УДК 517.956

©2006 р. Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t У ПРОСТОРАХ ТИПУ C ТА C'

Досліджуються еволюційні рівняння, які містять дробові похідні по часовій змінній, з оператором диференціювання нескінченного порядку.

The evolutionary equations with fractional derivatives on time variable and differentiation operator of the infinite order are investigated.

Рівняння з частинними похідними як скінченного, так і нескінченного порядків широко використовуються при математичному моделюванні різних реальних процесів, при розв'язуванні задач математичної фізики, квантової механіки, теорії теплопровідності та тепломасообміну, кристалографії, теорії ядерних ланцюгових реакцій, при вивченні процесу уповільнення нейтронів, у сучасній теорії сигналів, при вивченні багатьох процесів у хімічній та біологічній кінетиці тощо. За допомогою таких рівнянь описуються різні складні явища у сучасному природознавстві, економіці, техніці.

Дослідженням задачі Коші для таких рівнянь займались багато математиків, використовуючи при цьому різні методи і підходи (Ж. Адамар, І.Г. Петровський, С.Л. Соболєв, Л. Гордінг, Ж. Лере, А.М. Тихонов, М.С. Агранович, М.І. Вішик, С.Д. Ейдельман, І.М. Гельфанд, Г.Є. Шилов, С.Д. Івасишен, М.І. Матійчук, М.Л. Горбачук, Ю.А. Дубінський, Б.Й. Пташник та інші автори). В результаті одержані значні й важливі результати про розв'язність задачі Коші у різних функціональних просторах.

Задача Коші та крайові задачі для рівнянь з частинними похідними мають природну постановку й у різних просторах узагальнених функцій, оскільки часто крайові умови мають особливості в деяких точках або ділянках межі. Такі функції допускають регуляризацію у просторах узагальнених функцій скінченного порядку (типу розподілів Соболєва-Шварца), або їх можна трактувати як узагальнені функції нескінченного порядку (типу ультрарозподілів, гіперфункцій), якщо порядок особливостей вищий за степеневий.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часу) коефіцієнтами широко використовуються простори типу S, уведені І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим, та простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем. Простори типу S складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, поведінка яких та їхніх похідних на дійсній вісі характеризується величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k\varphi^{(n)}(x)|$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де подвійна послідовність $\{m_{kn}\}$ задовольняє певні умови (особливо повно досліджено випадок $m_{kn} = k^{k\alpha}n^{n\beta}$; $\alpha,\beta > 0$). Простори типу W є узагальненням просторів типу S внаслідок заміни степеневих функцій довільними опуклими, що дозволяє точніше охарактеризувати особливості зростання або спадання функцій на нескінченності.

У працях М.Л. Горбачука, П.І. Дудникова, О.І. Кашпіровського, С.Д. Івасишена, Л.М. Андросової, В.В. Городецького, В.П. Лавренчука, І.В. Житарюка, О.Г. Возняк, В.А. Літовченка встановлено, що простори типу S' — простори, топологічно спряжені до просторів типу S — є природними множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного порядку, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними функціями за просторовими змінними.

В.В. Городецьким, О.В. Мартинюк, О.М. Ленюком аналогічні результати у просторах типу W' встановлені для певних класів рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку (еволюційні рівняння, які містять оператор диференціювання нескінченного порядку, або оператор Бесселя нескінченного порядку, або оператор диференціювання — Бесселя нескінченного порядку). У працях [1,2] побудовані класи цілих функцій (простори типу C), які на дійсній вісі спадають швидше за $\exp\{-a|x|\}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Простори S_α, S^β, S_α^β, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, які відносяться до просторів типу S, та простори типу W утворюють певні підкласи просторів типу C. У цих працях розвивається теорія задачі Коші для одного класу рівнянь з частинними похідними з початковими умовами з просторів узагальнених функцій типу C'. Природно виникає запитання про одержання аналогічних результатів для еволюційних рівнянь вищого порядку по t з оператором диференціювання нескінченного порядку. У цій роботі дається відповідь на поставлене питання у випадку задачі Коші для вказаних рівнянь у просторах узагальнених функцій типу C' (аналітичних функціоналів).

1. Нагадаємо, що символом $D \equiv D(\mathbb{R})$ позначається множина всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Збіжність у D визначається так: послідовність $\{\varphi_k, k \geq 1\} \subset D$ називається збіжною в D до функції $\varphi \in D$, якщо:

а) існує $R > 0$ таке, що $\operatorname{supp} \varphi_k \subset (-R, R)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset (-R, R)$;

б) $\varphi_k^{(m)} \underset{k\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} \varphi^{(m)}$, $\forall m \in \mathbb{Z}_+$.

Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на D зі слабкою збіжністю позначається символом $D' \equiv D'(\mathbb{R})$. Елементи D' називаються узагальненими функціями. Сукупність узагальнених функцій з D', які обертаються в нуль на півосі $(-\infty, 0)$, позначається через D'_+. Відомо [3], що для довільних $\{f, g\} \subset D'_+$ у просторі D'_+ існує згортка $f * g$, яка визначається співвідношенням

$$< f * g, \eta >=$$

$$=< f(x) * g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) >, \varphi \in D,$$

де η_1, η_2 — довільні функції з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, рівні одиниці в околі півосі $[0, +\infty)$ і нулю для досить великих від'ємних значень аргументу. D'_+ утворює асоціативну і комутативну алгебру відносно операції згортки. Оскільки $\delta * f = f * \delta = f$, $\forall f \in D_+$, то одиницею в ній є δ-функція Дірака.

Якщо узагальнена функція $f = f_t$ залежить від параметра t, $f_t \in D'_+$ при кожному t, існує $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$, $g \in D'_+$, то тоді [3]

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}(f_t * g) = \frac{\partial^m f_t}{\partial t^m} * g, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Нехай узагальнена функція $f_\alpha \in D'_+$ залежить від параметра $\alpha \in (-\infty, \infty)$ і визначається формулою

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-1}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+m}^{(m)}(t), & \alpha \leq 0, \end{cases}$$

де m — найменше серед натуральних чисел таке, що $m + \alpha > 0$; θ — функція Хевісайда, тобто

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Правильними є наступні твердження [3]:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R} : f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha*\beta}$.

2) Нехай $I(\alpha)f = f * f_\alpha$, $\forall f \in D'_+$. Тоді

а) $\forall f \in D'_+ : I(0)f = f$;

б) $\forall f \in D'_+ \forall n \in \mathbb{N} : I(-n)f = f^{(n)}$;

в) $\forall f \in D'_+ \forall n \in \mathbb{N} : (I(n)f)^{(n)} = f$;

г) $\forall f \in D'_+ \forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R} : I(\alpha)I(\beta)f = I(\alpha+\beta)f$.

Завдяки властивостям б) і в) оператори $I(\alpha)$ при $\alpha < 0$ називають операторами дробового диференціювання, а при $\alpha > 0$ — операторами дробового інтегрування в D'_+.

2. Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{m_n}}{n} = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall\, \alpha > 0\, \exists\, c_\alpha > 0\, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+ :\ m_n \geq c_\alpha \alpha^n$;

3) $\exists\, M > 0\, \exists\, h > 0\, \forall\, n \in \mathbb{Z}_+ :\ m_{n+1} \leq Mh^n m_n$

і покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_n \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція ρ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно зростає на $[1, +\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty, -1]$, $\rho(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Крім того, $\exists\, c_0 > 0\, \exists\, c > 0\, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] : \rho(x) \geq c_0 \exp\{c|x|\}$.

За функцією ρ будуємо послідовність

$$\rho_n := \inf_{x \neq 0} \frac{\rho(x)}{|x|^n} = \inf_{|x| \geq 1} \frac{\rho(x)}{|x|^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

яка має властивості:

1) вона є монотонно спадною;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;

3) послідовність $\left\{\dfrac{\rho_{n-1}}{\rho_n}, n \geq 1\right\}$ обмежена зверху.

Нехай $\{l_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — зростаюча послідовність додатних чисел, яка має властивості 1)—3). Покладемо

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція γ — невід'ємна, неперервна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно зростає на $(-\infty, -1]$, $\gamma(x) \leq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Крім того,

$$\exists\, c_0' > 0\, \exists\, c' > 0\, \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] :$$

$$\gamma(x) \leq c_0' e^{-c'|x|}.$$

Символом C_γ^ρ позначимо сукупність всіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, a, b, c > 0\, \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by).$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $l_n = n^{n\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, то $\rho(x) \sim \exp\{|x|^{1/(1-\beta)}\}$, $\gamma(x) \sim \exp\{-|x|^{1/\alpha}\}$. Звідси випливає, що C_γ^ρ збігається з простором S_α^β, введеним І.М. Гельфандом і Г.Є. Шиловим у книзі [4]. Якщо ж покласти $l_k = \nu_k^k \exp\{-M(\nu_k)\}$, $\rho_n = \gamma_n^{-n} \exp\{\Omega(\gamma_n)\}$, де γ_n — розв'язок рівняння $x\Omega'(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ν_k — розв'язок рівняння $xM'(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, за умови, що M, Ω — диференційовні, невід'ємні, парні на $\mathbb{R}$, зростаючі й опуклі на $[0, +\infty)$ функції, то простір C_γ^ρ збігається з простором W_M^Ω, введеним у [5]: $(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow (\exists\, c, a, b > 0\, \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq ce^{-M(ax)+\Omega(by)})$.

У просторі C_γ^ρ визначені та є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргумента. Для функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ еквівалентними є наступні твердження [1]:

А) $\exists\, a, b, c > 0\, \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by)$;

Б) $\exists\, a_1, b_1, c_1 > 0\, \forall\, \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+\, \forall\, x \in \mathbb{R} : |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_1 a_1^k b_1^n l_k n! \rho_n$.

Символом $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ позначимо сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору C_γ^ρ.

