УДК 517.51

©2006 р. Д.І. Кукульняк, В.К. Маслюченко

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

НАРІЗНО ІНТЕГРОВНІ ЗА РІМАНОМ ФУНКЦІЇ

Наведено приклади обмеженої нарізно нескінченно диференційовної функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не інтегровна за Ріманом на $[0,1]^2$, і обмеженої нарізно інтегровної за Ріманом функції $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не інтегровна за Лебеґом на $[0,1]^2$.

It is constructed examples of bounded separately infinitely differentiable function $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ which is not Riemann integrable on $[0,1]^2$ and bounded separately Riemann integrable function $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ which is not Lebesgue integrable on $[0,1]^2$.

1. Зв'язки між нарізною і сукупною неперервністю, починаючи з класичної праці Р. Бера [1], досить добре вивчені (див. [2] і вказану там літературу). Ці дослідження природно породжують питання про зв'язки між нарізною і сукупною диференційовністю або інтегровністю в тому чи іншому сенсі. В цій праці ми будемо вивчати нарізно інтегровні за Ріманом функції. Наскільки нам відомо результатів про такі функції не так вже й багато. По-перше, в [3, с. 148] наведено приклад обмеженої нарізно інтегровної за Ріманом функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не інтегровна за Ріманом на квадраті $[0,1]^2$, і інтегровної за Ріманом на квадраті $[0,1]^2$ функції $g\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не є нарізно інтегровною за Ріманом. По-друге, в [4] наведений приклад обмеженої нарізно неперервної функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не інтегровна за Ріманом на $[0,1]^2$. Подібна конструкція, незалежно від [4], була запропонована і в [5]. Оце і все, що нам на сьогодні відомо.

Втім, слід згадати, що з цією тематикою пов'язані і теореми про зв'язки між подвійними і повторними інтегралами, як для інтеграла Рімана [6, с. 132], так і для інтеграла Лебеґа (теореми Фубіні і Тонеллі [7, сс. 208, 213] і приклади до цих теорем [8, с. 365] і [9, с. 334]). Зокрема, Г. М. Фіхтенгольц [10] навів надзвичайно цікавий приклад неінтегровної за Лебеґом вимірної зліченнозначної функції $f\colon [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, для якої рівність

$$\int\limits_E dx \int\limits_F f(x,y)dy = \int\limits_F dy \int\limits_E f(x,y)dx$$

виконується для всіх вимірних частин $E \subseteq [a,b]$ і $F \subseteq [c,d]$.

Як показує приклад Я. М. Цейтліна [4], обмеженість і нарізна неперервність функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ не забезпечує її інтегровність за Ріманом. Але, можливо, сильніші умови типу нарізної диференційовності будуть гарантувати її інтегровність за Ріманом? Тут ми показуємо, що існує обмежена нарізно нескінченно диференційовна функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка не інтегровна за Ріманом на $[0,1]^2$. При цьому замість конструкції Цейтліна з [4] ми використовували конструкцію Кешнера з [11].

Зауважимо, що нарізно неперервна і обмежена функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ інтегровна за Лебеґом. Це негайно випливає з теореми Лебеґа про належність нарізно неперервної функції $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ до першого класу Бера [12]. Тому виникає природне питання: чи буде обмежена нарізно інтегровна за Ріманом функція інтегровною за Лебеґом на $[0,1]^2$? Як добре відомо, інтегровність за Лебеґом на множині скінченної міри обмеженої функції забезпечується її вимірністю. Отже, питання можна поставити і так: чи кожна обмежена нарізно інтегровна за Ріманом функція вимірна за Лебеґом? Тут ми з допомогою одного прикладу Серпінського [13] показуємо, що це не так. Втім, з однієї теореми А. Куці [14] легко випливає, що кожна функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка інтегровна за Ріманом відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної, все ж буде вимірною за Лебеґом.

Кожна інтегровна за Ріманом функція $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ інтегровна за Лебеґом і вимірна за Лебеґом. Проте вона не зобов'язана бути вимірною за Борелем. Справді, відома канторова множина C [9, с. 50] континуальна і має міру нуль. Система всіх підмножин множини C має потужність $2^{\mathfrak{c}}$, а система всіх борелівських підмножин множини C континуальна [15]. Оскільки $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$, то існує підмножина A множини C, яка не вимірна за Борелем. Тоді характеристична функція χ_A множини A не вимірна за Борелем і разом з тим інтегровна за Ріманом на $[0,1]$ за критерієм Лебеґа [6, с. 177], бо множина $D(\chi_A)$ точок розриву функції χ_A міститься в C, отже, має нульову міру Лебеґа. У зв'язку з цим виникає питання: чи буде вимірною за Борелем функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, яка інтегровна за Ріманом відносно першої змінної і неперервна відносно другої змінної? Ми наводимо приклад, який показує, що це не так.

