УДК 517.944

©2006 р. **І.М. Конет, М.П. Ленюк**

Кам'янець-Подільський державний університет, Кам'янець-Подільський
Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ІНВАРІАНТНИХ $\Lambda_{(\mu)}$-ПАРАБОЛІЧНИХ ОПЕРАТОРІВ НА РІМАНОВИХ МНОГОВИДАХ

На спеціальних ріманових многовидах для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічних інваріантних операторів запроваджено на основі нових побудованих інтегральних зображень міри Дірака інтегральні перетворення з невідокремленими змінними. Це дало можливість побудувати фундаментальні розв'язки задачі Коші для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічних рівнянь та систем рівнянь інваріантних відносно групи обертань навколо початку координат евклідового простору E_n.

In the special Riemann manifolds for the $\Lambda_{(\mu)}$-parabolic invariant operators there are introduced the integral transforms with nonseparate variables on the basis of new constructed integral presentations of the Dirac measure. These enable us to construct the fundamental solutions of the Cauchy problem for $\Lambda_{(\mu)}$-parabolic equations and systems of equations which are invariant relatively the group of rotations around the coordinate origin of the Euclid space E_n.

Дослідження задачі Коші й крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методом відображення в областях з негладкою межею приводить до побудови фундаментальних розв'язків задачі Коші на спеціальних ріманових многовидах. Основою побудови таких розв'язків є інтегральне зображення міри Дірака (дельта-функції Дірака).

1. Розглянемо узагальнений диференціальний оператор Лежандра [1]

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dy^2} + \operatorname{cth} y \frac{d}{dy} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} y} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} y}\Big),\ \mu_1 \ge \mu_2 \ge 0, (\mu) = (\mu_1, \mu_2).$$

Визначимо величини і функції:

$$\nu^{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2),\ \Omega_{(\mu)}(\beta) = \beta \frac{\operatorname{sh} 2\pi\beta}{2\pi^2} \times |\Gamma(\frac{1}{2} - \nu^+ + i\beta)|^2 |\Gamma(\frac{1}{2} - \nu^- + i\beta)|^2 2^{\mu_1 - \mu_2},$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функція Ейлера [2].

Обмеженим на множині $(0, \infty)$ розв'язком узагальненого диференціального рівняння Лежандра

$$(\Lambda_{(\mu)} + \beta^2) v(y) = 0$$

є узагальнена приєднана функція Лежандра першого роду $P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)$ [1].

В роботі [3] одержано інтегральне зображення міри Дірака, породженої оператором $\Lambda_{(\mu)}$,

$$\delta(y - y_0) = \int_0^\infty P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y) P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y_0) \times \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \operatorname{sh} y_0$$

як границю дельта-подібної послідовності

$$\lim_{t \to 0+} \delta_t(y - y_0) = \lim_{t \to 0+} \int_0^\infty e^{-\beta^2 t} P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y) \times P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y_0) \Omega_{(\mu)}(\beta) d\beta \operatorname{sh} y_0.$$

В евклідовому просторі E_{n+1} змінних $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ позначимо через E^+_{n+1} півпростір $\{(x, y) : -\infty < x_j < +\infty, j = \overline{1, n}; y \in (0, \infty)\}$, через $R_1^2 = R^2 + (y - y_0)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2 + (y - y_0)^2$ – квадрат віддалі між точками $(x, y) \in E^+_{n+1}$ та $(\xi, y_0) \in E^+_{n+1}$, а через $\omega_n = 2(\pi)^{n/2} [\Gamma(n/2)]^{-1}$ – величину площі одиничної сфери в простор E_n змінних $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Нехай $j_\nu(s)$

– нормована функція Бесселя першого роду [4]

$j_\nu(s) = 2^\nu\Gamma(\nu+1)s^{-\nu}J_\nu(s)$, $j_\nu(0)=1$, $j'_\nu(0)=0$.

В книзі [5] одержано інтегральне зображення міри Дірака в $E_n = \{(x_1,x_2,\dots,x_n): -\infty < x_j < +\infty,\ j=\overline{1,n}\}$:

$$\delta(x-\xi) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda. \quad (2)$$

Використовуючи тензорний добуток узагальнених функцій [6] маємо інтегральне зображення міри Дірака в E^+_{n+1}

$$\frac{\delta(x-\xi,y-y_0)}{\operatorname{sh} y_0} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \quad (3)$$

Тут прийнято позначення

$$\varphi_\mu(y,y_0,\beta) = P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y_0)\times$$

$$\times\Omega_{(\mu)}(\beta).$$

Математичним обгрунтуванням є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо при довільному $\varepsilon>0$ неперервна за сукупністю змінних функція $f(t,\lambda,\beta)$, рівномірно прямує до одиниці при $t\to+0$ і при $t>\varepsilon$ інтеграли*

$$\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda$$

рівномірно збігаються до звичайної функції $G(t,x,\xi,y,y_0)$, то в розумінні теорії узагальнених функцій

$$\lim_{t\to+0} G(t,x,\xi,y,y_0) = (\operatorname{sh} y_0)^{-1}\delta(x-\xi,y-y_0) \equiv$$

$$\equiv \delta_{(\xi,y_0)}. \quad (4)$$

Доведення. Нехай функція f інваріантна стосовно аргументу $s=(s_1,s_2,\dots,s_n)$ відносно обертань навколо початку координат, для якої існує перетворення Фур'є-Лежандра

$$\tilde f(x-\xi,y,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^\infty f(|s|,\beta)e^{-i(x-\xi,s)}\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)d\beta ds \quad (5)$$

і ρ – елемент ортогональної групи $O(n)$. Тоді

$$(x-\xi,s) = (\rho^{-1}(x-\xi),\rho^{-1}s).$$

Згідно з рівністю (5) маємо:

$$\tilde f(\rho(x-\xi),y,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^\infty f(|s|,\beta)\times$$

$$\times e^{-i(x-\xi,\rho^{-1}s)}\varphi_\mu(y,y_0,\beta)d\beta ds. \quad (6)$$

У результаті заміни змінних $s=\rho\sigma$ в інтегралах (6), враховуючи інваріантність функції щодо s, одержимо:

$$\tilde f(\rho(x-\xi),y,y_0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^\infty f(|\sigma|,\beta)\times$$

$$\times e^{-i(x-\xi,\sigma)}\varphi_\mu(y,y_0,\beta)d\beta d\sigma = \tilde f(x-\xi,y,y_0).$$