3. Нехай $\gamma_1(\sigma)$ — функція, двоїста за Юнгом до функції $\ln \rho(\sigma + 1)$, $\sigma \in [0, \infty)$; $\rho_1(\tau)$ — функція, двоїста за Юнгом до функції — $ln\gamma(\tau + 1)$, $\tau \in [0, +\infty)$,

$$\gamma^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| < 1, \\ \exp\{-\gamma_1(\sigma)\}, & |\sigma| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho^*(\tau) = \begin{cases} 1, & |\tau| < 1, \\ \exp\{\rho_1(\tau)\}, & |\tau| \geq 1, \end{cases}$$

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі C_γ^ρ задано диференціальний оператор нескінченного порядку $f(D) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n D^n$, $D = \dfrac{d}{dz}$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ ряд $\psi(z) \equiv (f(D)\varphi)(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n((-iD)^n \varphi)(z)$ зображає деяку основну функцію з простору C_γ^ρ. У [2] доведено, що якщо ціла функція $f(z)$ є мультиплікатором у просторі $C_{\gamma^*}^{\rho^*}$, то у просторі C_γ^ρ визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку $f(D)$. Нехай A_f — звуження оператора $f(D)$ на $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Тоді для довільної функції $\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ правильною є рівність $(A_f)(\varphi)(x) = F^{-1}[f(\xi)F[\varphi](\xi)], \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}$; тут $F : C_\gamma^\rho(\mathbb{R}) \to C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$ — пряме перетворення Фур'є, $F^{-1} : C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}) \to C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ — обернене перетворення Фур'є.

Розглянемо тепер рівняння

$$D_t^\beta u(t,x) + (-1)^{-[\beta]+1} D_t^{\{\beta\}} A_f^{-[\beta]} u(t,x) = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)|_{t=0} = g, \quad g \in (C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))'. \tag{2}$$

Тут $\beta \in [-3,0)$, $[\cdot]$ — ціла, $\{\cdot\}$ — дробова частини числа, D_t^β — оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t у просторі D'_+, $(C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))'$ — простір, топологічно спряжений до $C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$.

Під розв'язком задачі Коші (1), (2) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови: 1) $u(\cdot,x) \in D'_+ \cap C^{-[\beta]}(0,\infty)$ при кожному x; 2) $u(t,\cdot) \in D(A_f^{-[\beta]})$ задовольняє рівняння (1) та початкову умову (2) у тому сенсі, що $D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot) \to g$ при $t \to +0$ у просторі $(C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))'$; якщо $\beta \in [-3;-1)$, то припускаємо, що u задовольняє також наступну умову: 3) для довільного фіксованого проміжку $[\delta,+\infty) \subset (0,+\infty)$ існує стала $c=c(\delta)>0$ така, що $\sup\limits_{t\in[\delta,+\infty)} \|D_t^{\{\beta\}}u(t,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le c.$

Правильним є наступне твердження.

Теорема. *Задача Коші (1), (2) коректно розв'язна у класі узагальнених функцій $(C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))'$. Розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому t належить до простору $C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R})$ і подається у вигляді $u(t,x) = \theta(t)z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t)$, де $z(t,x) = (f*G)(t,x)$ ($G = F^{-1}[\exp(tf(\xi))]$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші (1), (2)).*

Доведення теореми використовує півгрупову властивість операторів D_t^β : $D_t^\beta = D_t^{[\beta]+\{\beta\}} = D_t^{[\beta]D_t^{\{\beta\}}}$. Якщо ввести позначення $D_t^{\{\beta\}}u(t,x) = z(t,x)$, то рівняння (1) набуває вигляду

$$\frac{\partial^p z(t,x)}{\partial t^p} + (-1)^{p+1} A_f^p z(t,x) = 0 \tag{3}$$

(тут $p := -[\beta]$, $D_t^{[\beta]} = D_t^{-p} = \dfrac{d^p}{dt^p}$), для якого розглядається початкова умова

$$z(t,\cdot)|_{t=0} = g, \quad g \in (C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))', \tag{4}$$

причому функція z задовольняє початкову умову при $t \to +0$ у слабкому розумінні (у просторі $(C_{\gamma^*}^{\rho^*}(\mathbb{R}))'$). Задача Коші (3), (4) вивчається аналогічно тому, як це було зроблено в [2] у випадку еволюційного рівняння з оператором диференціювання нескінченного порядку, при цьому використовується співвідношення $A_f^p z = F^{-1}[f^p(\xi)F[z](\xi)]$.

Зауваження. Якщо β набуває відповідно значень $-1,-2,-3$, тоді маємо рівняння

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + A_f u = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - A_f^2 u = 0, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + A_f^3 u = 0, \end{array}\right\} \tag{5}$$

при цьому $f_{-\{\beta\}} = f_0 = \theta' = \delta$, тобто $\theta(t)z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t) = \theta(t)z(t,x) * \delta(t) = \theta(t)z(t,x)$. Отже, при $t>0$ розв'язки рівнянь (5) зображаються формулою $u(t,x) = z(t,x) = (f*G)(t,x)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.30—37.
2. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Оператори диференціювання нескінченного порядку у просторах типу С та їх застосування // Доп. НАН України.— 2004.— № .10— С.14—19.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.— 512 с.
4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.
5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

Стаття надійшла до редколегії 7.02.2006