УДК 517.53

©2006 р. В.В. Городецький, Н.М. Гома

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ОПЕРАТОРИ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА У ПРОСТОРАХ ТИПУ W

Знайдено умови коректної визначеності та неперервності операторів узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W.

The conditions of correct definiteness and continuity of Gelfond-Leontjev generalized differentiation operators on the spaces of type W.

У теорії аналітичних у крузі функцій досліджуються лінійні неперервні відображення у вигляді диференціальних або інтегральних операторів скінченного або нескінченного порядків, операторів узагальненого диференціювання або інтегрування, операторів Помм'є та обернених до них операторів. Важливий клас операторів узагальненого диференціювання та інтегрування утворюють оператори Гельфонда-Леонтьєва, які позначаються символами $D^n(F,\cdot)$, $I^n(F,\cdot)$, $n\in\mathbb{N}$. Якщо $F(z)=e^z$, $n=1$, то $D^1(e^z,\cdot)$ збігається із звичайним оператором диференціювання, а $I^1(e^z,\cdot)$ — із оператором інтегрування.

При дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними зі сталими (або залежними лише від часу) коефіцієнтами використовуються простори типу S, введені І.М. Гельфандом і Г.Є. Шиловим [1], та простори типу W, введені Б.Л. Гуревичем [2]. Простори типу S складаються з нескінченно диференційовних на дійсній осі функцій, поведінка яких та їхніх похідних на $\mathbb{R}$ характеризується величинами $c_{km}=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|x^k\varphi^{(m)}(x)|$, $\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+$, де подвійна послідовність $\{c_{km}\}$ задовольняє певні умови (особливо повно досліджено випадок $c_{km}=k^{k\alpha}m^{m\beta}$; $\alpha,\beta>0$). Простори типу W є узагальненням просторів типу S внаслідок заміни степеневих функцій довільними опуклими, що дозволяє точніше охарактеризувати особливості зростання або спадання функцій на нескінченності. У цій роботі досліджуються властивості операторів Гельфонда-Леонтьєва (а також операторів Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку) у просторах типу W з метою застосування одержаних результатів у теорії задачі Коші для еволюційних рівнянь з такими операторами. Це, в свою чергу, дозволить узагальнити відомі вже результати для рівнянь з частинними похідними скінченного порядку.

1. Простори типу W. Розглянемо функцію $\omega:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, яка є неперервною й зростаючою, причому $\omega(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega(x)=+\infty$. Для $x\geq 0$ покладемо $\Omega(x)=\int\limits_0^x\omega(\xi)d\xi$. Функція Ω володіє такими властивостями:

1) Ω є диференційовною, зростаючою на $[0,+\infty)$ функцією, причому $\Omega(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Omega(x)=+\infty$;

2) Ω — опукла функція, тобто

а) $\forall\{x_1,x_2\}\subset[0,+\infty):\ \Omega(x_1)+\Omega(x_2)\leq\Omega(x_1+x_2)$;

б) $\forall x\in[0,+\infty)\ \forall n\in\mathbb{N}:\ n\Omega(x)\leq\Omega(nx)$.

Довизначимо функцію Ω на $(-\infty,0]$ парним чином. Оскільки похідна функції Ω (функція ω) при $x\to+\infty$ необмежено зростає, то сама функція Ω при $|x|\to\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. Поруч розглянемо функцію $\mu:[0,+\infty)\to$

$[0,+\infty)$ і покладемо $M(x) = \int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi$, $M(-x) = M(x)$. Функція M за своїми властивостями аналогічна функції Ω. За допомогою функцій M та Ω Б.Л. Гуревич ввів серію просторів, названих ним просторами типу W [2]. Означимо деякі з них.

Символом W_M^Ω позначимо сукупність цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists\, c > 0\ \exists\, a > 0\ \exists\, b > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \le c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}. \qquad (1)$$

W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, де $W_{M,a}^{\Omega,b}$ складається з тих функцій $\varphi \in W_M^\Omega$, для яких правильні нерівності

$$|\varphi(x+iy)| \le c \exp\{-M(\bar{a}x) + \Omega(\bar{b}y)\},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\bar{a}$ — довільна додатна стала, менша за a, $\bar{b}$ — довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi \in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{z\in\mathbb{C}} [|\varphi(z)| \exp\{-\Omega((b+\rho)y) +$$

$$+ M(a(1-\delta)x)\}], \quad \{\delta, \rho\} \subset \{1/n, n \ge 2\},$$

то з цими нормами $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

Збіжність у просторі W_M^Ω як в об'єднанні зліченно нормованих просторів визначається так [2]: послідовність $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається в W_M^Ω до нуля тоді й тільки тоді, коли вона: 1) правильно збігається до нуля; 2) обмежена. Послідовність $\{\varphi_n, n \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ правильно збігається до нуля в W_M^Ω, якщо вона рівномірно збігається до нуля на кожній обмеженій множині $Q \subset \mathbb{C}$. Множина $A \subset W_M^\Omega$ називається обмеженою, якщо $A \subset W_{M,a}^{\Omega,b}$ з деякими $a > 0, b > 0$ і для всіх функцій $\varphi \in A$ виконуються оцінки

$$|\varphi(z)| \le c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$$

із одними й тими ж сталими $a, b, c > 0$.