2. Як звичайно, для відображення $f\colon X\times Y \to Z$ і точки $p = (x,y) \in X\times Y$ покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$. Якщо P — деяка властивість відображень, то символом $P(X,Y)$ позначається сукупність всіх відображень $f\colon X \to Y$, які мають властивість P. Для відображення $f\colon\ X \times Y \to Z$ і властивостей P і Q покладемо $X_Q(f) = \{x \in X : f^x \in Q(Y,Z)\}$, $Y_P(f) = \{y \in Y : f_y \in P(X,Z)\}$.

Ми будемо позначати літерами C, C^∞, R, L і B відповідно властивості неперервності, нескінченної диференційовності, інтегровності за Ріманом, вимірності за Лебеґом і вимірності за Борелем. У відповідності з цим, наприклад, $RR([0,1]^2,\mathbb{R})$ — це сукупність усіх нарізно інтегровних за Ріманом функцій $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Наш перший результат спирається на одну теорему Кешнера [11]: для довільної замкненої підмножини E квадрата $[0,1]^2$, проекції якої на обидві вісі ніде не щільні існує функція $f \in C^\infty C^\infty([0,1]^2,\mathbb{R})$, у якої множина $D(f)$ її точок розриву дорівнює E.

Теорема 1. *Існує обмежена функція*

$$f \in C^\infty C^\infty([0,1]^2,\mathbb{R}) \setminus R([0,1]^2,\mathbb{R}).$$

Доведення. Нехай $0 < \varepsilon < 1$ і $(r_n)_{n=1}^\infty$ — послідовність всіх раціональних чисел на $[0,1]$. Множина $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$, де $U_n = (r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$ відкрита в $\mathbb{R}$ і перетин $G \cap [0,1]$ — щільний на відрізку $[0,1]$. Тому множина $F = [0,1] \setminus G$ замкнена і ніде не щільна в $\mathbb{R}$ і в $[0,1]$. Позначимо через λ лінійну міру Лебеґа, а через μ – плоску міру Лебеґа. Оскільки $\lambda(G) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, то $\lambda(F) = \lambda([0,1]) - \lambda(G \cap [0,1]) \ge 1 - \lambda(G) \ge 1 - \varepsilon > 0$. Отже, F — це замкнена ніде не щільна множина відрізка $[0,1]$ ненульової міри.

Нехай $E = F^2$. Згідно з теоремою Кешнера існує $f \in C^\infty C^\infty([0,1]^2,\mathbb{R})$, така, що $D(f) = E$. Але $\mu(E) = \lambda(F)^2 > 0$. Тому за критерієм Лебеґа інтегровності за Ріманом [6, с. 117] $f \notin R([0,1]^2,\mathbb{R})$.

3. В. Серпінський [13] з допомогою аксіоми вибору навів приклад невимірної за Лебеґом множини S на площині $\mathbb{R}^2$, яка перетинається з кожною прямою не більше ніж у двох точках і для кожної множини A з $\mu(A) > 0$ перетин $A \cap S \neq \varnothing$. Зауважимо, що перетин $B = A \cap S$ множини S з довільною вимірною множиною A додатної міри є невимірною множиною. Справді, припустимо, що для деякої множини A з $\mu(A) > 0$ перетин $B = A \cap S$ вимірний. Знайдемо $\mu(B)$. Нехай $B^x = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in B\}$. Оскільки пряма $l_x = \{x\} \times \mathbb{R}$ перетинається з множиною S не більше ніж у двох точках і $\{x\} \times B^x = l_x \cap B \subseteq l_x \cap S$, то і множина B^x містить не більше двох точок, отже, $\lambda(B^x) = 0$ для кожного x. Тоді за теоремою Фубіні $\mu(B) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda(B^x)dx = 0$. В такому разі $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B) = \mu(A) > 0$. Оскільки S перетинається з будь-якою множиною додатної міри на площині, то $(A \setminus B) \cap S \neq \varnothing$.

Але $(A \setminus B) \cap S = A \cap S \setminus B = B \setminus B = \varnothing$, що приводить до суперечності.