Звідси випливає, що функція $\tilde f$ інваріантна щодо $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ відносно групи $O(n)$, а, отже, $\tilde f$ є функцією двох змінних: евклідової віддалі $R=(\sum\limits_{i=1}^n(x_i-\xi_i)^2)^{1/2}$ і y, тобто

$$\tilde f(x-\xi,y,y_0) = \tilde f(R,y,y_0)$$

Якщо в (6) покласти $x_1-\xi_1=p$, $x_2=\xi_2$, $\dots$, $x_n=\xi_n$ і перейти до сферичної системи координат, то отримаємо:

$$\tilde f(p,y,y_0) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda p)\lambda^{n-1}d\beta\, d\lambda. \quad (7)$$

Отже, при $t>\varepsilon$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{E_n}\int\limits_0^\infty f(t,|s|,\beta)e^{-i(x-\xi,s)}\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)d\beta ds =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda p)\lambda^{n-1}d\beta\, d\lambda. \qquad (8)$$

При цьому з рівномірної збіжності інтегралів зліва випливає рівномірна збіжність інтегралів справа і навпаки.

Тепер формула (4) випливає з того факту, що перетворення Фур'є-Лежандра функції $(\operatorname{sh} y_0)^{-1}\delta(x-\xi, y-y_0) \equiv \delta_{(\varepsilon,y_0)}$ дорівнює $P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y_0)\exp[i(\xi,s)]$.

Якщо функція $g(x,y)$ неперервна в E^+_{n+1}, а функція $\sqrt{\operatorname{sh} y}g(x,y)$ абсолютно сумовна й має обмежену варіацію в E^+_{n+1}, то

$$g(x,y) = \int\limits_{E^+_{n+1}} g(\xi,\eta)\delta_{(\xi,\eta)}\operatorname{sh}\eta d\eta d\xi =$$

$$= \int\limits_{E^+_{n+1}} g(\xi,\eta)\Big(\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \varphi_\mu(y,\eta,\beta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta\, d\lambda\Big)\operatorname{sh}\eta d\eta d\xi =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\Big(\int\limits_{E^+_{n+1}} g(\xi,\eta)P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R(x,\xi))\operatorname{sh}\eta d\eta d\xi\Big)\times$$

$$\times P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\beta\, d\lambda. \qquad (9)$$

Інтегральне зображення (9) визначає пряме $H_{(\mu);n}$ і обернене $H^{-1}_{(\mu);n}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Лежандра

$$H_{(\mu);n}[g(x,y)] = \int\limits_{E^+_{n+1}} g(x,y)P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R(x,\xi))\operatorname{sh} y dy dx \equiv \tilde g(\lambda,\beta,\xi), \qquad (10)$$

$$H^{-1}_{(\mu);n}[\tilde g(\lambda,\beta,x)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde g(\lambda,\beta,x)\times$$

$$\times P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda \equiv g(x,y). \qquad (11)$$

2. Розглянемо випадок ріманового многовиду $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1} = R^{(m)}_2 \times E^+_{n-1}$, де $R^{(m)}_2$ – ріманова поверхня функції $\omega = \sqrt[m]{z}$ $(z = x_1 + ix_2$, $2 \le m < \infty)$, $R^{(\infty)}_2$ – ріманова поверхня функції

$$w = \ln z = \lim_{m\to\infty} m(\sqrt[m]{z} - 1),$$

E^+_{n-1} – евклідовий простір $\{(x_3, x_4, \ldots, x_n; y) : -\infty < x_j < +\infty, j = \overline{3,n}, 0 \le y \le \infty\}$. В $R^{(m)}_2$ будемо користуватися полярними координатами (r,φ): $0 \le r < \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi m$, причому $\varphi = \varphi(\mod 2\pi m)$. Тим самим положення будь-якої точки в $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ визначається $(n+1)$-ми унформізуючими параметрами $(r,\varphi,x_3,\ldots,x_n,y)$. Координати фіксованої точки (ξ,y_0) будуть позначатися $(\rho,\varphi_0,\xi_3,\ldots,\xi_n,y_0)$. Точку, яка лежить на k-м екземплярі $\overset{+}{R}{}^{(k)}_{n+1} = R^{(k)}_2 \times E^+_{n-1}$ ріманового многовиду $\overset{+}{R}\begin{smallmatrix}(m)\\ n+1\end{smallmatrix}$ позначимо через (x^k,y). Таким чином, $(x_k,y) \in \overset{+}{R}{}^{(k)}_{n+1}$, причому перший екземпляр ріманового многовиду $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ будемо ототожнювати з евклідовим півпростором E^+_{n+1} [7].

Означення 1. Будемо говорити, що на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ маємо інтегральне зображення $\tilde\delta$-функції (міри Дірака), яке відповідає (4), якщо

$$\sum_{k=1}^{m}\delta_{(\xi^{(k)},y_0)}\,(2 \le m < \infty),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta_{(\xi^{(k)},y_0)}\,(2 \le m = \infty) \qquad (12)$$

дає δ-функцію, зосереджену в точці $(\xi^{(1)},y_0) \equiv (\xi,y_0) \in E^+_{n+1}$.

