, і $\psi_n(x_k) = Q_n(\varphi(x_k)) \to Q_n(0) = 0$ при $k \to \infty$ в $C_p(X)$ для кожного n. Тому за лемою 2 для кожного n існує така не більш ніж зліченна множина S_n в X , що $\psi_n(x) = 0$ на $X \setminus S_n$. Покладемо $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Ясно, що і S — не більш ніж зліченна множина. Оскільки простір X незліченний, то існує точка $a \in X \setminus S$. Для цієї точки $\psi_n(a) = 0$ для кожного n. Але це неможливо, бо $\psi_n(a) = Q(\varphi(a)) \to \varphi(a)$ поточково на X, а $\varphi(a)(a) = 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Функції з діагоналлю скінченного класу// Всеукр. наук. конф., присв. 70-річчю нар. проф. П.С.Казимірського (5 - 7 жовтня 1995 р.). Тези доповідей. Ч. I.— Львів, 1995.— С.82.

2. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Нестеренко В.В.* Про поточкові границі нарізно неперервних функцій// Матеріали міжнар. наук.-пр. конф. "Інтелектуальні системи прийняття рішень та інформаційні технології". (19 - 21 травня 2004 р.). Тези доповідей.— Чернівці, 2004.— С.78—79.

Стаття надійшла до редколегії 3.03.2006