Теорема 2. *Нехай S — множина Серпінського, $E = [0,1]^2 \cap S$ і $f = \chi_E\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ — характеристична функція множини E. Тоді $f \in RR([0,1]^2, \mathbb{R}) \setminus L([0,1]^2, \mathbb{R})$.*

Доведення. Згідно з зауваженням, зробленим перед формулюванням теореми 2, множина E не вимірна за Лебеґом. Тому і функція f не вимірна за Лебеґом, бо множина $f^{-1}(1) = E$ невимірна. Але f є нарізно інтегровною за Ріманом, бо її розрізи f^x і f_y — це характеристичні функції множини, яка містить не більше двох елементів, а отже, є інтегровними за Ріманом на $[0,1]$.

Зауважимо, що з одного результату А. Куці [14] випливає, що $LC([0,1]^2, \mathbb{R}) \subseteq L([0,1]^2, \mathbb{R})$. Оскільки кожна інтегровна за Ріманом функція на $[0,1]$ інтегровна за Лебеґом, а значить і вимірна за Лебеґом, то і $RC([0,1]^2, \mathbb{R}) \subseteq L([0,1]^2, \mathbb{R})$.

Проте має місце наступний результат.

Теорема 3. $RC([0,1]^2, \mathbb{R}) \nsubseteq B([0,1]^2, \mathbb{R})$.

Доведення. Нехай A — не вимірна за Борелем підмножина канторової множини C і

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, \ x \in [0,1]^2 \setminus A \text{ і } 0 \le y \le 1, \\ y, \ x \in A \text{ і } 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $f \in RC([0,1]^2, \mathbb{R})$. Але f не вимірна за Борелем, бо, наприклад, $f^{-1}(1) = A \times \{1\}$ не є вимірною за Борелем множиною в квадраті $[0,1]^2$. Справді, якби множина $A \times \{1\}$ була борелівською в $[0,1]^2$, то вона була б такою і на відрізку $[0,1] \times \{1\}$. Відображення $\varphi\colon [0,1] \times \{1\} \to [0,1]$, $\varphi(x,1) = x$, є гомеоморфізмом і при цьому $\varphi(A \times \{1\}) = A$. Отже, множина A була б борелівською і на $[0,1]$, що приводить до суперечності.

Зауважимо, що і функція $g = \chi_{A \times [0,1]}$ дає потрібний приклад, але для доведення невимірності g за Борелем потрібно використати один результат з книги К. Куратовського [15, с. 355], згідно з яким усі розрізи $E^x = \{y \in Y : (x,y) \in E\}$ і $E_y = \{x \in X : (x,y) \in E\}$ борелівської множини E в добутку $X \times Y$ є борелівськими множинами відповідно в просторах Y і X. Втім, цей факт легко доводиться з допомогою міркувань, які були пророблені вище.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Baire R.* Sur les function de variables reélles // An. Mat. Pura Appl., ser 3. — 1899. — **3**. — P. 1–123.

2. *Маслюченко В. К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. . . . докт. фіз.-мат. наук. Чернівці, 1999. — 345 с.

3. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. — М.:Наука, 1969. — 658 с.

4. *Цейтлин Я. М.* Приближение раздельно-непрерывных функций непрерывными // Мера и интеграл. — Куйбышев: Куйб. гос. ун-т., 1988. — С. 151–156.

5. *Кукульняк Д.* Зв'язки між нарізною та сукупною інтегровністю за Ріманом // Матеріали студ. наук. конф. присв. 170-річчю з дня нар. Юрія Федьковича (12 – 13 травня 2004 року). Фіз.-мат. науки. — Чернівці: Рута, 2004. — С. 51–52.

6. *Зорич В. А.* Математический анализ. Т. 2. — М.:Наука, 1984. — 640 с.

7. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.

8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.:Наука, 1989. — 624 с.

9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.:Наука, 1974. — 480 с.

10. *Fichtenholz G.* Sur une function de deux variables sans intégrale double // Fund. Math. — 1917. — **6**. — P. 30–36.

11. *Kershner R.* The continuity of functions of many variables // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — **53**. №1. — P. 83–100.

12. *Lebesgue H.* Sur l'approximation des function // Bull. Sci. Math. — 1898. — **22**. — P. 278–287.

13. *Sierpinski W.* Sur un probleme concernant les ensembles mesurable surficiellement // Fund. Math. — 1920. — **1**. — P. 112–115.

14. *Kucia A.* Scorza-Dragoni type theorems // Fund. Math. — 1991. — **138**. — P. 197–203.

15. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966. — 594 с.

Стаття надійшла до редколегії 3.03.2006