УДК 517.956.4

©2006 р. **Г.П. Івасюк**

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ПОТЕНЦІАЛІВ МОДЕЛЬНОГО $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДОВІЛЬНОГО ПОРЯДКУ

Одержані оцінки півнорм у просторах Гельдера швидко зростаючих функцій об'ємного потенціалу та інтеграла Пуассона, породжених фундаментальним розв'язком модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку за всіма змінними.

The estimations of seminorms in Hölder spaces of fast growing functions of a volume potential and of a Poisson integral generated by the fundemental solution of a model $\overrightarrow{2b}$-parabolic equation of arbitrary order with respect to all variables are obtained.

У праці [1] були означені системи рівнянь із частинними похідними, які узагальнюють системи, параболічні за Солонниковим [2] і за Ейдельманом [3 – 5]. Такі системи названі параболічними системами Солонникова неоднорідної (квазіоднорідної) структури. Для таких систем у модельному випадку була побудована фундаментальна матриця розв'язків, описані її основні властивості і наведені формули для розв'язків початкової задачі. При дослідженні розв'язків початкової задачі для таких систем (у загальному випадку) потрібні відомості про потенціали одного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку за всіма змінними. В літературі (див. [3 – 5]) можна знайти такі відомості для випадку $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння першого порядку за часовою змінною. У данній статті виводяться необхідні оцінки півнорм об'ємного потенціалу та інтеграла Пуассона. При цьому використовуються півнорми в просторах Гельдера функцій, які можуть відповідним чином зростати на нескінченності.

1. Позначення та допоміжні факти. Нехай n, r, $b_1, \ldots, b_n$ – задані натуральні числа; b – найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; $m_0 \equiv 2b$, $m_j \equiv b/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $M \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$; $\alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ – n-вимірний мультиіндекс ($\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$), $\overline{\alpha} \equiv (\alpha_0, \alpha)$ – $(n+1)$-вимірний мультиіндекс ($\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$); $\|\alpha\| \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, $\|\overline{\alpha}\| \equiv \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$; T – задане додатне число; $\Pi_H \equiv \{(t,x) \,|\, t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, $H \subset \mathbb{R}$; $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \equiv \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^{\alpha}$, $\partial_x^{\alpha} \equiv \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$; $p(x;y) \equiv \left(\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{2/m_j}\right)^{1/2}$ – $\overrightarrow{2b}$-параболічна відстань між точками x і y із $\mathbb{R}^n$; $\Delta_x^{\xi} f(\cdot, x) \equiv f(\cdot, x) - f(\cdot, \xi)$, $\Delta_t^{\tau} f(t, \cdot) \equiv f(t, \cdot) - f(\tau, \cdot)$; $E_c(t,x) \equiv \exp\Big\{-c\sum\limits_{j=1}^{n} t^{1-q_j}|x_j|^{q_j}\Big\}$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $c > 0$;

$$L(\partial_t, \partial_x) \equiv a_0\partial_t^r + \sum_{\substack{\|\overline{\alpha}\|=2br \\ (\alpha_0<r)}} a_{\overline{\alpha}}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}, a_0 \neq 0, \ -$$

$\overrightarrow{2b}$-параболічний диференціальний вираз, тобто λ-корені рівняння $L(\lambda, i\sigma) = 0$ задовольняють умову

$$\exists \delta > 0 \ \forall \sigma \in \mathbb{R}^n \ \forall j \in \{1, \ldots, r\} :$$

$$\mathrm{Re}\lambda_j \le -\delta \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{2b_k}.$$

Розглянемо рівняння

$$L(\partial_t, \partial_x)u(t,x) = f(t,x), \ \ (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

і його фундаментальний розв'язок, тобто таку функцію $\Gamma(t,x)$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, що розв'язок цього рівняння для будь-якої досить гладкої і фінітної функції f визначається об'ємним потенціалом

$$u_f(t,x)\equiv\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$(t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (2)$$

Так само, як у [3 – 6] для параболічних за Петровським рівнянь довільного і $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь першого порядку за змінною t, встановлюються такі властивості функції Γ:

1) правильні оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)|\le C_{\overline{\alpha}}t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}E_c(t,x),$$
$$t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}, \qquad (3)$$

де $C_{\overline{\alpha}}$ і c – додатні сталі;

2) справджуються рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Gamma(t,x)dx=\frac{t^{r-1}}{a_0(r-1)!},\quad t>0, \qquad (4)$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t^{r-1}\Gamma(t,x)dx=\frac{1}{a_0},\quad t>0; \qquad (5)$$