Теорема 2. *Якщо функція $f(t,\lambda,\beta)$ задовольняє умови теореми 1, то на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ має місце інтегральне зображення* *міри Дірака*

$$\tilde{\delta}_{(\xi,y_0)}=\lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times\lambda^{n-1}[j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R)K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha]d\beta d\lambda.$$

Тут беруть участь функції:

$$R_1^2=r^2+\rho^2+2r\rho\,\mathrm{ch}\,\alpha+\sum_{k=3}^n(x_k-\xi_k)^2,$$

$$R^2=r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varphi_0)+\sum_{k=3}^n(x_k-\xi_k)^2;$$

$$J(\varphi-\varphi_0)=\left\{\begin{array}{ll}0, & |\varphi-\varphi_0|>\pi\\ 1, & |\varphi-\varphi_0|<\pi\end{array}\right.;$$

$$K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)=\frac{\sin\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{m}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-\cos\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{m}}+$$

$$+\frac{\sin\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{m}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-\cos\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{m}}. \qquad (14)$$

Доведення. Покажемо, що

$$\sum_{k=1}^m\tilde{\delta}_{(\xi^k,y_0)}=\delta_{(\xi,y_0)}.$$

Нехай точка $(\xi,y_0)\equiv(\xi_1,y_0)\in\overset{+}{R}{}^{(1)}_{n+1}=R_2^{(1)}\times E^+_{n-1}\equiv E^+_{n+1}$ і має координати $(\rho,\varphi_0,\xi_3,\ldots,\xi_n,y_0)$. Тоді точки $(\xi^k,y_0)\in R_2^{(k)}\times E^+_{n-1}$ $(k=\overline{1,m})$ і будуть мати координати $(\rho,2(k-1)\pi+\varphi_0,\xi_3,\ldots,\xi_n,y_0)$.

Згідно з формулою (13) маємо:

$$\sum_{k=1}^m\tilde{\delta}_{(\xi^k,y_0)}=\lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)[j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\times$$

$$\times\sum_{k=1}^m K_m(\varphi-[2(k-1)\pi+\varphi_0],\alpha)d\alpha]\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \qquad (15)$$

Розглянемо тотожність [2]

$$\mathrm{ch}\,\alpha-\cos(\varphi-\varphi_0)=2^{m-1}\prod_{k=1}^m\Big[\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-$$

$$-\cos\Big(\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]}{m}\Big)\Big]. \qquad (16)$$

У результаті логарифмічного диференціювання маємо:

$$\frac{\sin(\varphi-\varphi_0)}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos(\varphi-\varphi_0)}=$$

$$=\sum_{k=1}^m\frac{\sin\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]}{m}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-\cos\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]}{m}};$$

$$\sum_{k=1}^m K_m(\varphi-[2(k-1)\pi+\varphi_0])=$$

$$=\sum_{k=1}^m\Big\{\frac{\sin\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]+\pi}{m}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-\cos\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]+\pi}{m}}+$$

$$+\frac{-\sin\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]-\pi}{m}}{\mathrm{ch}\,\frac{\alpha}{m}-\cos\frac{\varphi-[\varphi_0+2(k-1)\pi]-\pi}{m}}\Big\}=$$

$$=\frac{\sin(\varphi-\varphi_0+\pi)}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos(\varphi-\varphi_0+\pi)}-$$

$$-\frac{\sin(\varphi-\varphi_0-\pi)}{\mathrm{ch}\,\alpha-\cos(\varphi-\varphi_0-\pi)}=$$

$$=\frac{-\sin(\varphi-\varphi_0)+\sin(\varphi-\varphi_0)}{\mathrm{ch}\,\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)}=0.$$

Отже, шукана сума

$$\sum_{k=1}^m\tilde{\delta}_{(\xi^k,y_0)}=\lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta=\delta_{(\xi,y_0)}.$$

Оскільки δ-подібній послідовності неперервних в E^+_{n+1} функцій

$$\delta^\varepsilon_{(\xi,y_0)}=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(\varepsilon,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta$$

на рімановому многовиді відповідає $\tilde{\delta}$-подібна послідовність неперервних функцій

$$\tilde{\delta}^{\varepsilon}_{(\xi,y_0)}=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(\varepsilon,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\lambda^{n-1}\{j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\}d\beta d\lambda,$$

то рівність (13) дає зображення міри Дірака на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$.

Щоб переконатися в неперервності функцій $\tilde{\delta}^{\varepsilon}_{(\xi,y_0)}$ достатньо показати, що ядро

$$\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)=j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha$$

є неперервною функцією.

Останнє стає очевидним, якщо одиничну функцію $J(\varphi-\varphi_0)$ зобразити у вигляді

$$J(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{m}\Big[1+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\Big]=$$

$$=\frac{1}{m}\Big[1+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\int\limits_0^\infty e^{-k\alpha/m}(\sin\frac{k}{m}[\pi+\varphi-\varphi_0]+$$

$$+\sin\frac{k}{m}[\pi-(\varphi-\varphi_0)])d\alpha\Big]=$$

$$=\frac{1}{m}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{k}(\sin\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{m}k+$$

$$+\sin\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{m}k). \qquad (17)$$

Інтегральне зображення

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)}=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\varphi_\mu(y,\eta,\beta)\times$$

$$\times\Phi_m(\lambda R(x,\xi),\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda$$

міри Дірака на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}$ породжує пряме $H^{(m)}_{(\mu);n}$ і обернене $H^{-(m)}_{(\mu);n}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопала:

$$H^{(m)}_{(\mu);n}[g(x,y)]=\int\limits_{\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1}}P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}y)\times$$

$$\times\Phi_m(\lambda R(x,\xi),\varphi-\varphi_0)g(x,y)\operatorname{sh}y\,dydx\equiv$$

$$\equiv\tilde{g}(\lambda,\beta,\xi), \qquad (18),$$

$$H^{-(m)}_{(\mu);n}[\tilde{g}(\lambda,\beta,x)]=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\tilde{g}(\lambda,\beta,x)\times$$

$$\times P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \qquad (19)$$

Теорема 3. *Якщо функція $f(t,\lambda,\beta)$ задовольняє умови теореми 1, то на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$ справджується інтегральне зображення міри Дірака:*

$$\tilde{\delta}_{(\xi,y_0)}=\lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\lambda^{n-1}\{j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)[\frac{\pi+(\varphi-\varphi_0)}{\alpha^2+(\pi+\varphi-\varphi_0)^2}+$$

$$+\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{\alpha^2+[\pi-(\varphi-\varphi_0)]^2}]d\alpha\}d\beta d\lambda. \qquad (20)$$