Зазначимо, що якщо $M(x) = x^{1/\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $x \in [0,+\infty)$, $\Omega(y) = y^{1/(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, $y \in [0,+\infty)$ і $\alpha + \beta \ge 1$, то $W_M^\Omega = S_\alpha^\beta$ (про простори типу S див. у книзі [1]).

Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору W_M^Ω, позначимо символом $W_M^\Omega(\mathbb{R})$.

У праці [3] встановлено, що означення (1) простору W_M^Ω рівносильне такому:

$$(\varphi \in W_M^\Omega) \Leftrightarrow (\exists\, c_1 > 0\ \exists\, a_1 > 0\ \exists\, b_1 > 0$$

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, \nu_k \in [0,k),\ \nu_0 = 0,$$

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, \rho_n \in [0,n), \rho_0 = 0, \forall\, x \in \mathbb{R} :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_1 n! \left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\nu_k}{a_1}\right)^k \times$$

$$\times \exp\{\Omega(\rho_n) - M(\nu_k)\}, \qquad (2)$$

де ρ_n — розв'язок рівняння $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ν_k — розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (тут вважається, що $\left(\frac{b_1}{\rho_0}\right)^0 = 1$, $\left(\frac{\nu_0}{a_1}\right)^0 = 1$).

Урахувавши (2), в просторі W_M^Ω можна ввести поняття збіжності (еквівалентне введеному раніше) так: послідовність $\{\varphi_\nu, \nu \ge 1\} \subset W_M^\Omega$ збігається до нуля в W_M^Ω, якщо при довільному $n \in \mathbb{Z}_+$ послідовність $\{\varphi_\nu^{(n)}, \nu \ge 1\}$ збігається до нуля рівномірно при $\nu \to +\infty$ на будь-якому скінченному проміжку в $\mathbb{R}$; при довільних фіксованих $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$ для функцій $x^k \varphi_\nu^{(n)}$ правильними є нерівності типу (2) зі сталими $c_1, a_1, b_1 > 0$, не залежними від ν.

У просторі W_M^Ω визначені й є неперервними операції диференціювання, зсуву аргументу, множення на незалежну змінну. Мультиплікатором у просторі W_M^Ω є кожна ціла функція $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}.$$

За певних умов у просторі W_M^Ω визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку [4].

Важливим є питання про нетривіальність просторів W_M^Ω. Нехай $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ — розв'язки відповідно рівнянь $x\omega(x) = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$; $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, що $\rho_n < n$, $\rho_0 = 0$; $\nu_k < k$, $\nu_0 = 0$; при цьому послідовності $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{\nu_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно зростаючими й необмеженими. В [5] доведено, що умова $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \dfrac{\nu_k}{\rho_k} > 0$ є необхідною й достатньою умовою нетривіальності простору W_M^Ω. Якщо ця умова виконується, то

$$\exists\, d > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq k_0 : \frac{\nu_k}{\rho_k} \geq d.$$

Оскільки $\dfrac{\nu_k}{\rho_k} = \dfrac{k\nu_k}{\rho_k k} = \dfrac{\omega(\rho_k)}{\mu(\nu_k)}$, то $\omega(\rho_k) \geq d\mu(\nu_k)$. Остання нерівність еквівалентна тому, що

$$\exists\, c_0 > 0\ \exists\, x_0 \in (0, \infty)\ \forall\, x \geq x_0 :$$

$$\Omega(x) \geq c_0 M(dx).$$

Припустимо, що функції Ω та M пов'язані співвідношенням $\Omega(x) = M(dx)$, $x \geq 0$. Символом $W_{M,a}^{M,ad}$ позначимо сукупність тих функцій φ з простору W_M^Ω, які задовольняють умову

$$\exists\, a > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(x + iy)| \leq ce^{-M(ax)+M(ady)},$$

і покладемо, за означенням,

$$W(d) := \bigcup_{a>0} W_{M,a}^{M,ad}, \quad W = \bigcap_{d>0} W(d).$$

2. Оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W. Властивості операторів Гельфонда-Леонтьєва досліджували багато математиків у просторі аналітичних у крузі радіуса R, $0 < R \leq \infty$, функцій з топологією компактної збіжності. Позначається такий простір символом A_R. Оператори Гельфонда-Леонтьєва складають важливий клас операторів узагальненого диференціювання. Оператором Гельфонда-Леонтьєва називається оператор, побудований за допомогою послідовності $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} (k^{1/\rho}|a_k|^{1/k}) = (\delta e \rho)^{1/\rho},$$

$$0 < \delta, \quad \rho < +\infty, \tag{3}$$

тобто $a_k, k \in \mathbb{Z}_+$, — тейлорові коефіцієнти деякої спеціальної цілої функції F порядку ρ і типу σ. Такий оператор позначається символом $D^n(F, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, і визначається так. Нехай $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ — довільна функція з простору A_R, $0 < R \leq \infty$, тоді, за означенням [6],

$$D^n(F, \varphi)(z) := \sum_{k=n}^{\infty} b_k \frac{a_{k-n}}{a_k} z^{k-n}. \tag{4}$$