3) для підхожої функції f похідні від інтеграла (2) знаходяться за формулами

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u_f(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t-\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$\|\overline{\alpha}\|<2br, \qquad (6)$$

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u_f(t,x)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t-\tau,x-\xi)\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)d\xi,$$
$$2b(r-1)<\|\overline{\alpha}\|\le 2br,\alpha\ne 0, \qquad (7)$$

$$\partial_t^r u_f(t,x)=f(t,x)+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_t^r\Gamma(t-\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\Delta_\xi^x f(\tau,\xi)d\xi,\quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}. \qquad (8)$$

Зауважимо, що з (3) випливають оцінки

$$|\Delta_x^y\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)|\le C_{\overline{\alpha}}(p(x;y))^{\lambda_0}\times$$
$$\times t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|+\lambda_0)/(2b)}E_{c'}(t,x),\ (p(x;y))^{2b}\le t, \qquad (9)$$

$$|\Delta_t^{t'}\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}\Gamma(t,x)|\le C_{\overline{\alpha}}(t'-t)^{\lambda_0}\times$$
$$\times t^{r-\lambda_0-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}E_{c'}(t,x),\ t'-t\le t, \qquad (10)$$

де $0<t<t'\le T$, $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $\overline{\alpha}\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$, λ_0 і c' – будь-які фіксовані числа відповідно з проміжків $(0,1]$ і $(0,c)$, c – стала із (3).

Легко переконатися у правильності нерівності

$$(p(x;y))^\lambda E_c(t,x-y)\le Ct^{\lambda/(2b)}E_{c'}(t,x-y) \qquad (11)$$

та рівності

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}t^{1-M/(2b)}E_c(t,x-\xi)d\xi=C_0, \qquad (12)$$

в яких $t>0$, $\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$, $c'\in(0,c)$.

2. Означення півнорм. Нехай c_0, a_1, ..., a_n – задані числа такі, що $0<c_0<c'<c$, де c і c' – сталі з оцінок (3), (9) і (10), $a_j\ge 0$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $T<\min\limits_j(c_0/a_j)^{2b_j-1}$; $\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a})\equiv(k_1(t,a_1),\dots,k_n(t,a_n))$, де $\overrightarrow{a}\equiv(a_1,\dots,a_n)$, $k_j(t,a_j)\equiv c_0a_j(c_0^{2b_j-1}-a_j^{2b_j-1}t)^{1-q_j}$, $j\in\{1,\dots,n\}$; $\Psi(t,x)\equiv\exp\Big\{\sum\limits_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\Big\}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$.

Відзначимо [5, с. 97], що $k_j(0,a_j)=a_j$, тобто $\overrightarrow{k}(0,\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$, і справджується нерівність

$$E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)\le\Psi(t,x),$$
$$0\le\tau<t\le T,\quad\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \qquad (13)$$

Нехай l – ціле невід'ємне число і $\lambda\in(0,1)$. Для функцій, визначених у $\Pi_{[0,T]}$, використовуватимемо півнорму

$$\ll u\gg_{l+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\equiv<u>_{l+\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}+<u>_{(l+\lambda)/(2b),t}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

де

$$<u>_{l+\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}\equiv\sum_{\|\overline{\alpha}\|=l}<\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u>_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t} \equiv \sum_{0\le l-\|\overline{\alpha}\|<2b} <\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} \equiv \sup_{\substack{\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\, x\ne y,\\ t\in[0,T]}} (|\Delta^y_x u(t,x)|\times$$

$$\times (p(x;y))^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(t,y))^{-1}),$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,t} \equiv \sup_{\substack{\{t,t'\}\subset[0,T],\, t\ne t',\\ x\in\mathbb{R}^n}} (|\Delta^{t'}_t u(t,x)|\times$$

$$\times |t-t'|^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(t',x))^{-1}),$$

а для заданих в $\mathbb{R}^n$ функцій – півнорму

$$[v]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} \equiv \sum_{\|\alpha\|=l} <\partial^{\alpha}_x v>^{\overrightarrow{a}}_{\lambda,x},$$

де

$$<v>^{\overrightarrow{a}}_{\lambda,x} \equiv \sup_{\substack{\{x,y\}\subset\mathbb{R}^n,\\ x\ne y}} (|\Delta^y_x v(x)|\times$$

$$\times (p(x;y))^{-\lambda}(\Psi(0,x)+\Psi(0,y))^{-1}).$$

3. Оцінки об'ємного потенціалу. Наведемо оцінки півнорм об'ємного потенціалу (2) в припущенні достатньої гладкості функції f.