Доведення. Будемо вважати, що множина точок лежить на першому екземплярі ріманового многовиду $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$, якщо $|\varphi-\varphi_0|<\pi$, на k-му ($k>0$), якщо $(2k-1)\pi<\varphi-\varphi_0<(2k+1)\pi$, і на $(-k)$-му ($k>0$), якщо $-(2k+1)\pi<\varphi-\varphi_0<-(2k-1)\pi$. Покажемо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{\delta}_{(\xi^k,y_0)}=\delta_{(\xi,y_0)}.$$

Виходячи з тотожності [2]

$$\operatorname{ch}\beta-\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2}\cdot[(\varphi-\varphi_0)^2+\beta^2]\times$$

$$\times \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\varphi-\varphi_0-2k\pi)^2+\beta^2}{4k^2\pi^2},$$

шляхом логарифмічного диференціювання одержуємо

$$\frac{\sin(\varphi-\varphi_0)}{\operatorname{ch}\beta-\cos(\varphi-\varphi_0)} =$$

$$= 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi-\varphi_0-2k\pi}{\beta^2+(\varphi-\varphi_0-2k\pi)^2}.$$

Безпосередньо знаходимо, що

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} K_\infty(\varphi-\varphi_0-2k\pi,\alpha) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big[\frac{\pi+(\varphi-\varphi_0-2k\pi)}{\alpha^2+(\pi+\varphi-\varphi_0-2k\pi)^2}+$$

$$+\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0-2k\pi)}{\alpha^2+[\pi-(\varphi-\varphi_0-2k\pi)]^2}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(\varphi-\varphi_0+\pi)}{\operatorname{ch}\alpha-\cos(\varphi-\varphi_0+\pi)}+$$

$$+\frac{\sin[\pi-(\varphi-\varphi_0)]}{\operatorname{ch}\alpha-\cos[\pi-(\varphi-\varphi_0)]}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin(\varphi-\varphi_0)+\sin(\varphi-\varphi_0)}{\operatorname{ch}\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)} = 0.$$

Таким чином, маємо:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{\delta}_{(\xi^k,y_0)} = \lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\times$$

$$\times\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\lambda^{n-1}\{j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\times$$

$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty} K_\infty(\varphi-\varphi_0-2k\pi,\alpha)d\alpha\}d\beta d\lambda =$$

$$= \lim_{t\to+0}\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty f(t,\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\lambda^{n-1}\times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R)d\beta d\lambda \equiv \delta_{(\xi,y_0)}.$$

Те, що міра $\tilde{\delta}_{(\xi,y_0)}$ є мірою Дірака на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$ випливає з того факту, що δ-подібній послідовності неперервних в E^+_{n+1} функцій відповідає на рімановім многовиді $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$ $\tilde{\delta}$-подібна послідовність неперервних функцій

$$\tilde{\delta}^\varepsilon_{(\xi,y_0)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty f(\varepsilon,\lambda,\beta)\varphi_\mu(y,y_0,\beta)\times$$

$$\times\lambda^{n-1}\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)d\beta d\lambda,$$

оскільки ядро

$$\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0) = j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_\infty(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha =$$

$$= j_{(n-2)/2}(\lambda R)\frac{1}{\pi}\int_0^\infty K_\infty(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_\infty(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (j_{(n-2)/2}(\lambda R)-j_{(n-2)/2}(\lambda R_1))\times$$

$$\times K_\infty(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha \qquad (21)$$

є неперервною функцією. Більш того, зображення (21) функції $\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)$ показує, що вона неперервно-диференційовна потрібну кількість разів.

Інтегральне зображення

$$\tilde{\delta}_{(\xi,\eta)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \varphi_\mu(y,\eta,\beta)\times$$

$$\times\Phi_{(\infty)}(\lambda R(x,\xi),\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta,$$

міри Дірака на многовиді $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$ породжує пряме $H^{(\infty)}_{(\mu);n}$ і обернене $H^{-(\infty)}_{(\mu);n}$ інтегральне перетворення типу Бохнера-Шестопала:

$$H^{(\infty)}_{(\mu);n}[g(x,y)] = \int\limits_{\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}} P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}y)\times$$

$$\times\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)g(x,y)\operatorname{sh}y dy dx \equiv$$

$$\equiv \tilde{g}(\lambda,\beta,\xi), \qquad (22),$$

$$H^{-(\infty)}_{(\mu);n}[\tilde{g}(\lambda,\beta,x)] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \tilde{g}(\lambda,\beta,x)\times$$

$$\times P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch} y)\Omega_{(\mu)}(\beta)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda \equiv g(x,y). \qquad (23)$$

3. Застосуємо запроваджене формулами (10), (11) інтегральне перетворення для побудови фундаментальних розв'язків задачі Коші для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного рівняння, інваріантного за змінною $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ відносно групи обертань $O(n)$ навколо початку координат простору E_n:

$$A(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)},\frac{\partial}{\partial t})u =$$

$$= \sum_{k=0}^{l} A_k(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)})\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \qquad (24)$$

де $A_l = I$, $\Delta_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\partial^2/\partial x_k^2$, $A_k(z_1,z_2)$ – функції двох змінних, які зображаються всюди збіжними рядами в просторі C^2 комплексних змінних (z_1,z_2).

Означення 2. Диференціальний оператор $A(\Delta,\Lambda_{(\mu)},\partial/\partial t)$ називається $\Lambda_{(\mu)}$-параболічним, якщо при достатньо великих $(\alpha,\beta)\in E_2$ всі корені z_k характеристичного рівняння

$$F(z,-\lambda^2,-\beta^2) \equiv \sum_{k=0}^{l} A_k(-\lambda^2,-\beta^2)z^k = 0 \qquad (25)$$

мають від'ємні дійсні частини і задовольняють нерівності

$$|\operatorname{Re} z_k| > c(\lambda^2+\beta^2)^\alpha, c \geq c_0 > 0, \alpha \geq \alpha_0 > 0. \qquad (26)$$

Означення 3. Фундаментальним розв'язком задачі Коші для рівняння (24) назвемо узагальнену функцію $G(t,x,\xi,y,\eta)$, породжену нескінченно диференційовною всюди, крім точки $(0,\xi,\eta)$ функцією $G(t,x,\xi,y,\eta)$, яка при $t>0$ задовольняє рівняння (24), а при $t=0$ – початкові умови

$$\left.\frac{\partial^k G}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \begin{cases} 0, & k=\overline{0,l-2}, \\ \delta_{(\xi,\eta)}, & k=l-1. \end{cases} \qquad (27)$$

Теорема 4. *Обмежений при $y=0$ фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (24) визначається формулою*

$$G(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\times$$

$$\times\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda, \qquad (28)$$

де

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{e^{zt}dz}{F(z,-\lambda^2,-\beta^2)},$$

γ – контур Жордана в z-комплексній площині, що охоплює всі корені характеристичного рівняння (25).