Внаслідок умови (3) існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k-n]{\left|\dfrac{a_{k-n}}{a_k}\right|} = 1$, тому ряд (4) збігається в крузі $|z| < R$, тобто функція $D^n(F, \varphi)$ регулярна в тому ж крузі, що й функція φ. Відзначимо відомі властивості оператора $D^n(F, \cdot)$ [6]:

1) $D^n(F, \varphi_1 + \varphi_2) = D^n(F, \varphi_1) + D^n(F, \varphi_2)$;

2) якщо c — стала, то $D^n(f, c\varphi) = cD^n(F, \varphi)$;

3) $D^m(F, D^n(F, \varphi)) = D^{m+n}(F, \varphi)$;

4) $D^n(F, F(\lambda z)) = \lambda^n F(\lambda z)$, λ — стала;

5) якщо $F(z) = e^z$, тоді $D^n(e^z, \varphi) = \frac{d^n}{dz^n}\varphi$.

Ці властивості показують, що вираз $D^n(F, \varphi)$ справді можна розуміти як узагальнену похідну порядку n від функції φ, яка породжена функцією $F(z)$ (замість функції e^z). Оператор D звичайного диференціювання в A_R є частковим випадком оператора $D^1(F, \cdot)$, який будується за послідовністю $a_k = \dfrac{1}{k!}$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Надалі вважатимемо, що послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ коефіцієнтів Тейлора функції F, за якою будуються оператори $D^n(F, \cdot)$, замість умови $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k-n]{\left|\frac{a_{k-n}}{a_k}\right|}=1$ задовольняє умову

$$\exists\,\alpha>0\ \exists\,L>1\ \forall\,k\geq n:\quad \left|\frac{a_k}{a_{k+n}}\right|\leq\alpha L^{k+n} \tag{5}$$

($n\in\mathbb{N}$ — фіксоване).

Метою цього пункту є дослідження властивостей оператора узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва у просторах типу W. Правильним є наступне твердження.

Теорема 1. *Оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва $D^n(F,\cdot)$ визначений коректно на W для довільного фіксованого $n\in\mathbb{N}$ і неперервно відображає цей простір у W^M_M.*

Доведення. Візьмемо довільну функцію $\varphi\in W$, яка є цілою, і нехай $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\tilde{b}_k z^k$ — її степеневий ряд. Покладемо, за означенням,

$$\psi_n(z)\equiv D^n(F,\varphi)(z):=\sum_{k=n}^{\infty}\tilde{b}_k\frac{a_{k-n}}{a_k}z^{k-n}\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{b}_{k+n}\frac{a_k}{a_{k+n}}z^k,\, z\in\mathbb{C}.$$

Доведемо, що $\psi_n\in W^M_M$. Передусім зазначимо, що ψ_n також є цілою функцією. Справді, із умови (5) випливає, що $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{a_k}{a_{k+n}}\right|}<+\infty$. Отже, радіуси збіжності вказаних степеневих рядів збігаються:

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\tilde{b}_k|}}=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|\tilde{b}_{k+n}|\cdot\left|\frac{a_k}{a_{k+n}}\right|}}=+\infty.$$

Оскільки $\varphi\in W(d)=\bigcup\limits_{a>0}W^{M,ad}_{M,a}$ при кожному $d>0$, то $\varphi\in W^{M,ad}_{M,a}$ при деякому $a>0$, тобто

$$\exists\,c>0\ \forall\,z=x+iy\in\mathbb{C}:$$

$$|\varphi(x+iy)|\leq ce^{-M(ax)+M(ady)}. \tag{6}$$

Функція φ є цілою, тому візьмемо довільно фіксовану точку $x_0\in(0,+\infty)$ і подамо φ у вигляді збіжного в $\mathbb{C}$ ряду: $\varphi(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k(z-x_0)^k$ або

$$\varphi(z+x_0)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k,\quad z\in\mathbb{C}, \tag{7}$$

при цьому коефіцієнти Тейлора b_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, функції φ обчислюються за формулою

$$b_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_r}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-x_0)^{k+1}}d\xi,\quad k\in\mathbb{Z}_+,$$

де Γ_r — коло радіуса r з центром у точці x_0. Тоді, врахувавши (6) дістанемо, що

$$|b_k|\leq r^{-k}\max_{\xi\in\Gamma_r}|\varphi(\xi)|\leq cr^{-k}e^{M(adr)-M(a(x_0-r))}\leq$$

$$\leq ce^{-M(a(x_0-r))}\inf_{r>0}(r^{-k}e^{M(adr)})=$$

$$=ce^{-M(a(x_0-r))}\left(\frac{ad}{\nu_k}\right)^k e^{M(\nu_k)};$$

тут ν_k — розв'язок рівняння $x\mu(x)=k$, $k\in\mathbb{Z}_+$ (як вже відзначалось раніше, послідовність $\{\nu_k,k\in\mathbb{Z}_+\}$ є зростаючою й необмеженою).