Теорема 1. *Для будь-яких фіксованих $l \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in (0,1)$ правильні оцінки*

$$\ll u_f \gg^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+2br+\lambda} \le C \ll f \gg^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda}. \qquad (14)$$

Доведення. Врахувавши те, що функція u_f є розв'язком рівняння (1), доведення (14) зводиться до доведення оцінок

$$<\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} \le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x}, \qquad (15)$$

$\|\overline{\alpha}\| = 2br$, $\alpha_0 \le r-1$;

$$<\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(2br-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t} \le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda}, \qquad (16)$$

$\alpha_0 \le r-1$, $0 \le 2br - \|\overline{\alpha}\| < 2b$.

Оскільки на підставі (3), (7) і (11) – (13) для $2b(r-1) < \|\overline{\alpha}\| \le 2br$ справджуються нерівності

$$|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f(t,x)| \le$$

$$\le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}\times$$

$$\times (p(x;\xi))^{\lambda}(E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)+\Psi(\tau,x))\times$$

$$\times E_{c-c_0}(t-\tau,x-\xi)d\xi \le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} \Psi(t,x)\times$$

$$\times \int_0^t (t-\tau)^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{1-M/(2b)}\times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau,x-\xi)d\xi = C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} \times$$

$$\times \Psi(t,x) t^{r-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)}, \qquad (17)$$

в яких $c_1 \in (0, c-c_0)$, то для доведення оцінок (14) і (15) досить оцінити прирости $\Delta^y_x \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f$ і $\Delta^{t'}_t \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f$ відповідно у випадках $\eta < t$ і $\eta' < t$, де $\eta \equiv (p(x;y))^{2b}$, $\eta' \equiv t'-t > 0$.

Використовуючи формули (4) і (7), для $\|\overline{\alpha}\| = 2br$, $\alpha_0 < r$ і $\eta < t$ запишемо

$$\Delta^y_x \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u_f(t,x) = \int_0^{t-\eta} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^y_x \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} \Gamma(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times \Delta^x_\xi f(\tau,\xi)d\xi + \int_{t-\eta}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}\Gamma(t-\tau,x-\xi)\times$$

$$\times \Delta^x_\xi f(\tau,\xi)d\xi - \int_{t-\eta}^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,y}\Gamma(t-\tau,y-\xi)\times$$

$$\times \Delta^y_\xi f(\tau,\xi)d\xi \equiv I_1 + I_2 - I_3. \qquad (18)$$

За допомогою (9) і (11) – (13) маємо

$$|I_1| \le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} (p(x;y))^{\lambda_0}\times$$

$$\times \int_0^{t-\eta} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-(M+\lambda_0)/(2b)}(p(x;\xi))^{\lambda}\times$$

$$\times E_{c'}(t-\tau,x-\xi)(\Psi(\tau,\xi)+\Psi(\tau,x))d\xi \le$$

$$\le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} (p(x;y))^{\lambda_0}\times$$

$$\times \int_0^{t-\eta} (t-\tau)^{-1-\lambda_0/(2b)} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{1-M/(2b)}\times$$

$$\times (E_{c_0}(t-\tau,x-\xi)\Psi(\tau,\xi)+\Psi(t,x))(p(x;\xi))^{\lambda}\times$$

$$\times E_{c'-c_0}(t-\tau,x-\xi)d\xi \le$$

$$\le C <f>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x} (p(x;y))^{\lambda_0}\Psi(t,x)\times$$

$$\times \int_0^{t-\eta} (t-\tau)^{-1-(\lambda_0-\lambda)/(2b)} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{1-M/(2b)} \times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau, x-\xi) d\xi = C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \times$$

$$\times (p(x;y))^{\lambda_0} \Psi(t,x)(\eta^{-(\lambda_0-\lambda)/(2b)} - t^{-(\lambda_0-\lambda)/(2b)}) \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (p(x;y))^{\lambda} \Psi(t,x), \qquad (19)$$

де $\lambda_0 \in (\lambda, 1]$, $c_1 \in (0, c' - c_0)$.