Доведення. Застосуємо оператор $A(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)},\frac{\partial}{\partial t})$ під знаком інтегралів в рівності (28), що можна робити внаслідок відомих оцінок для розв'язуючої функції $v(t,-\lambda^2,-\beta^2)$ [5]. Внаслідок тотожностей

$$\Delta_n[j_{(n-2)/2}(\lambda R)] = -\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R),$$

$$\Lambda_{(\mu)}[\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)] = -\beta^2\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)$$

одержуємо

$$A(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)},\frac{\partial}{\partial t})G(t,x,\xi,y,\eta) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{l} A_k(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)})\frac{\partial^k}{\partial t^k}G(t,x,\xi,y,\eta) =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\sum_{k=0}^{l}\frac{\partial^k}{\partial t^k}\Big(\frac{1}{2\pi i}\times$$

$$\times\int\limits_\gamma \frac{e^{zt}dz}{F(z,-\lambda^2,-\beta^2)}A_k(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)})\Big)\times$$

$$\times[\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)]\lambda^{n-1}d\beta d\lambda =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \Big(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma e^{zt} dz \Big) \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta) \times$$

$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda \equiv 0,$$

оскільки $\int\limits_\gamma \exp(zt)dz \equiv 0$.

Отже, функція $G(t,x,\xi,y,\eta)$, визначена формулою (28), задовольняє при $t>0$ рівняння (24).

Виконання початкових умов (27) випливає з рівностей

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{z^k dz}{F(z,-\lambda^2,-\beta^2)} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, l-2}, \\ 1, & k = l-1 \end{cases} \tag{29}$$

і інтегрального зображення (4).

Приклад 1. Для рівняння теплопровідності з оператором Лежандра

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_n u + \Lambda_{(\mu)} u \tag{30}$$

функція

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = e^{-(\lambda^2+\beta^2)t}.$$

Фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (30) згідно формули (28) має вигляд:

$$G(t,R(x,\xi),y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-(\lambda^2+\beta^2)t} \times$$

$$\times \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta) j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-R^2/(4t)} \int\limits_0^\infty e^{-\beta^2 t} \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta) d\beta. \tag{31}$$

Приклад 2. Для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного за І.Г.Петровським рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(\Delta_n, \Lambda_{(\mu)}) u \tag{32}$$

фундаментальний розв'язок задачі Коші визначається формулою

$$G(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n} \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{A(-\lambda^2,-\beta^2)t} \times$$

$$\times \varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta) j_{(n-2)/2}(\lambda R) \lambda^{n-1} d\beta d\lambda. \tag{33}$$

Узагальнимо одержані результати на інваріантні щодо x відносно групи обертань $O(n)$ $\Lambda_{(\mu)}$-параболічні системи

$$A_l(\frac{\partial}{\partial t}, D_x, \Lambda_{(\mu)}) u \equiv \sum_{k=0}^{s} A_l^{(k)}(D_x, \Lambda_{(\mu)}) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \tag{34}$$

де $u = (u_1, u_2, \ldots, u_l)$, $A_l^{(k)} = \{A_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^l$, $A_l^{(s)} = E_l$ – одинична матриця розміру $l \times l$, $D_x = \{D_{x_1}, D_{x_2}, \ldots, D_{x_n}\}$, A_l – квадратна матриця розміру $l \times l$.

Означення 4. Система (34) називається інваріантною щодо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ відносно групи обертань навколо початку координат, якщо характеристичний поліном системи має вигляд

$$\det A_l(z,-i\lambda,-\beta^2) \equiv \sum_{k=0}^{sl} \Phi_k(-\lambda^2,-\beta^2) z^k \equiv$$

$$\equiv \Phi_1(z,-\lambda^2,-\beta^2),$$

де $\Phi_{sl} = 1$, $i\lambda = (i\lambda_1, i\lambda_2, \ldots, i\lambda_n)$, $\lambda^2 = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k^2$; $i^2 = -1$.

Лема 1. *Якщо система (34) інваріантна відносно групи обертань $O(n)$, то існує диференціальна матриця Θ, яка приводить систему до діагональної форми*

$$\Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big) E_l^l v = 0. \tag{35}$$

Доведення. Розглянемо матрицю $\Theta_l(z,-i\lambda,-\beta^2)$.

Покладемо $u = \Theta_l(z,-i\lambda,-\beta^2)v$ і знайдемо елементи матриці Θ_l із алгебраїчної системи

$$A_l(z,-i\lambda,-\beta^2)\Theta_l(z,-i\lambda,-\beta^2) =$$

$$= \Phi_1(z,-\lambda^2,-\beta^2) E_l. \tag{36}$$

Оскільки $\det A_l(z,-i\lambda,-\beta^2) \neq 0$, то система (36) має єдиний розв'язок, який можна знайти за правилами Крамера:

$$\Theta_l = \sum_{k=0}^{s(l-1)} \Theta_l^{(k)}(z,-i\lambda,-\beta^2) z^k, \quad \Theta_l^{s(l-1)} = E_{l-1}.$$

Отже, існує єдина диференціальна матриця

$$\Theta_l\Big(\frac{\partial}{\partial t}, D_x, \Lambda_{(\mu)}\Big) = \sum_{k=0}^{s(l-1)} \Theta_l^{(k)}(D_x, \Lambda_{(\mu)})\frac{\partial^k}{\partial t^k}$$

така, що заміна $u = \Theta_l v$ приводить систему (34) до діагональної форми

$$A_l u = A_l \Theta_l v = \Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big)E_l v. \qquad (37)$$