Оцінимо $e^{M(\nu_k)}$. Оскільки $M(\nu_k)=\int\limits_0^{\nu_k}\mu(y)dy$, $k\in\mathbb{N}$, то внаслідок теореми про середнє значення маємо, що

$$\forall\,k\geq1\ \exists\,y_k\in(0,\nu_k):\ M(\nu_k)=\nu_k\mu(y_k).$$

Функція μ зростаюча й неперервна на $[0,+\infty)$, тому $M(\nu_k)<\nu_k\mu(\nu_k)=k$, $k\geq1$. Отже, для коефіцієнтів Тейлора b_k, $k\in\mathbb{N}$, правильними є оцінки:

$$|b_k|\leq c\left(\frac{ade}{\nu_k}\right)^k e^{-M(a(x_0-r))},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Оскільки r — довільно фіксоване додатне число, то далі вважатимемо, що $r=x_0/2$;

тоді

$$|b_k| \le c\left(\frac{ade}{\nu_k}\right)^k e^{-M(\frac{a}{2}x_0)}, \quad k \in \mathbb{N}. \qquad (8)$$

У співвідношенні (7) покладемо $z = x_0$; в результаті дістанемо, що

$$\varphi(2x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_0^k,$$

причому для коефіцієнтів b_k, $k \in \mathbb{N}$, правильними є оцінки (8). Тоді

$$\psi_n(2x_0) \equiv D^n(F,\varphi)(2x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{k+n}\frac{a_k}{a_{k+n}}x_0^k.$$

Для кожного $m \in \mathbb{Z}_+$ покладемо $\tilde{\psi}_m(x_0) := x_0^m \psi_n(2x_0)$ і здійснимо оцінку $\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0)$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $x_0 \in (0, +\infty)$. Оскільки

$$(x^{k+m})^{(p)} = \begin{cases} \frac{(k+m)!}{(k+m-p)!}x^{k+m-p}, & k+m \ge p, \\ 0, & k+m < p, \end{cases}$$

то

$$\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0) =$$
$$= \sum b_{k+n+p}\frac{a_{k+p}}{a_{k+p+n}}\frac{(k+p+m)!}{(k+m)!}x_0^{k+m} \equiv$$
$$\equiv \sum \alpha_{k,n,m,p}(x_0);$$

при цьому, як випливає з (8), для коефіцієнтів b_{k+n+p} правильними є оцінки:

$$|b_{k+n+p}| \le c\left(\frac{ade}{\nu_{k+n+p}}\right)^{k+n+p} e^{-M(\frac{a}{2}x_0)}. \qquad (9)$$

Оскільки

$$\frac{(k+m+p)!}{(k+m)!} = \frac{(k+m+p)!}{(k+m)!p!}p! =$$
$$= C_{k+m+p}^{k+m}p! \le 2^{k+m+p}p!, \qquad (10)$$

а послідовність $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умову (5), то з урахуванням (9), (10) для $\alpha_{k,n,m,p}(x_0)$ дістаємо нерівність

$$|\alpha_{k,n,m,p}(x_0)| \le \alpha c\left(\frac{ade}{\nu_{k+n+p}}\right)^{k+n+p} L^{k+n+p}\times$$
$$\times 2^{k+m+p}p!x_0^{k+m}e^{-M(\frac{a}{2}x_0)}.$$

За допомогою методів диференціального числення знаходимо, що

$$x_0^{k+m}e^{-M(\frac{a}{2}x_0)} \le \left(\frac{2\tilde{\nu}_k}{a}\right)^{k+m} e^{-M(\tilde{\nu}_k)},$$

де $\tilde{\nu}_k$ — розв'язок рівняння

$$\frac{a}{2}x\mu\left(\frac{a}{2}x\right) = k+m, \quad k \in \mathbb{N},$$

при цьому $\tilde{\nu}_k < k+m$, послідовність $\{\tilde{\nu}_k, k \in \mathbb{N}\}$ є зростаючою й необмеженою.

Уведемо позначення: $\alpha_m = \sup\limits_{x\ge 0}\{x^m e^{-M(x)}\}$, $m \in \mathbb{N}$. Легко бачити, що $\alpha_m \le \nu_m e^{-M(\nu_m)}$, де ν_m — розв'язок рівняння $x\mu(x) = m$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\tilde{\nu}_k^m e^{-M(\tilde{\nu}_k)} \le \alpha_m \le \nu_m^m e^{-M(\nu_m)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Із нерівностей $\nu_{k+n+p} \ge \nu_k$, $\nu_{k+n+p} \ge \nu_n$, $\nu_{k+n+p} \ge \nu_p$ випливає, що

$$\left(\frac{ade}{\nu_{k+n+p}}\right)^{k+n+p} \le$$
$$\le \left(\frac{ade}{\nu_k}\right)^k \left(\frac{ade}{\nu_n}\right)^n \left(\frac{ade}{\nu_p}\right)^p.$$

Отже, правильними є нерівності

$$|\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0)| \le \alpha c\left(\frac{adeL}{\nu_n}\right)^n \left(\frac{4}{a}\right)^m \left(\frac{2Lade}{\nu_p}\right)^p \times$$
$$\times p!\nu_m^m e^{-M(\nu_m)}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4Led\tilde{\nu}_k}{\nu_k}\right)^k.$$

Нагадаємо, що $\tilde{\nu}_k$, $k \in \mathbb{N}$, — розв'язок рівняння $x\mu(x) = k+m$, $k \in \mathbb{N}$, а ν_k — розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\tilde{\nu}_k\mu(\tilde{\nu}_k) = k+m = \nu_k\mu(\nu_k) + m,$$