Використовуючи (3) замість (9), аналогічно одержуємо

$$|I_2| \le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \int_{t-\eta}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-M/(2b)} \times$$

$$\times (p(x;\xi))^{\lambda} (\Psi(\tau,\xi) + \Psi(\tau,x)) E_c(t-\tau, x-\xi) d\xi \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \int_{t-\eta}^{t} (t-\tau)^{-1+\lambda/(2b)} d\tau \times$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{1-M/(2b)} (E_{c_0}(t-\tau, x-\xi)\Psi(\tau,\xi) +$$

$$+ \Psi(t,x)) E_{c'-c_0}(t-\tau, x-\xi)) d\xi \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \Psi(t,x) \int_{t-\eta}^{t} (t-\tau)^{-1+\lambda/(2b)} d\tau =$$

$$= C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \Psi(t,x) \eta^{\lambda/(2b)} =$$

$$= C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (p(x;y))^{\lambda}. \qquad (20)$$

Оскільки I_3 оцінюється так само, як I_2, то з (17) – (20) і відповідної оцінки I_3 випливає потрібна оцінка (15). Справді, за допомогою (17) для $\|\overline{\alpha}\| = 2br$ одержуємо

$$|\Delta_x^y \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u_f(t,x)| \le |\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u_f(t,x)| + |\partial_{t,y}^{\overline{\alpha}} u_f(t,y)| \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (\Psi(t,x) + \Psi(t,y))(p(x;y))^{\lambda},$$

$$(p(x;y))^{2b} \ge t, \quad t \in [0,T], \qquad (21)$$

а оцінки I_1 – I_3 дають оцінку

$$|\Delta_x^y \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u_f(t,x)| \le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \Psi(t,x)(p(x;y))^{\lambda},$$

$$(p(x;y))^{2b} < t, \quad t \in [0,T]. \qquad (22)$$

З нерівностей (21) і (22) та означення півнорми безпосередньо випливає оцінка (15).

Доведемо оцінку (16). За допомогою (4) і (7) для $2b(r-1) < \|\overline{\alpha}\| \le 2br$ і $\eta' < t$ запишемо зображення

$$\Delta_t^{t'} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} u_f(t,x) = \int_0^{t-\eta'} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_t^{t'} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \Delta_\xi^x f(\tau,\xi) d\xi + \int_{t-\eta'}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \Delta_\xi^x f(\tau,\xi) d\xi - \int_{t-\eta'}^{t'} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{t',x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t'-\tau, x-\xi) \times$$

$$\times \Delta_\xi^x f(\tau,\xi) d\xi \equiv J_1 + J_2 - J_3.$$

Інтеграли J_1 – J_3 оцінюються за допомогою (3) і (10) – (13) з $\lambda_0 = 1$ таким чином:

$$|J_1| \le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (t-t')\Psi(t,x) \times$$

$$\times \int_0^{t-\eta'} (t-\tau)^{r-2-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{1-M/(2b)} \times$$

$$\times E_{c_1}(t-\tau, x-\xi) d\xi \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \Psi(t,x)(t'-t)^{r-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)},$$

$$|J_2| + |J_3| \le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (\Psi(t,x) \times$$

$$\times \int_{t-\eta'}^{t} (t-\tau)^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)} d\tau +$$

$$+ \Psi(t',x) \int_{t-\eta'}^{t'} (t'-\tau)^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)} d\tau) \le$$

$$\le C < f >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} (\Psi(t,x) + \Psi(t',x)) \times$$

$$\times (t'-t)^{r-(\|\overline{\alpha}\|-\lambda)/(2b)}, \quad 0 \le t < t' < 2t, \ x \in \mathbb{R}^n.$$

Звідси і з нерівностей (17), як і вище, випливає оцінка (16).

4. Оцінки інтеграла Пуассона. Розглянемо інтеграл Пуассона

$$v_\varphi(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \qquad (23)$$

Якщо припускати, що функція φ досить гладка і не дуже швидко зростає на нескінченності, то за допомогою (3) – (5) легко встановити співвідношення

$$\lim_{t\to 0} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} v_\varphi(t,x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a_0}\varphi(x), & \text{якщо } \alpha_0=r-1,\ \alpha=0; \\ 0, & \text{якщо } \|\overline{\alpha}\|<2b(r-1) \text{ або } \|\overline{\alpha}\|=2b(r-1),\ \alpha\neq 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Теорема 2. *Для будь-яких фіксованих* $l \in \mathbb{Z}_+$ *і* $\lambda \in (0,1)$ *правильні оцінки*

$$\ll v_\varphi \gg_{l+2b(r-1)+\lambda}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \leq C[\varphi]_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}}. \qquad (25)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що