Теорема 5. *Якщо $G^0(t, x, \xi, y, \eta)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння*

$$\Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big)v = 0, \qquad (38)$$

то фундаментальний розв'язок задачі Коші для інваріантної системи (34) визначається за формулою

$$G(t, x, \xi, y, \eta) = \Theta_l G^0(t, R, y, \eta). \qquad (39)$$

Доведення. При $t > 0$ безпосередньо маємо:

$$A_l G = A_l \Theta_l G^0 = \Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t}, \Delta_n, \Lambda_{(\mu)}\Big)G^0 E_l \equiv 0.$$

Виконання початкових умов

$$\lim_{t\to+0}\frac{\partial^k G}{\partial t^k} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, s-2}, \\ \delta_{(\xi,\eta)}, & k = s-1 \end{cases}$$

випливає із тотожностей

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^k dz}{\Phi_1(z, -\lambda^2, -\beta^2)} = \begin{cases} 0, & k = \overline{0, sl-2}, \\ 1, & k = sl-1 \end{cases} \qquad (40)$$

та інтегрального зображення (4).

Приклад 3. Для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічної системи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1\Delta_n u_1, \qquad (41)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta_n u_1 + a_2\Lambda_{(\mu)}u_2,$$

де $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ – сталі, характеристичне рівняння має вигляд

$$\Phi_1(z, -\lambda^2, -\beta^2) \equiv (z + a_1\lambda^2)(z + a_2\beta^2) = 0, \qquad (42)$$

матриця

$$\Theta_2 = \begin{pmatrix} \partial/\partial t - a_2\Lambda_{(\mu)} & 0 \\ \Delta_n & \partial/\partial t - a_1\Delta_n \end{pmatrix} =$$

$$= E_2\frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} a_2\Lambda_{(\mu)} & 0 \\ -\Delta_n & a_1\Delta_n \end{pmatrix},$$

а фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t} - a_1\Delta_n\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t} - a_2\Lambda_{(\mu)}\Big)v = 0 \qquad (43)$$

визначається за формулою

$$G^0 = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-a_1\lambda^2 t} - e^{-a_2\beta^2 t}}{a_2\beta^2 - a_1\lambda^2}\times$$

$$\times\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \qquad (44)$$

Згідно формули (39) фундаментальна матриця розв'язку задачі Коші для системи (41)

$$G(t, x, \xi, y, \eta) = \Theta_2 G^0 =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathcal{H}(t, -\lambda^2, -\beta^2)\times$$

$$\times\varphi_{(\mu)}(y, \eta, \beta)j_{(n-2)/2}(\lambda R)\lambda^{n-1}d\beta d\lambda. \qquad (45)$$

Тут бере участь матриця

$$\mathcal{H}(t, -\lambda^2, -\beta^2) =$$

$$= \begin{pmatrix} d/dt + a_2\beta^2 & 0 \\ -\lambda^2 & d/dt + a_1\lambda^2 \end{pmatrix}\times$$

$$\times\frac{e^{-a_1\lambda^2 t} - e^{-a_2\beta^2 t}}{a_2\beta^2 - a_1\lambda^2}.$$

4. Застосуємо запроваджене формулами (18), (19) інтегральне перетворення для побудови фундаментального розв'язку задачі Коші для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$-параболічних операторів на ріманових многовидах

$$\overset{++}{R}{}^{(m)}_{n+2} = [0,\infty)\times\overset{+}{R}{}^{(m)}_{n+1} = [0,\infty)\times R_2^{(m)}\times E^+_{n-1},$$

де $m \in [2,\infty]$, E^{++}_{n+2} – евклідів півпростір точок $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y, t)$, координати яких задовольняють нерівності: $-\infty < x_j < \infty$, $j = \overline{1, n}$; $y > 0$, $t > 0$.

Означення 5. m-розгалуженим (нескінченно розгалуженим) фундаментальним розв'язком задачі Коші з гіперплощиною галуження $(0,0)\times E_n$ для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного оператора A називається такий фундаментальний розв'язок задачі Коші $G_m(t,x,\xi,y,\eta)$, який в $\overset{++}{R}{}^{(m)}_{n+2}$ визначений всюди, крім гіперплощини галуження, і задовольняє такі умови:

1) $G_m(t,x,\xi,y,\eta)$ має в $\overset{++}{R}{}^{(m)}_{n+2}$ одну характеристичну особливість в точці $(0,\xi,\eta)\in \overset{++}{R}{}^{(1)}_{n+2}\equiv E^{++}_{n+2}$;

2) $G_m(t,x,\xi,y,\eta)$ нескінченно диференційовна всюди, крім точки $(0,\xi,\eta)\in E^{++}_{n+2}$ і гіперплощини галуження;

3) $\sum\limits_{k=1}^{m} G_m(t,x,\xi^k,y,\eta)=G(t,x,\xi,y,\eta)$

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} G_{(\infty)}(t,x,\xi^k,y,\eta)=G(t,x,\xi,y,\eta)\Big),$$

де $(t,\xi^1,\eta)\equiv(t,\xi,\eta)$, а точки $(t,\xi^k,\eta)\in \overset{++}{R}{}^{(k)}_{n+2}$ лежать на тому ж місці, що й точка (t,ξ,η), але в екземплярі $\overset{+}{R}{}^{(k)}_{n+2}$; $G(t,x,\xi,y,\eta)$ – звичайний фундаментальний розв'язок задачі Коші.

Теорема 6. m-розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (24) визначається за формулою

$$G_m(t,x,\xi,y,\eta)=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\times$$
$$\times\varphi_\mu(y,\eta,\beta)\lambda^{n-1}\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)d\lambda d\beta, \quad (46)$$

де функція [7]

$$\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)=j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\equiv$$
$$\equiv\frac{1}{m}[j_{(n-2)/2}(\lambda R)+\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty(j_{(n-2)/2}(\lambda R)-$$
$$-j_{(n-2)/2}(\lambda R_1))K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha].$$

Доведення. Функція Φ_m диференційовна необхідну кількість разів.