тобто

$$\tilde{\nu}_k = \nu_k\frac{\mu(\nu_k)}{\mu(\tilde{\nu}_k)} + \frac{m}{\mu(\tilde{\nu}_k)} \le \nu_k + \frac{m}{\mu(\tilde{\nu}_1)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

(тут ми скористались тим, що $\tilde{\nu}_k \geq \nu_k$, $k \in \mathbb{N}$, а функція μ — зростаюча на $[0,+\infty)$). Таким чином,

$$\frac{\tilde{\nu}_k}{\nu_k} \leq 1 + \frac{m}{\nu_k \mu(\tilde{\nu}_1)} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{m}{\nu_1 \mu(\nu_1)} = 1 + m \leq 2^m, \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

$$\left(\frac{4Led\tilde{\nu}_k}{\nu_k}\right)^k \leq (4Led)^k 2^{mk}$$

(m — фіксоване). Покладемо $d = (4Le4^m)^{-1}$. Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4Led\tilde{\nu}_k}{\nu_k}\right)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m}\right)^k =$$

$$= \frac{2^m}{2^m - 1} \leq 2, \quad m \geq 1.$$

Отже, для $\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0)$ маємо оцінку:

$$|\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0)| \leq \tilde{c}\left(\frac{4}{a}\right)^m \nu_m^m \left(\frac{a}{2\nu_p}\right)^p p! e^{-M(\nu_m)},$$

$$\tilde{c} = 2c\alpha\left(\frac{a}{4\nu_n}\right)^n. \tag{11}$$

Зазначимо, що внаслідок парності функції M аналогічні оцінки для $\tilde{\psi}_m^{(p)}(x_0)$ правильні й у випадку $x_0 \in (-\infty, 0)$.

Із оцінок (11) випливає, що $\{\psi_n^{(p)}, x^m\psi_n\} \subset L_2(\mathbb{R})$, $\forall\, \{m,p\} \subset \mathbb{Z}_+$. Справді,

$$\|\psi_n^{(p)}\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\psi_n^{(p)}(2x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left\{(1+x^2)|\psi_n^{(p)}(2x)|^2\right\}\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{1+x^2}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\pi}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}|\psi_n^{(p)}(2x)|^2 + \sup_{x\in\mathbb{R}}|x\psi_n^{(p)}(2x)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq c_1\left(\frac{a}{2\nu_p}\right)^p p!, \quad c_1 = \tilde{c}\sqrt{\pi\left(1 + \frac{16}{a^2}\nu_1^2\right)}.$$

Аналогічно,

$$\|x^m\psi_n\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x^m\psi_n(2x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\pi}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\{(1+x^2)|x^m\psi_n(2x)|^2\}\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\pi}\tilde{c}\left(\left(\frac{4}{a}\right)^{2m}\nu_m^{2m}e^{-2M(\nu_m)} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{4}{a}\right)^{2(m+1)}\nu_{m+1}^{2(m+1)}e^{-2M(\nu_{m+1})}\right)^{1/2}.$$

Правильними є співвідношення

$$\nu_{m+1}\mu(\nu_{m+1}) = m+1 = \nu_m\mu(\nu_m) + \nu_1\mu(\nu_1).$$

Отже,

$$\nu_{m+1} = \frac{\nu_m\mu(\nu_m)}{\mu(\nu_{m+1})} + \frac{\nu_1\mu(\nu_1)}{\mu(\nu_{m+1})}.$$

Функція μ — зростаюча на $(0,+\infty)$, тому $\mu(\nu_{m+1}) \geq \mu(\nu_m)$, $\mu(\nu_{m+1}) \geq \mu(\nu_1)$. Звідси випливають нерівності

$$\nu_{m+1} \leq \nu_m + \nu_1 \leq \nu_m + \nu_m = 2\nu_m.$$

Урахувавши ці оцінки знайдемо, що

$$\nu_{m+1}^{m+1} \leq 2^{m+1}\nu_m^{m+1} \leq 2m2^m\nu_m^m \leq 2\cdot 4^m\nu_m^m.$$

Таким чином,

$$\|x^m\psi_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq c_2\left(\frac{16}{a}\right)^m \nu_m^m e^{-M(\nu_m)},$$

$$c_2 = \tilde{c}\sqrt{\pi\left(1 + \frac{64}{a^2}\right)}.$$

Користуючись формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій та нерівністю Коші-Буняковського знайдемо, що

$$\|x^m\psi_n^{(p)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = (x^m\psi_n^{(p)}, x^m\psi_n^{(p)})_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \left|([x^{2m}\psi_n^{(p)}]^{(p)}, \psi_n)_{L_2(\mathbb{R})}\right| =$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{r} C_p^j \frac{(2m)!}{(2m-j)!} (x^{2m-j} \psi_n^{(2p-j)}, \psi_n)_{L_2(\mathbb{R})} \right| =$$

$$= \left| \sum_{j=0}^{r} C_p^j \frac{(2m)!}{(2m-j)!} (x^{2m-j} \psi_n, \psi_n^{(2p-j)})_{L_2(\mathbb{R})} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{r} \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{(2m)!}{(2m-j)!} \|x^{2m-j}\psi_n\|_{L_2(\mathbb{R})} \times$$

$$\times \|\psi_n^{(2p-j)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq c_1 c_2 \sum_{j=0}^{r} \frac{p!}{j!(p-j)!} \frac{(2m)!}{(2m-j)!} \left(\frac{16}{a}\right)^{2m-j} \times$$

$$\times \nu_{2m-j}^{2m-j} e^{-M(\nu_{2m-j})} \left(\frac{a}{2\nu_{2p-j}}\right)^{2p-j} (2p-j)!,$$