$$< v_\varphi >_{l+2b(r-1)+\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \equiv \sum_{\|\overline{\alpha}\|=l+2b(r-1)} < \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} v_\varphi >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} \leq$$

$$\leq C[\varphi]_{l+\lambda}^{\overrightarrow{a}}. \qquad (26)$$

Якщо $2b(r-1)+l \geq 2br$, то скористаємося тим, що $L(\partial_t,\partial_x)v_\varphi = 0$. Це дозволяє обмежитись оцінкою лише тих доданків з (26), для яких $\alpha_0 \leq r-1$. Але тоді $\|\alpha\| \geq l$ і $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} v_\varphi = \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^{\alpha-\beta} v_{\partial_x^\beta \varphi}$, де $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\{\alpha,\beta\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $\alpha_0 \in \mathbb{Z}_+$, $\beta < \alpha$, $\|\beta\| = l$.

Отже, доведення нерівності (26) для довільного $l \geq 0$ зводиться до доведення такої ж нерівності при $l = 0$.

Для $t > 0$ і $\|\overline{\alpha}\| = 2b(r-1)$ за допомогою (4) маємо

$$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} v_\varphi(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t,x-\xi)\Delta_\xi^x \varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{a_0}\delta_{\alpha_0(r-1)}\varphi(x) = w^{(\overline{\alpha})}(t,x) + \frac{1}{a_0}\delta_{\alpha_0(r-1)}\varphi(x),$$

де

$$w^{(\overline{\alpha})}(t,x) \equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\tau^{\alpha_0+1}\partial_x^\alpha \Gamma(\tau,x-\xi)\Delta_\xi^x\varphi(\xi)d\xi,$$

$\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера. Тут використано те, що згідно з (24)

$$\lim_{\tau\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_{\tau,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(\tau,x-\xi)\Delta_\xi^x \varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{a_0}\delta_{\alpha_0(r-1)}\Delta_\xi^x\varphi(\xi)\Big|_{\xi=x} = 0.$$

Розглянемо різницю

$$\Delta_x^y \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} v_\varphi(t,x) = \Delta_x^y w^{(\overline{\alpha})}(t,x) +$$

$$+\frac{1}{a_0}\delta_{\alpha_0(r-1)}\Delta_x^y\varphi(x). \qquad (27)$$

Оцінимо $\Delta_x^y w^{(\overline{\alpha})}(t,x)$. Для цього, як і в теоремі 1, розглянемо два випадки:

1) $\eta \geq t$, 2) $\eta < t$, де η – те саме, що й в п.3.

У випадку 1) так само, як і при доведенні нерівності (17), одержуємо

$$|w^{(\overline{\alpha})}(t,x)| \leq C < \varphi >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{a}} \Psi(0,x)t^{\lambda/(2b)},$$

звідки

$$|\Delta_x^y w^{(\overline{\alpha})}(t,x)| \leq C < \varphi >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{a}} (\Psi(0,x)+$$

$$+\Psi(0,y))(p(x;y))^\lambda, \quad (p(x;y))^{2b} \geq t. \qquad (28)$$

У випадку 2) записуємо зображення

$$\Delta_x^y w^{(\overline{\alpha})}(t,x) = \int\limits_\eta^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Delta_x^y \partial_\tau^{\alpha_0+1}\partial_x^\alpha\Gamma(\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\Delta_\xi^x\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^\eta d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\tau^{\alpha_0+1}\partial_x^\alpha\Gamma(\tau,x-\xi)\times$$

$$\times\Delta_\xi^x\varphi(\xi)d\xi - \int\limits_0^\eta d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\tau^{\alpha_0+1}\partial_x^\alpha\Gamma(\tau,y-\xi)\times$$

$$\times\Delta_\xi^y\varphi(\xi)d\xi$$

та оцінюємо його доданки аналогічно інтегралам I_1 – I_3 при доведенні теореми 1. У результаті одержимо оцінку

$$|\Delta_x^y w^{(\overline{\alpha})}(t,x)| \leq C < \varphi >_{\lambda,x}^{\overrightarrow{a}} (\Psi(0,x)+$$

$$+\Psi(0,y))(p(x;y))^\lambda, \quad (p(x;y))^{2b} < t. \qquad (29)$$

З (27) – (29) випливає оцінка (26) для $l = 0$ і, отже, для довільного $l \geq 0$.