Внаслідок тотожностей

$$\frac{\partial^2 K_m}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 K_m}{\partial\varphi^2}=0,$$
$$\Delta_n j_{(n-2)/2}(\lambda R)\equiv$$
$$\equiv\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big)\times$$
$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R)=-\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R),$$
$$\Delta_n j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)\equiv$$
$$\equiv\Big(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\Big)\times$$
$$\times j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)=-\lambda^2 j_{(n-2)/2}(\lambda R_1),$$

одержуємо співвідношення

$$\Delta_n\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)=-\lambda^2\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0). \quad (47)$$

Оскільки внаслідок узагальненого рівняння Лежандра [1]

$$\Lambda_{(\mu)}[\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)]=-\beta^2\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta), \quad (48)$$

то в результаті застосування оператора $H^{(m)}_{(\mu);n}$ за правилом (18) до рівняння (24) маємо звичайне диференціальне рівняння

$$\sum_{k=0}^{l}A_k(-\lambda^2,-\beta^2)\frac{d^k\tilde{u}}{dt^k}=0. \quad (49)$$

Безпосередньо перевіряється, що функція

$$\tilde{u}=v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\cdot P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\times$$
$$\times\Phi_m(\lambda R(x,\xi),\varphi-\varphi_0) \quad (50)$$

задовольняє рівняння (49) і початкові умови

$$\frac{d^k\tilde{u}}{dt^k}=\begin{cases}0, & k=\overline{0,l-2},\\ P^{(\mu)}_{-1/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\times\Phi_m(\lambda R(x,\xi_0),\varphi-\varphi_0), & k=l-1.\end{cases}$$

У результаті застосування до функції $\tilde{u}$, визначеної формулою (50), оператора $H^{-(m)}_{(\mu);n}$

за правилом (19) отримаємо фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (24):

$$H^{-(m)}_{(\mu);n}[\tilde{u}] = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\times$$
$$\times P^{(\mu)}_{-/2+i\beta}(\operatorname{ch}\eta)\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\times$$
$$\times P^{(\mu)}_{-a/2+i\beta}(\operatorname{ch}y)\Omega_{(\mu)}(\beta)d\beta\lambda^{n-1}d\lambda =$$
$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\times$$
$$\times\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\times$$
$$\times\lambda^{n-1}d\beta d\lambda \equiv G_m(t,x,\xi,y,\eta).$$

Виконання початкових умов

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\partial^k G_m}{\partial t^k} = \begin{cases} 0, & k=\overline{0,l-2},\\ \tilde{\delta}_{(\xi,\eta)}, & k=l-1\end{cases}$$

випливає із тотожностей (29) та інтегрального зображення (13).

Доведення рівності

$$\sum_{k=1}^m G_m(t,x,\xi^k,y,\eta) = G(t,x,\xi,y,\eta)$$

повторює логічну схему доведення такої ж рівності для дельта-функції.

Методом запровадженого формулами (22), (23) інтегрального перетворення за викладеною вище схемою будується нескінченно розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (24)

$$G_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty v(t,-\lambda^2,-\beta^2)\times$$
$$\times\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta. \tag{51}$$

Формули (46) і (51) показують, що для написання фундаментального розв'язку задачі Коші для інваріантного $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного рівняння треба знати розв'язуючу функцію

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{zt}dz}{F(z,-\lambda^2,-\beta^2)}.$$

Тут $F(z,-\lambda^2,-\beta^2)$ – характеристичний многочлен, γ – жорданів контур, що охоплює всі корені характеристичного рівняння

$$F(z,-\lambda^2,-\beta^2) = 0.$$

Для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_1^2\Delta_n u + a_2^2\Lambda_{(\mu)}u, \mu_1\ge\mu_2\ge 0, a_j^2\ge 0 \tag{52}$$

розв'язуюча функція

$$v(t,-\lambda^2,-\beta^2) = e^{-(a_1^2\lambda^2+a_2^2\beta^2)t}.$$

Згідно з формулами (46) та (51) маємо:

$$G_{(m)} = \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\Big(\int_0^\infty e^{-a_2^2\beta^2 t}\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)d\beta\Big)\times$$
$$\times e^{-a_1^2\lambda^2 t}\Phi_{(m)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda =$$
$$= \int_0^\infty e^{-a_2^2\beta^2 t}\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)d\beta\frac{1}{(4\pi a_1^2 t)^{n/2}}\times$$
$$\times e^{-R^2/(4a_1^2 t)}\Big[J(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty e^{-(2r\rho(\operatorname{ch}\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)))/(4a_1^2 t)}\times$$
$$\times K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\Big] \equiv$$
$$\equiv G(t,x,\xi,y,\eta)\Big[J(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi m}\int_0^\infty e^{-(2r\rho(\operatorname{ch}\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)))/(4a_1^2 t)}\times$$
$$\times K_m(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\Big].$$

$$G_{(\infty)} = G(t,x,\xi,y,\eta)\Big[J(\varphi-\varphi_0)-$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-(2r\rho(\operatorname{ch}\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)))/(4a_1^2 t)}\times$$
$$\times K_{(\infty)}(\varphi-\varphi_0,\alpha)d\alpha\Big] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\pi} G(t,x,\xi,y,\eta)\Big[\int_0^\infty (1-$$

$$-e^{-(2r\rho(\operatorname{ch}\alpha+\cos(\varphi-\varphi_0)))/(4a_1^2t)})\times$$

$$\times\Big(\frac{\pi+\varphi-\varphi_0}{\alpha^2+(\pi+\varphi-\varphi_0)^2}+$$

$$+\frac{\pi-(\varphi-\varphi_0)}{\alpha^2+(\pi-(\varphi-\varphi_0))^2}\Big)d\alpha\Big]. \qquad (54)$$

Тут $G(t,x,\xi,y,\eta)$ – звичайний фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (52).

Ми врахували те, що:

1) $\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0) = j_{(n-2)/2}(\lambda R)J(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)K_\infty(\alpha,\varphi-\varphi_0)d\alpha = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty (j_{(n-2)/2}(\lambda R_1)-j_{(n-2)/2}(\lambda R_1))K_\infty(\alpha,\varphi-\varphi_0)d\alpha$.