де $r = \min\{2m, p\}$, $\{m, p\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Для того, щоб здійснити оцінку виразу $\dfrac{1}{\nu_{2p-j}^{2p-j}}$, покладемо

$$\gamma_p := \inf_{r>0} \frac{e^{M(r)}}{r^p} \equiv \inf_{r\geq 1} \frac{e^{M(r)}}{r^p} = \frac{e^{M(\nu_p)}}{\nu_p^p}.$$

Зазначимо, що

$$\frac{e^{M(r)}}{r^{p+1}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{e^{M(r)}}{r^p} \leq \frac{e^{M(r)}}{r^p}, \quad r \geq 1.$$

Звідси дістаємо, що $\gamma_{p+1} \leq \gamma_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, тобто послідовність $\{\gamma_p, p \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно спадною. Доведемо, що послідовність $\left\{\dfrac{\gamma_{p-1}}{\gamma_p}, p \geq 1\right\}$ обмежена зверху. Для цього скористаємось співвідношеннями

$$\frac{\gamma_{p-1}}{\gamma_p} = \frac{\nu_p^p}{\nu_{p-1}^{p-1}} \cdot \frac{e^{M(\nu_{p-1})}}{e^{M(\nu_p)}} =$$

$$= \nu_{p-1} \left(\frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\right)^p \frac{e^{M(\nu_{p-1})}}{e^{M(\nu_p)}}.$$

Оскільки

$$\frac{\nu_p}{\nu_{p-1}} = \frac{\nu_p \mu(\nu_p)\mu(\nu_{p-1})}{\nu_{p-1}\mu(\nu_{p-1})\mu(\nu_p)} =$$

$$= \frac{p}{p-1} \frac{\mu(\nu_{p-1})}{\mu(\nu_p)} < \frac{p}{p-1} = 1 + \frac{1}{p-1},$$

то

$$\left(\frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\right)^p < \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^p \leq 4, \quad \forall\, p \geq 2.$$

Очевидно, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\nu_{p-1} < \exp\{\varepsilon \nu_{p-1}\} < \exp\{M(\varepsilon \nu_{p-1})\}.$$

Функція M є опуклою, тобто

$$M(\varepsilon \nu_{p-1}) + M(\nu_{p-1}) \leq M((1+\varepsilon)\nu_{p-1});$$

тоді

$$\nu_{p-1} \exp\{M(\nu_{p-1})\} \leq \exp\{M((1+\varepsilon)\nu_{p-1})\}.$$

Для кожного $p > 2$ виберемо $\varepsilon_p \in \left(0, \dfrac{\nu_p}{\nu_{p-1}} - 1\right)$ так, щоб

$$\nu_{p-1} \exp\{M(\nu_{p-1})\} \leq \exp\{M(\nu_p)\}, \quad p \geq 2.$$

Оскільки $\dfrac{\gamma_0}{\gamma_1} = \dfrac{\nu_1}{e^{M(\nu_1)}} \leq \nu_1 < 1$, то $\dfrac{\gamma_{p-1}}{\gamma_p} \leq 4$, $\forall\, p \geq 1$. Тоді

$$\gamma_{2p-j} \leq 4\gamma_{2p-j+1} \leq 4^2 \gamma_{2p-j+2} \leq \ldots \leq 4^j \gamma_{2p} \leq$$

$$\leq 4^r \gamma_{2p} \leq 4^{2m+p} \gamma_{2p}, \quad \forall\, j: \ 0 \leq j \leq r.$$

Крім того,

$$\gamma_p^2 = \inf_{r>0} \frac{e^{2M(r)}}{r^{2p}} \geq \inf_{r>0} \frac{e^{M(r)}}{r^{2p}} = \gamma_{2p}.$$

Отже,

$$\frac{1}{\nu_{2p-j}^{2p-j}} \leq \frac{e^{M(\nu_{2p-j})}}{\nu_{2p-j}^{2p-j}} = \gamma_{2p-j} \leq$$

$$\leq 4^{2m+p} \gamma_{2p} \leq 4^{2m+p} \gamma_p^2 = 4^{2m+p} \frac{e^{2M(\nu_p)}}{\nu_p^{2p}}.$$

Оскільки $e^{2M(\nu_p)} \leq e^{2p}$, то дістаємо наступну нерівність

$$\frac{1}{\nu_{2p-j}^{2p-j}} \leq \frac{4^{2m+p}}{\nu_p^{2p}} e^{2p}, \quad \forall\, j: \ 0 \leq j \leq r.$$