Тепер доведемо оцінку

$$< v_\varphi >^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+2b(r-1)+\lambda)/(2b),t} \leq \ C[\varphi]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}. \qquad (30)$$

Нехай $\overline{\alpha}$ таке, що $0 \leq l+2b(r-1)-\|\overline{\alpha}\| < 2b$ або $l+2b(r-2) < \|\overline{\alpha}\| \leq l+2b(r-1)$. Можна вважати, що $\alpha_0 \leq r-1$ і $0 < t < t' \leq T$, тоді

$$\Delta_t^{t'} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} v_\varphi(t,x) = \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_\tau^{\alpha_0+1} \partial_x^\alpha \Gamma(\tau, x-\xi) \times$$
$$\times \varphi(\xi) d\xi.$$

Якщо $\alpha_0 < r-1$, то $\|\alpha\| > l+2b(r-2-\alpha_0) \geq l$ і можна в останньому інтегралі інтегруванням частинами перевести похідні вигляду ∂_x^β, $\|\beta\| = l$, з Γ на φ. Якщо ж $\alpha_0 = r-1$, то тоді можна, користуючись рівнянням $L(\partial_t, \partial_x)\Gamma = 0$, виразити $\partial_\tau^{\alpha_0+1}\Gamma = \partial_\tau^r \Gamma$ через лінійну комбінацію похідних $\partial^{\overline{\beta}}_{\tau,x}\Gamma$ з $\|\overline{\beta}\| = 2br$, $\|\beta\| > 2b$ і після цього провести таке ж інтегрування частинами в кожному члені. В усякому випадку $\Delta_t^{t'} \partial^{\overline{\alpha}}_{\tau,x} v_{\varphi(t,x)}$ виразиться у вигляді лінійної комбінації інтегралів

$$\int\limits_{t'}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{\overline{\gamma}}_{\tau,x} \Gamma(\tau, x-\xi) \partial_\xi^\beta \varphi(\xi) d\xi =$$

$$= \int\limits_{t'}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial^{\overline{\gamma}}_{\tau,x} \Gamma(\tau, x-\xi) \Delta_\xi^x \partial_\xi^\beta \varphi(\xi) d\xi,$$

де $\|\overline{\gamma}\| = \|\overline{\alpha}\| + 2b - l > 2b(r-1)$, $\gamma \neq 0$, $\|\beta\| = l$. Тому за допомогою (3) і (11) – (13) аналогічно попередньому одержимо

$$|\Delta_t^{t'} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} v_\varphi(t,x)| \leq C[\varphi]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} \Psi(t',x) K^{(\overline{\alpha})}(t',t), \qquad (31)$$

де $K^{(\overline{\alpha})}(t',t) \equiv \int\limits_{t}^{t'} \tau^{r-2-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)} d\tau.$

Оскільки

$$K^{(\overline{\alpha})}(t',t) \leq C_0(t'-t)^{(l+2b(r-1)-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)}, \qquad (32)$$

то

$$|\Delta_t^{t'} \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} v_\varphi(t,x)| \leq C[\varphi]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda} (\Psi(t',x) + \Psi(t,x)) \times$$
$$\times (t'-t)^{(l+2b(r-1)-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)},$$

звідки випливає оцінка (30), а з урахуванням (26) і потрібна оцінка (25). Залишилось довести (32). Якщо $t > t'/2$, то

$$K^{(\overline{\alpha})}(t',t) \leq t^{r-2-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)}(t'-t) \leq$$
$$\leq (t'/2)^{r-2-(\|\overline{\alpha}\|-l-\alpha)/(2b)}(t'-t) \leq$$
$$\leq C_0(t'-t)^{(l+2b(r-1)-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)},$$

бо $t' > t'-t$. У випадку, коли $t \leq t'/2$, маємо

$$K^{(\overline{\alpha})}(t',t) = C_0((t')^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)} -$$
$$- t^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)}) \leq C_0(t')^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)} \leq$$
$$\leq C_0(2(t'-t))^{r-1-(\|\overline{\alpha}\|-l-\lambda)/(2b)} =$$
$$= C_0(t'-t)^{(l+2b(r-1)-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b)},$$

оскільки $t'-t \geq t'-t'/2 = t'/2$ і, отже, $t' \leq 2(t'-t)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Івасюк Г.П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 49 – 52.

2. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР. – 1965. – **83**. – С. 3 – 163.

3. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР.— 1960.— **133**, № 1.— С.40—43.

4. *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. семинара по функц. анализу. – К.: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.

5. *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhâuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

6. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

Стаття надійшла до редколегії 13.02.2006