2) $\Delta_n\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0) = -\lambda^2\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)$. (55)

Наслідок 1. При $m=2$ маємо [7]:

$$G_2(t,x,\xi,y,\eta) = \frac{1}{2a_1\sqrt{\pi t}}G(t,x,\xi,y,\eta)\times$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{q} e^{-z^2/(4a_1^2t)}dz, \qquad (56)$$

$$q = 2\sqrt{r\rho}\cos\frac{\varphi-\varphi_0}{2}.$$

Підставивши в формули (46) та (51) функцію

$$v = \exp[A(-\lambda^2,-\beta^2)t]$$

одержимо структуру G_m і $G_{(\infty)}$ для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного за І.Г.Петровським рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(\Delta_n,\Lambda_{(\mu)})u.$$

Теорема 7. *m-розгалужена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для інваріантної системи (34) визначається за формулою*

$$G_m(t,x,\xi,y,\eta) = \Theta_l G_m^0(t,R,y,\eta), \qquad (57)$$

де G_m^0 – m-розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (38).

Доведення. Безпосередньо маємо, що

$$A_lG_m = A_l\Theta_lG_m^0 = E_l\Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t},\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\Big)G_m^0 =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}E_l\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \Phi_1\Big(\frac{\partial}{\partial t},\Delta_n,\Lambda_{(\mu)}\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{e^{zt}dz}{\Phi_1(z,-\lambda^2,-\beta^2)}\varphi_{(\mu)}(t,\eta,\beta)\lambda^{n-1}\times$$

$$\times\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)d\lambda d\beta\Big] =$$

$$= \frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma e^{zt}dz\Big)\times$$

$$\times\Phi_m(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta \equiv 0$$

внаслідок того, що $\int\limits_\gamma \exp(zt)dz \equiv 0.$

Отже, матриця G_m, визначена формулою (57), задовольняє систему (34).

Виконання умов

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\partial^k G_m}{\partial t^k} = \begin{cases} 0, & k=\overline{0,s-2}, \\ \tilde\delta_{(\xi,\eta)}E_l, & k=s-1 \end{cases}$$

випливає із тотожностей (40) та інтегрального зображення (13).

Доведення рівності

$$\sum_{k=1}^m G_m(t,x,\xi^k,y,\eta) = G(t,x,\xi,y,\eta),$$

де $G(t,x,\xi,y,\eta)$ звичайна фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для системи (34), визначена формулою (39), проводиться точно так, як й у випадку дельта-функції (теорема 2).

Теорема 8. *Якщо $G^0_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta)$ – нескінченно-розгалужений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (38), то нескінченно-розгалужена фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші* *для системи (34) визначається за формулою*

$$G_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta)=\Theta_l G^0_{(\infty)}(t,x,\xi,y,\eta). \quad (58)$$

Доведення. Те, що $G_{(\infty)}$ задовольняє систему (34), перевіряється безпосередньо.

Виконання умов

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\partial^k G_{(\infty)}}{\partial t^k}=\begin{cases} 0, & k=\overline{0,s-2},\\ \tilde{\delta}_{(\xi,\eta)}E_l, & k=s-1\end{cases}$$

випливає із тотожностей (40) та інтегрального зображення (20) міри Дірака на $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$.

Доведення рівності

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}G_{(\infty)}(t,x,\xi^k,y,\eta)=G(t,x,\xi,y,\eta)$$

таке саме, як у випадку доведення зображення міри Дірака на $\overset{+}{R}{}^{(\infty)}_{n+1}$.

Для $\Lambda_{(\mu)}$-параболічної системи (41)

$$G_{(m)}(t,x,\xi,y,\eta)=$$
$$=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathcal{H}(t,-\lambda^2,-\beta^2)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\times$$
$$\times\Phi_{(m)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta, \quad (59)$$
$$G_{(\infty)}((t,x,\xi,y,\eta))=$$
$$=\frac{\omega_n}{(2\pi)^n}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathcal{H}(t,-\lambda^2,-\beta^2)\varphi_{(\mu)}(y,\eta,\beta)\times$$
$$\times\Phi_{(\infty)}(\lambda R,\varphi-\varphi_0)\lambda^{n-1}d\lambda d\beta. \quad (60)$$

Аналогічні результати для інваріантних B-параболічних операторів знаходимо в роботах [4, 8, 9].

Знання фундаментального розв'язку задачі Коші дозволяє за відомою логічною схемою [5] побудувати розв'язок задачі Коші.

На закінчення зауважимо, що без залучення нових ідей результати роботи переносяться на інваріантні стосовно x відносно групи обертань навколо початку координат простору E_n $\Lambda_{(\mu)}$-параболічні оператори вигляду $A(t,\Delta_n,\Lambda_{(\mu)},\partial/\partial t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вирченко Н.А., Федотова И.А.* Обобщенные функции Лежандра и их применение. – Киев, 1998. – 158 с.

2. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.

3. *Конет І.М., Ленюк М.П.* Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. – Чернівці: Прут, 2002. – 248 с.

4. *Ленюк М.П.* Разветвленные фундаментальные решения задачи Коши для инвариантных B-параболических операторов // Математическая физика и нелинейная механика. – Киев: Наук. думка, 1984. – 2 (36). – С. 67 - 73.

5. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

6. *Шварц Л.* Математические методы для физических наук. – М.: Мир, 1965. – 412 с.

7. *Шестопал А.Ф.* Интегральные преобразования с неразделенными переменными. – Киев, 1973. – 46. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 73.6).

8. *Манжерон Д., Шестопал А.Ф., Ленюк М.П.* Исследования фундаментальных и разветвленных фундаментальных решений задачи Коши для инвариантных B-параболических операторов на римановых многообразиях на основе новых интегральных представлений распределения Дирака // Matematicki Vesnik. – Белград, 1983. – Книга 35. – Свеска 1.

9. *Манжерон Д., Шестопал А.Ф., Ленюк М.П.* Исследования фундаментальных матриц решений задачи Коши для инвариантных по $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ относительно вращений вокруг начала координат B-параболических систем // Matematicki Vesnik. – Белград, 1983. – Книга 35. – Свеска 3. – С. 273 – 281.

Стаття надійшла до редколегії 5.12.2005