Нехай

$$\alpha_m := \sup_{r>0} (r^m e^{-M(r)}) = \nu_m^m e^{-M(\nu_m)}, \ m \in \mathbb{Z}_+$$

Оскільки

$$\alpha_{m+1} = r^{m+1} e^{-M(r)} = r\alpha_m \geq \alpha_m, \quad r \geq 1,$$

то послідовність $\{\alpha_m, m \in \mathbb{Z}_+\}$ є монотонно зростаючою. Із властивостей функції M випливають нерівності:

$$2M(r) \leq M(2r), \quad e^{-2M(r)} \geq e^{-M(2r)}.$$

Тоді

$$\alpha_m^2 = \sup_{r>0}(r^{2m} e^{-2M(r)}) \geq \sup_{r>0}(r^{2m} e^{-M(2r)}) =$$

$$= \sup_{r>0}\left(\frac{(2r)^{2m}}{2^{2m}} e^{-M(2r)}\right) =$$

$$= 2^{-2m} \sup_{r>0}(r^{2m} e^{-M(r)}) = 2^{-2m} \alpha_{2m}.$$

Отже,

$$\nu_{2m-j}^{2m-j} e^{-M(\nu_{2m-j})} = \alpha_{2m-j} \leq \alpha_{2m} \leq$$

$$\leq 2^{2m} \alpha_m^2 = 2^{2m} \nu_m^{2m} e^{-2M(\nu_m)},$$

$$\forall j: \ 0 \leq j \leq r.$$

Крім того,

$$\frac{(2m)!}{(2m-j)!} = \frac{(2m)!}{(2m-j)!j!} j! = C_{2m}^{2m-j} j! \leq$$

$$\leq 2^{2m} j!, \quad (2p-j)! \leq (2p)!, \quad \forall j: \ 0 \leq j \leq r,$$

$$p!(2p)! = 2^p (p!)^2.$$

Таким чином, для $\|x^m \psi_n^{(p)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$ правильною є оцінка:

$$\|x^m \psi_n^{(p)}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq c_1 c_2 \left(\frac{\nu_m}{a_1}\right)^{2m} e^{-2M(\nu_m)} \left(\frac{b_1}{\nu_p}\right)^{2p} (p!)^2 \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{r} \frac{1}{(p-j)!} \frac{1}{(8\nu_1)^j},$$

де $a_1 = \dfrac{a}{256}$, $b_1 = ae\sqrt{2}$. Уведемо позначення: $\delta = \max\left\{1, \dfrac{1}{8\nu_1}\right\}$. Тоді

$$\sum_{j=0}^{r} \frac{1}{(p-j)!} \frac{1}{(8\nu_1)^j} \leq \delta^r \sum_{j=0}^{r} 1 =$$

$$= \frac{r(r+1)}{2} \delta^r \leq \delta^r 2^{2r} \leq$$

$$\leq \delta^{2m+p} 4^{2m+p} = (4\delta)^{2m} (4\delta)^p.$$

Підсумовуючи дістаємо, що

$$\|x^m \psi_n^{(p)}\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq$$

$$\leq \tilde{c}' \left(\frac{\nu_m}{a_2}\right)^m e^{-M(\nu_m)} \left(\frac{b_2}{\nu_p}\right) p! e^{M(\nu_p)}, \qquad (12)$$

$$a_2 = \frac{a_1}{4\delta}, \quad b_2 = b_1 \sqrt{4\delta},$$

$$\tilde{c}' = c_1 c_2 \tilde{c} = 2c c_1 c_2 \alpha \left(\frac{a}{4\nu_n}\right)^n.$$

Розглянемо півнорми

$$p_{m,p}(\psi_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m \psi_n^{(p)}(2x)|,$$

$$p'_{m,p}(\psi_n) = \int_{\mathbb{R}} |x^m \psi_n^{(p)}(2x)| dx,$$

$$p''_{m,p}(\psi_n) = \left(\int_{\mathbb{R}} |x^m \psi_n^{(p)}(2x)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\{m, p\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Відомо, що вказані півнорми еквівалентні між собою, при цьому правильними є нерівності:

$$p_{m,p}(\psi_n) \leq m p'_{m-1,p}(\psi_n) + p'_{m,p+1}(\psi_n),$$

$$p'_{m,p}(\psi_n) \leq \sqrt{\pi} \sqrt{{p''_{m+1,p}}^2(\psi_n) + {p''_{m,p}}^2(\psi_n)}.$$

Отже,

$$p_{m,p}(\psi_n) \leq m \sqrt{{p''_{m+1,p+1}}^2(\psi_n) + {p''_{m-1,p}}^2(\psi_n)} +$$

$$+ \sqrt{\pi} \sqrt{{p''_{m+1,p+1}}^2(\psi_n) + {p''_{m,p+1}}^2(\psi_n)}. \qquad (13)$$

Врахувавши (12) та (13) знайдемо, що

$$p_{m,p}(\psi_n) \leq c'_0 \left(\frac{4\nu_m}{a_2}\right)^m \left(\frac{2b_2}{\nu_p}\right)^p \times$$

$$\times p! e^{-M(\nu_m)+M(\nu_p)}, \quad c'_0 = 4\sqrt{2\pi} \tilde{c}'. \qquad (14)$$

Із (2) та (14) випливає, що

$$|\psi_n(2z)| \le c_0'' e^{-M(a_3' x)+M(b_3' y)},$$

$$\forall\, z = x+iy \in \mathbb{C},\ a_3' > 0,\ b_3' > 0,\ c_0'' > 0,$$

або

$$|\psi_n(z)| \le c_0'' e^{-M(a_3 x)+M(b_3 y)}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

де $a_3 = \dfrac{a_3'}{8}$, $b_3 = b_3'$. Це означає, що $\psi_n \in W_{M,a_3}^{M,b_3} \subset W_M^M$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ (зазначимо, що від n залежить лише стала c_0'; a_3, b_3 від n не залежать). Отже, оператор $D^n(F,\cdot)$ визначений коректно на W і відображає цей простір в W_M^M. Аналогічно попередньому доводимо, що кожну обмежену множину простору W оператор $D^n(F,\cdot)$ відображає в обмежену множину простору W_M^M. Теорема доведена.

3. Оператори узагальненого диференціювання нескінченного порядку в просторах типу W. Нехай $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі W задано оператор узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва нескінченного порядку $g(D(F,\cdot)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n(F,\cdot)$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in W$ ряд

$$g(D(F,\varphi))(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n(F,\varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору W_M^M.

Теорема 2. *Якщо ціла функція g задовольняє умову*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, c_\varepsilon > 0\ \forall\, z = x+iy :$$

$$|g(z)| \le c_\varepsilon e^{M(\varepsilon x)+M(\varepsilon y)}, \qquad (15)$$

то в просторі W визначений оператор $A_g := g(D(F,\cdot))$; при цьому A_g відображає W неперервно в простір W_M^M.

Доведення. Нехай

$$\psi(z) := g(D(F,\varphi))(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n(F,\varphi)(z), \quad \varphi \in W.$$

Доведемо, що $\psi \in W_M^M$. При доведенні теореми 1 встановлено, що якщо $\varphi \in W$, то $D^n(F,\varphi) \in W_{M,a_1}^{M,b_1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, сталі a_1, b_1 не залежать від n, причому правильною є нерівність

$$|D^n(F,\varphi)(z)| \le c_0 \left(\frac{a}{4\nu_n}\right)^n e^{-M(a_1 x)+M(b_1 y)},$$

$$c_0 > 0, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}, \qquad (16)$$

де ν_n, $n \in \mathbb{N}$, — розв'язок рівняння $x\mu(x) = n$, $n \in \mathbb{N}$. Коефіцієнти Тейлора c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, функції g обчислюються за формулою

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{g(z)}{z^{n+1}} dz,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з (15) дістаємо, що

$$|c_n| \le c_\varepsilon \inf_{R>0} \frac{e^{2M(\varepsilon R)}}{R^n}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Міркуючи аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні теореми 1 знаходимо, що

$$|c_n| \le c_\varepsilon \left(\frac{\varepsilon\sqrt{e}}{\tilde{\nu}_n}\right)^n, \quad n \ge 1,$$

де $\tilde{\nu}_n$ — розв'язок рівняння $x\mu(x) = \dfrac{n}{2}$, $n \ge 1$. Отже, з урахуванням (16) маємо, що

$$|\psi(z)| \le c_\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon\sqrt{e}a}{4\nu_n\tilde{\nu}_n}\right)^{2n} e^{-M(a_1 x)+M(b_1 y)} \le$$

$$\le c_\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon\sqrt{e}a}{4\nu_1\tilde{\nu}_1}\right)^{2n} e^{-M(a_1 x)+M(b_1 y)}.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ — довільне, то його завжди можна підібрати так, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{e}a}{4\nu_1\tilde{\nu}_1}\right)^{2n}$ буде збіжним. Таким чином,

$$|\psi(z)| \le \tilde{c}_\varepsilon e^{-M(a_1 x)+M(b_1 y)}, \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

тобто $\psi \in W_{M,a_1}^{M,b_1} \subset W_M^M$. Із наведених міркувань випливає, що оператор A_g відображає кожну обмежену множину простору W в обмежену множину простору W_M^M, тобто оператор $A_g : W \to W_M^M$ є неперервним. Теорема доведена.

Наприклад, функція $g(z) = e^z$ задовольняє умови теореми 2:

$$\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}: \ |e^z| = |e^{x+iy}| = e^x \le e^{|x|}.$$

Для довільної опуклої функції M при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|x| \le M(\varepsilon x) + M(\varepsilon y) + c_1, \quad c_1 = c_1(\varepsilon) > 0.$$

Отже, для e^z справджується нерівність (15), тобто в W визначений коректно й є неперервним оператор

$$e^{D(F,\cdot)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n(F,\cdot)}{n!}.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 307 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

3. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.21—26.

4. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Оператори диференціювання нескінченного порядку у просторах типу С та їх застосування // Доп. НАН України.— 2004.— № .10— С.14—19.

5. *Готинчан Т.І.* Про нетривіальність та вкладення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.160. Математика.— Чернівці: Рута, 2003.— С.39—44.

6. *Леонтьев А.Ф.* Обобщения рядов экспонент.— М.: Наука, 1981.— 320 с.

Стаття надійшла до редколегії 28.10.2005